This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

186 e. 81

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE,

EXPOSANT

LES PRINCIPES DE STATIQUE ET DE DYNAMIQUE,

LES ORGANES MÉCANIQUES ET LES MOTEURS;

PAR

J. V. PONCELET,

COLONEL DU GÉNIE,

MEMBRE DE L'INSTITUT DE FRANCE, ACADÉMIE DES SCIENCES,

PROFESSEUR DE PHYSIQUE MÉCANIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS, ANCIEN PROFESSEUR DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES A L'ÉCOLE SPÉCIALE DE L'ARTILLERIE ET DU GÉNIE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE METZ, ETC.

Bruxelles.

MELINE, CANS ET COMPAGNIE.

LIBRAIRIE, IMPRIMERIE ET FONDERIE.

1839

186. e. 81.

18. e. 81.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE.

PREMIÈRE PARTIE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

I.

PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES CORPS.

1. *États principaux des corps.* — Les corps se présentent sous trois états principaux :

Corps *solides :* les pierres, les métaux, les bois, etc.;

Corps *liquides :* l'eau, le vin, le mercure ou vif-argent, etc.;

Corps *gazeux* ou *aériformes :* l'air, les fumées diverses, et tous les corps analogues, nommés *gaz* et *vapeurs.*

L'existence de l'air, des gaz et des vapeurs quelconques est prouvée par toutes sortes de faits. Le mètre cube d'air pèse 1 kilogr. et 3 *hectogr. Exemples :* Une vessie remplie d'air résiste à la pression comme les corps solides ordinaires. Un verre renversé étant plongé dans l'eau, l'air qu'il renferme ne cède point sa place

au liquide. Les vents, les ouragans, qui ne sont que de l'air en mouvement, renversent des arbres, des maisons, etc., comme les torrents d'eau.

Les liquides, les gaz, les vapeurs se nomment *fluides*, d'un mot latin qui veut dire *couler*.

Certains corps solides sont *durs*, *cassants*, *fragiles* : le verre, l'acier, etc. D'autres sont *mous*, *ductiles* : le beurre, l'argile ou terre glaise, le plomb, le fer (à chaud). On dit aussi des métaux ductiles, qu'ils sont malléables.

Certains fluides sont *visqueux* ou ont de la *viscosité*. L'huile, la mélasse, etc., filent en coulant dans l'air, au lieu de se diviser comme l'eau; ils coulent plus difficilement.

Tous les corps connus peuvent prendre successivement l'état solide, liquide et gazeux. L'eau est solide en hiver (glace, neige); liquide dans son état ordinaire; aériforme ou à l'état de vapeur visible ou invisible, quand on la chauffe, quand on l'expire par la bouche.

2. *Divisibilité.* — La divisibilité des corps est de toute évidence pour les fluides, liquides ou gazeux; et comme tous les corps peuvent être amenés à l'état de fluides au moyen de la chaleur, on conçoit que cette propriété est générale. Mais il est d'autres moyens de prouver la divisibilité des corps solides; et ces moyens constituent l'objet principal des arts industriels.

On divise les pierres, les bois, les métaux, etc., par le choc ou par le frottement, à l'aide de marteaux, pilons, meules, molettes, coins, ciseaux, scies, râpes, limes, rabots, etc.

On sépare les parties les plus fines des plus grossières avec les tamis, les bluteries, etc. On atteint encore mieux ce but en employant la *décantation*, la *ventilation*, ou la *sublimation* (vaporisation) dans certains cas.

La *décantation* consiste à verser dans l'eau les matières déjà pulvérisées, à les agiter, à laisser reposer le mélange pendant un temps plus ou moins long selon l'état de division qu'on veut obtenir, puis à transvaser l'eau pour la laisser déposer de nouveau, et ainsi de suite. Il est des parties tellement fines qu'elles emploient deux ou trois jours pour se précipiter.

La *ventilation* remplit le même but. L'air mis en mouvement par un soufflet, van, ou ventilateur, entraîne les parties d'autant plus

loin qu'elles sont plus fines. C'est ainsi qu'on divise quelquefois le charbon et le soufre dans les poudrières, et que dans nos campagnes on sépare le grain de son enveloppe.

La *sublimation* consiste à vaporiser les corps au moyen de la chaleur, dans des vases fermés, et à condenser les vapeurs par le refroidissement. C'est ainsi qu'on prépare la fleur de soufre et le mercure ou vif-argent.

Ces opérations donnent déjà une grande idée de la divisibilité de la matière; en voici encore plusieurs exemples. Quand on observe un cône lumineux produit par les rayons du soleil qui traversent l'ouverture d'une chambre obscure, on aperçoit une infinité de particules de matière en mouvement, invisibles dans l'état ordinaire. Cinq centigrammes ou un grain de carmin, dissous dans 15 kilogr. d'eau, colorent toute cette masse, et le nombre total des parties colorantes, en supposant deux de ces parties seulement par centigramme cube, est de trois millions. Le fil doré du brodeur, qui se fait avec des cylindres d'argent plaqué de feuilles d'or très-minces, et passés à la filière, pèse $\frac{1}{20}$ d'once pour 202 pieds de longueur; ce premier fil aplati entre deux cylindres acquiert une longueur de 270 pieds, une largeur de $\frac{1}{8}$ de ligne, et une épaisseur de $\frac{1}{250}$ de ligne. La lame d'or qui le recouvre est ainsi réduite, tout calcul fait, à $\frac{1}{60000}$ de ligne d'épaisseur. Un fil de platine recouvert d'argent, étiré à la filière et remis ensuite à nu en dissolvant l'argent dans l'eau forte, peut être amené à un tel degré de finesse que son diamètre est seulement de $\frac{1}{1200}$ d'un millimètre, et que 3000 pieds ne pèsent qu'un grain. Il faudrait 140 de ces fils pour former un faisceau de la grosseur d'un seul brin de soie.

La nature nous présente la division de la matière poussée plus loin encore. Le *mica*, sorte de pierre, se décompose en lames dont il faudrait plus de 23000 pour former l'épaisseur d'un millimètre. Les bulles de savon que soufflent les enfants ont une épaisseur beaucoup moindre encore. Les animaux infusoires qu'on aperçoit au microscope dans une gouttelette d'eau ou de vinaigre, et qui paraissent doués des mêmes qualités physiques que les autres animaux, sont encore des exemples d'une divisibilité encore plus reculée.

L'imagination peut aller au delà encore, mais s'ensuit-il que les parties des corps soient divisibles indéfiniment? Les phénomènes de la chimie semblent prouver le contraire.

Dans la multitude des combinaisons et transformations possibles

des corps, la matière sort intacte et avec toutes ses qualités primitives quand on l'a isolée.

La combustion de l'hydrogène qui produit en résultat de l'eau, et la décomposition de cette dernière reproduisant la même quantité d'hydrogène, en sont un exemple frappant.

Les dernières parties de la matière qui ne sont altérables par aucun des moyens connus se nomment *atomes, molécules.*

Si les atomes n'étaient point liés entre eux par des causes quelconques, les corps dont ils se composent ressembleraient à des monceaux de poussière ; et comme il sera prouvé tout à l'heure que ces atomes sont écartés entre eux, il faut bien qu'ils soient soumis à l'action de forces, les unes *attractives* et les autres *répulsives*, qui se balancent. Ces forces s'appellent *forces moléculaires, forces atomistiques.*

3. *Porosité.* — On nomme *pores* les intervalles compris entre les atomes, les particules et les divers groupes de particules qui composent les corps. Les premiers sont tout à fait imperceptibles ; quant aux autres on peut souvent s'assurer de leur existence. L'éponge offre un exemple de pores de diverses grandeurs.

L'espace occupé par la matière propre d'un corps est ce qu'on nomme son *volume réel.*

L'espace limité par l'enveloppe extérieure d'un corps est son volume apparent.

La différence du volume apparent au volume réel est le volume des pores. Ainsi, plus le volume apparent diminue, plus il se rapproche du volume réel. *Exemple :* l'éponge qu'on peut comprimer jusqu'à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$ de son volume primitif.

La *densité* d'un corps est son poids sous l'unité du volume apparent ; l'or est plus dense que le fer, parce qu'un pied cube ou un mètre cube d'or pèse plus qu'un pied cube ou un mètre cube de fer. La densité de l'eau est à peu près de 70 livres pour un pied cube et de 1000 kilogr. pour un mètre cube.

La *pesanteur spécifique*, ou mieux le *poids spécifique* d'une substance, est sa densité comparée à celle de l'eau. Ainsi, la densité de l'eau étant 1, celle de l'or est d'environ 19, c'est-à-dire, qu'un pied cube ou un mètre cube d'or pèse 19 fois autant qu'un pied cube ou un mètre cube d'eau.

La porosité est évidente dans une foule de corps qui se laissent

pénétrer par l'eau. Tous les tissus, les étoffes, les cuirs, les bois, sont dans ce cas. C'est sur cette propriété qu'est fondé l'emploi des filtres. Les bois gonflent par l'humidité et se retirent par la sécheresse, ainsi qu'on le voit dans les planchers, portes, lambris, etc. C'est en insérant des coins de bois bien sec, dans une rainure pratiquée autour des blocs à extraire pour les meules, et en les humectant, qu'on parvient à détacher ces blocs des massifs qui les renferment. Les cordes mouillées augmentent en diamètre et diminuent en longueur : de là un moyen puissant employé par les anciens pour soulever d'énormes fardeaux.

Certaines pierres servent de filtres comme les tissus. Toutes augmentent de poids quand on les expose à l'humidité. On sait que sorties fraîchement des carrières elles sont humides, ce qui facilite leur taille. Les rochers de la nature laissent filtrer l'eau qui forme les stalactites suspendues aux voûtes des grottes.

Les métaux mêmes sont sensiblement poreux, et se laissent pénétrer par l'eau. C'est ce que prouve l'expérience faite à Florence sur une boule d'or, remplie d'eau et soumise à une forte pression ; expérience répétée depuis pour d'autres métaux.

4. *Compressibilité.* — La *compressibilité* des corps est la propriété qu'ils ont tous d'être réduits quand on les comprime, à un moindre volume apparent.

Tissus.—Les tissus des arts et les tissus naturels, tels que les étoffes, l'éponge, les bois, le cuir, qui sont très-poreux, sont aussi les plus compressibles des corps solides. Cette propriété sert à en extraire les liquides qu'ils contiennent. Les étoffes, le papier sorti fraîchement des cuves de fabrication, la betterave réduite en pulpes, abandonnent, sous l'action de la presse, les liquides renfermés dans leurs pores.

Pierres. — On sait que les pierres empilées dans les colonnes et les murailles de nos édifices s'affaissent, se tassent, se compriment, se brisent même sous la charge. *Exemples :* Accident du Panthéon à Paris. Deux tables de marbre, entre lesquelles on place une carte à jour, fléchissent et ne se touchent que par leurs bords. Un mécanicien allemand est parvenu à construire un instrument qui rend sensible la flexibilité d'un mur sous la pression du doigt.

Métaux. — Quand on frappe la monnaie, le volume du métal est réduit ; il s'écrouit, il se moule comme ferait la cire,

Liquides. — Ils sont en général beaucoup moins compressibles que les corps solides. L'eau renfermée dans un canon de bronze de trois pouces d'épaisseur et comprimée fortement fait éclater la pièce avant que son volume ait diminué d'un vingtième. Cette diminution de volume est de 0,000048 pour une pression atmosphérique ou pour chaque pression de 1^k,033 par centimètre carré de surface. Il faut 1^k,033 de pression sur chaque centimètre pour que la pièce éclate.

Gaz. — Ils sont les plus compressibles de tous les corps. De l'air refoulé au moyen d'un piston, dans un tube fermé par une extrémité (briquet pneumatique), est réduit, par le seul effort de la main, au dixième ou au vingtième de son volume primitif. Ce volume diminue en augmentant l'effort de la pression, mais ne peut se réduire à rien, à cause de l'impénétrabilité des molécules de l'air ou des gaz : il y a donc une limite à la compression. Quand la compression du piston cesse, l'air le repousse et reprend son volume primitif ; de là le nom de *fluide élastique* donné à tous les gaz. Si le tube du briquet pneumatique est indéfiniment prolongé au-dessus du piston, et qu'on élève ce dernier, l'air occupera au-dessous de lui un volume dix fois, cent fois, mille fois plus grand que son volume primitif ; il n'y a donc point de limites à l'expansion de l'air et des gaz. Supposons que la pression exercée sous le piston par l'air soit de 1 kilogr. quand il occupe un certain volume ; si ce volume est réduit à moitié par la pression, le ressort de l'air intérieur contre le piston sera de 2 kilogr., etc. Les volumes des gaz sont donc réciproquement proportionnels à leur force de ressort. Cette loi, découverte par Mariotte, sert de base à l'estimation de la force de la vapeur qui se comporte à peu près comme les autres gaz. Les autres corps sont aussi extensibles, mais beaucoup moins que l'air : un fil attaché à un point fixe et supportant des poids, s'allonge à mesure qu'ils sont plus considérables, et finit par se rompre dès qu'ils ont été suffisamment augmentés.

5. *Élasticité.* — L'*élasticité* est la propriété que possèdent les corps de reprendre leur état primitif, quand une cause quelconque les en a fait changer. Un ressort d'acier plié revient quand on l'abandonne, exactement à sa première forme. Les ressorts sont d'une grande utilité dans les arts : ils servent à suspendre les voitures, à faire mouvoir les montres ; à restituer, dans les chocs, les pertes d'action qui en résultent ; c'est par leur ressort que le foin, les

découpures de papier, prémunissent les marchandises emballées contre l'effet des secousses.

On distingue l'élasticité de *forme* et l'élasticité de *volume*. Le ressort qui change de forme et non de volume est un exemple de la première espèce. La deuxième est manifeste dans l'air dont le volume apparent diminue par la compression et redevient comme auparavant dès qu'elle cesse.

L'élasticité de volume des liquides est parfaite. L'eau qui se divise quand on la comprime librement n'a point sensiblement d'élasticité de forme. Si on la fait diminuer de volume dans un espace clos et suffisamment résistant et qu'ensuite on l'abandonne à elle-même, elle reprend exactement son volume primitif, et jouit ainsi à un très-haut degré de l'élasticité de volume.

Les gaz et l'air sont parfaitement élastiques, et reviennent tout à fait à leur premier état, quelle que soit la pression à laquelle ils aient été soumis.

Les corps solides ne se composent pas de la même manière ; il y a une limite de pression au delà de laquelle ils sont plus ou moins déformés. Un ressort est brisé quand on le plie au delà d'un certain terme. Ils sont d'autant plus élastiques qu'ils peuvent revenir d'une déformation plus grande. Une lame d'acier est plus élastique qu'une lame de verre, et une lame de verre est plus élastique qu'une lame de plomb. Sous une faible pression la lame de plomb reprend exactement sa figure primitive, et dans ce sens on pourrait dire qu'elle est parfaitement élastique. Il en est de même de toutes les substances. Ainsi, en réalité, l'élasticité n'est qu'une propriété relative.

Les corps solides perdent leur élasticité quand la pression est trop prolongée, ou quand elle est souvent répétée, comme quand elle est trop forte. Un ressort chargé d'un poids finit par ne plus se débander au bout d'un temps plus ou moins long, selon sa force. La gomme élastique ou *caoutchouc*, le plus élastique des corps solides, se déforme sous une forte pression ou par la chaleur.

Quand les corps solides ont la forme des cubes ou de sphères, leur élasticité, moins apparente que quand ils sont en lames, n'en existe pas moins. Une boule d'ivoire enduite d'huile, tombant d'une certaine hauteur sur une table de marbre, y laisse une tache plus ou moins large qui prouve qu'elle s'est aplatie ; elle rejaillit ensuite plus ou moins haut par l'effet du débandement de son ressort. Une boule d'ivoire est plus élastique qu'une boule de plomb, parce

qu'elle rejaillit à une plus grande hauteur et qu'elle reprend sa première forme, ce que ne fait pas cette dernière. Une bande d'acier circulaire, comprimée dans un sens et abandonnée ensuite à elle-même, s'élargit bientôt en sens contraire et fait une suite d'oscillations autour de sa forme primitive. Il en est de même de la bille d'ivoire et de tous les corps élastiques qui ont été choqués. Ces oscillations, plus ou moins sensibles, se nomment *vibrations*.

Les corps solides pouvant perdre leur élasticité, il importe de ne point les soumettre à des tractions ou des tensions qui dépassent certaines limites. L'expérience apprend que, sous un effort de 6 kilogr. par millimètre carré de section transversale, une barre de fer commence à perdre son élasticité, et qu'elle se sépare ou se rompt sous une pression d'environ 35 kilogr. Il en est de même de tous les corps : ils perdent leur élasticité sous un effort égal au cinquième ou au sixième environ de celui qui occasionne leur rupture. Ainsi, le fer, la fonte, le bois, qui se rompent sous des efforts de 35, de 18, de 9 kilogr. par millimètre carré, perdent leur élasticité sous des efforts d'environ 6 kilogr., 2 $\frac{1}{2}$ kilogr., etc. Par exemple, un barreau de fer d'un centimètre (10 millimètres) de côté, ayant 100 millimètres carrés de section, supportera 600 kilogr. avant de perdre son élasticité, quoiqu'il ne se rompe réellement que sous un effort cinq à six fois plus grand.

6. *Dilatabilité.* — La dilatabilité est la propriété qu'ont les corps d'augmenter de volume quand on les chauffe, d'en diminuer quand on les refroidit, de reprendre leur volume primitif quand on les ramène au même degré de chaleur.

Les gaz sont de tous les corps ceux qui se dilatent le plus, leur volume se dilate de 0,00375 par chaque degré de température centigrade. On trouve la dilatabilité de l'air (fig. 1) au moyen du *thermoscope* de Rumfort. Cet instrument consiste dans deux boules de verre communiquant entre elles par un tube horizontal, dont le milieu est occupé par une goutte d'esprit de vin coloré. La chaleur de la main suffit pour dilater l'air de la boule dont on l'approche; ce qui refoule la bulle d'esprit de vin vers l'autre boule. En éloignant la main, le volume d'air diminue et la bulle revient à sa place primitive.

L'eau, les liquides sont aussi dilatables par la chaleur. C'est ce que démontre le thermomètre, instrument connu de tout le monde.

On gradue l'échelle du thermomètre en observant la hauteur du liquide qu'il renferme, quand on plonge l'instrument dans l'eau bouillante et dans la glace fondante, deux degrés de chaleur qui sont constants et faciles à reproduire. L'espace compris entre ces deux positions extrêmes du liquide est divisé en cent parties dont chacune indique les degrés intermédiaires. Certains thermomètres sont divisés en quatre-vingts parties égales ; c'est celui de Réaumur. Le premier se nomme *centigrade*.

Les corps solides se dilatent beaucoup moins que les liquides et les gaz ; leur dilatation est cependant rendue sensible en augmentant suffisamment l'une de leurs dimensions. Une barre de métal (fig. 2), ajustée d'abord entre deux talons, n'y peut plus entrer quand on l'a chauffée.

Dans ces phénomènes le *calorique* ou la chaleur se comporte à l'égard des corps comme les liquides qui en pénètrent les pores et les font gonfler. Quand on frappe violemment du fer, la chaleur devient perceptible sur la partie choquée. En comprimant l'air dans un briquet pneumatique, on soutire assez de chaleur pour y enflammer de l'amadou.

La propriété qu'ont tous les corps de changer de volume apparent par les diverses causes ci-dessus prouve évidemment que leurs molécules sont séparées entre elles par des intervalles plus ou moins grands. Elles se comportent comme si elles étaient maintenues et séparées par de petits ressorts qui résisteraient à la *pression* aussi bien qu'à la *traction*. On suppose que le calorique est la cause de la répulsion, et l'attraction celle qui s'oppose à la séparation.

La propriété qu'ont en particulier les métaux de changer de volume par la chaleur et par la traction ou la compression a été mise à profit dans les arts. C'est ainsi que M. Molard est parvenu à mettre dans leur aplomb les murs du Conservatoire des arts et métiers de Paris; que l'on a consolidé la coupole de Saint-Pierre de Rome d'un cercle de fer. C'est ainsi qu'on unit les jantes d'une roue de voiture, et qu'on frette une roue de corps, etc.

En se rappelant la dilatabilité des métaux, on évitera une foule de fautes dans les constructions ; on laissera la liberté convenable aux barres scellées à leurs extrémités.

Résultats d'expériences de 0° à 100° (*centigrades*).—Une barre d'acier de 1 mètre de longueur, s'allonge de 0m,00124 ; de fer, de 0m,00122; de cuivre rouge, de 0m,00171 ; de cuivre jaune, de

0m,00186. L'allongement est à peu près constant d'un degré à l'autre.

Altérations sur les pièces des machines.—On vient de voir combien de causes peuvent faire varier l'état ou la forme des corps, et qu'il n'en est point que l'on puisse regarder comme parfaitement solides ou *rigides*. Mais on peut négliger leur influence dans la plupart des machines qui ne sont pas très-délicates. Les chocs seuls produisent des changements de forme dont il faut constamment tenir compte, et sur lesquels nous reviendrons plus tard.

II.

NOTIONS SUR L'ESPACE, LE TEMPS, LE MOUVEMENT, LA VITESSE ET LA FORCE.

7. *Espace.* — L'*espace* est l'étendue indéfinie, sans bornes, qui contient tous les corps.

8. *Temps.* — On conçoit un temps plus long ou plus court qu'un temps donné : le temps est donc une grandeur comme celle des lignes, des aires, etc.

Mesure du temps. — Pour mesurer un temps quelconque, il ne s'agit que d'obtenir des temps égaux, et qui se succèdent sans discontinuité. Pour tomber d'une certaine hauteur sur un plan de niveau, un même corps emploie toujours le même temps ; il en est de même pour des corps égaux tombant de la même hauteur. Supposez qu'aussitôt que le corps est arrivé sur le plan, un autre corps égal soit lâché du même point, et successivement un troisième, etc., vous aurez une suite de temps égaux, et leur somme sera le temps total. En représentant par 1 l'un des temps élémentaires, vous pourrez exprimer un temps quelconque par un nombre ; en y joignant le nom du temps élémentaire vous aurez l'expression complète du temps.

Instrument pour mesurer le temps.—La *clepsydre* des anciens donne un moyen plus commode d'obtenir des temps égaux ou d'égale durée. Les pendules, les horloges et les montres d'aujourd'hui en usage sont des instruments plus précis encore.

Division du temps. — La fraction la plus petite du temps que donnent les pendules et les montres ordinaires est la *seconde*. 60 secondes ou 60″ font une minute ou 1′; 60′ font une heure ou 1ʰ; 24ʰ font un jour; enfin l'année complète, entre deux retours successifs du soleil dans la même position, est de 365ʲ 5ʰ 48′ 48″, ou 31 556 928″. M. Breguet est parvenu à faire des montres qui ne varient pas d'une demi-seconde dans une année; certaines montres, appelées *chronomètres*, donnent jusqu'aux dixièmes de seconde.

Ainsi nous pouvons compter le nombre d'heures, de minutes, de secondes, etc., écoulées entre deux instants quelconques, avec autant de précision et de facilité que nous comptons le nombre de mètres, décimètres, etc., contenus dans une distance. Nous pouvons même représenter le temps par des lignes (fig. 3), en portant sur une droite et à partir d'un même point, autant de distances égales qu'il y a d'unités de temps dans chacun d'eux. (Voyez, dans la figure 3, l'exemple d'une échelle dont les parties égales représenteraient des secondes.)

9. *Repos.* — Un corps est en *repos* quand il reste au même lieu de l'espace : il n'est peut-être aucun corps qui soit absolument en repos; notre terre étant sans cesse en mouvement autour du soleil, rien n'y possède un repos absolu. Le repos n'est donc que *relatif :* un corps est en repos pour nous quand il conserve la même position par rapport à ceux que nous regardons comme fixes. Un corps qui reste à la même place dans un bateau est en repos, par rapport à ce bateau, quoiqu'il soit réellement en mouvement par rapport aux *rives*.

10. *Mouvement.* — Un corps est en *mouvement* quand il occupe successivement diverses positions dans l'espace; le mouvement n'est que relatif comme le repos. Un corps est en mouvement pour nous quand il change de place par rapport à ceux que nous considérons comme fixes.

Le mouvement est essentiellement *continu*, c'est-à-dire qu'un corps ne peut arriver d'une position dans une autre sans avoir passé par une série de positions intermédiaires. Ainsi le mouvement d'un point décrit une ligne nécessairement continue. Quand on parle du chemin décrit par un corps, on entend essentiellement celui d'un certain point lié à ce corps et dont la position indique celle du

corps. Par exemple, pour une boule sphérique ce sera le centre, etc.

11. *Diverses espèces de mouvements.* — Le mouvement d'un point est dit *rectiligne* ou *curviligne*, selon que le chemin décrit est une *droite* ou une *courbe*. Quand le mouvement est curviligne on peut le considérer comme ayant lieu sur un polygone rectiligne dont les côtés très-petits se confondraient insensiblement avec la *courbe*. Les côtés successivement décrits et prolongés indéfiniment, qui sont réellement des tangentes à la courbe, indiquent les *directions* correspondantes du mouvement.

Concevons que le temps total employé par un point pour parvenir d'une position à une autre, soit divisé en un certain nombre de parties égales très-petites (par exemple en centièmes de secondes). Cela posé, si les portions du chemin successivement décrites dans ces diverses parties de temps sont égales entre elles, le mouvement sera *régulier, uniforme*. S'il en est autrement, le mouvement sera *varié*. Il sera *accéléré* si les petits chemins décrits sont de plus en plus grands; *retardé* si au contraire ces chemins sont de plus en plus courts. L'aiguille des secondes d'une horloge, le cours régulier des eaux, etc., offrent l'exemple de mouvements uniformes, parce que des espaces égaux sont décrits à chaque instant dans des temps égaux. Un corps qui tombe verticalement offre l'exemple du mouvement accéléré; un corps qui s'élève aussi verticalement, celui du mouvement retardé. Dans le premier, le corps part avec un mouvement nul; dans le second, son mouvement finit par s'éteindre.

12. *Notions sur la vitesse.* — Dans tous ces cas, la rapidité ou la lenteur du mouvement est indiquée pour chacun des instants égaux très-petits, par la longueur plus ou moins grande de l'espace ou du chemin décrit pendant cet instant : cette longueur mesure l'intensité de la *vitesse* à ce même instant. Ainsi la vitesse est constante dans le mouvement uniforme; elle est accélérée ou retardée dans le mouvement accéléré ou retardé.

13. *Mouvement uniforme.* — Dans ce mouvement, le plus simple de tous, les petits espaces décrits dans les instants successifs étant égaux, il est clair que le chemin décrit dans un temps quelconque se composera d'autant de parties égales d'espace qu'il y a de parties égales dans ce temps. Ainsi, dans le mouvement uniforme, des

espaces égaux sont décrits dans des *temps égaux*, quelle que soit leur petitesse ou leur grandeur ; les espaces *croissent* comme les temps, dans le rapport des temps, ou sont *proportionnels* aux temps employés à les décrire. Enfin, le rapport de chaque espace au temps employé à le décrire reste constant. Toutes ces expressions reviennent au même d'après les propriétés connues des proportions. E étant le nombre d'espaces décrit pendant le temps T, e celui qui est décrit pendant le temps t, on a, d'après ce qui précède,

$$E : e :: T : t, \quad \text{ou} \quad E : T :: e : t,$$

$$\text{ou } \frac{E}{T} = \frac{e}{t}, \text{ rapport constant.}$$

14. *Mesure de la vitesse uniforme.* — Puisque dans le mouvement uniforme les espaces sont proportionnels aux temps employés à les décrire, la vitesse peut être indiquée par l'espace décrit durant un temps quelconque, par exemple, l'unité de temps. Ainsi, on dira, la vitesse est de 2^m par seconde, ou de 60 fois 2^m, ou de 120^m par minute, ou de $\frac{2^m}{10} = 0^m,2$ par dixième de seconde, etc. Cela revient au même, puisqu'ici le rapport de l'espace au temps ne change pas. Quand on sait qu'un mobile a décrit uniformément un certain espace dans un certain nombre d'unités de temps, de secondes par exemple, on trouve la vitesse, c'est-à-dire, le chemin dans l'unité de temps, en partageant l'espace en autant de parties égales qu'il y a d'unités de temps, ou en *divisant* l'espace par le temps. *Exemple :* L'espace décrit uniformément pendant 1′ 5″, ou 65″, étant 260^m, la vitesse ou l'espace décrit pendant 1″ est de $\frac{260}{65}$ ou 4^m. Réciproquement, si l'on multiplie la vitesse par le nombre d'unités, le produit donnera l'espace décrit pendant ce temps.

15. *Mouvement périodique, régulier.* — Il arrive quelquefois dans la pratique que la vitesse n'est pas tout à fait constante, ou la même à chaque instant, quoique les espaces décrits au bout de certains temps égaux soient égaux. Tels sont en particulier tous les mouvements de va-et-vient (alternatifs) dont les diverses périodes s'exécutent régulièrement dans le même temps, bien que la vitesse varie continuellement dans chaque intervalle. Tel est le mouvement d'une voiture, d'un piéton qui décrivent constamment le même

chemin dans chaque heure, chaque quart d'heure, et dont le mouvement tantôt accéléré, tantôt retardé, varie à chaque instant.

16. *Représentation des divers mouvements par la géométrie ou par le dessin.* — Supposons que nous ayons une table à deux colonnes, qui pour un certain mouvement donne les espaces ou chemins décrits au bout de chaque temps écoulé; prenons une certaine longueur (1 millimètre, 1 centimètre, etc.), pour représenter l'unité de temps (la seconde par exemple), et une autre longueur (1 centimètre, 1 décimètre, etc.) pour représenter l'unité de chemin (le mètre). Cela posé, traçons une droite indéfinie OB (fig. 4), et portons sur cette droite, à partir d'un même point O, une distance Ot_4 représentant un des temps indiqués à la table; sur la perpendiculaire en t_4 à la droite OB, portons t_4e_4, représentant le chemin parcouru pendant le temps Ot_4. Faisons de même pour les autres temps et les autres chemins, on obtiendra une suite de points e_1, e_2, e_3, ... qui réunis deux à deux par des droites vont donner le polygone $e_1 e_2 e_3$.... Ce polygone finira par se confondre avec une courbe véritable si l'on multiplie convenablement les points, ou si l'on prend dans la table des temps suffisamment rapprochés les uns des autres. Ot_1, Ot_2,.... sont les abscisses de la courbe, O est l'origine de ces abscisses et OB l'axe. t_1e_1, t_2e_2,.... sont les ordonnées. Il est clair qu'au moyen du tracé de la courbe on pourra obtenir, comme par la table, le chemin décrit pour chaque temps donné, en sorte que cette courbe en tiendra lieu pour représenter la *loi*, la *relation* entre les temps et les chemins, quel que soit le mouvement.

Dans le mouvement uniforme les espaces croissent comme les temps; ainsi les ordonnées e_1t_1, e_2t_2.... (fig. 5) y sont proportionnellement aux abscisses Ot_1, Ot_2, ... et partant tels que $e_1e_2e_3$...., qui donne la loi du mouvement, est une ligne droite (*voyez* les *Leçons de géométrie*). Supposez qu'on partage l'axe OB des abscisses ou des temps, en un grand nombre de parties égales très-petites; puis, qu'on ait élevé les ordonnées correspondantes, et qu'enfin on ait mené par l'extrémité de chaque ordonnée des parallèles à l'axe des abscisses, on formera une suite de petits triangles égaux et rectangles (par exemple, $e_2e_4b_4$) semblables aux triangles Ot_1e_1, Ot_4e_4, ... et dont les côtés seront proportionnels à ceux de ces derniers. Observant donc que les hauteurs e_4b_4, ...

de ces petits triangles mesurent les espaces décrits pendant les temps élémentaires e_3b_4 ou t_3t_4, on pourra répéter au moyen de la figure tout ce qui a été dit ci-dessus sur les propriétés du mouvement uniforme. Ainsi la vitesse ou l'espace décrit dans chacun des instants égaux t_1t_2, t_2t_3, ... est constante et peut être donnée par l'espace quelconque e_3t_3, par exemple, qui serait décrit dans un certain temps Ot_3 pris pour unité.

Dans le *mouvement varié* les espaces n'étant plus proportionnels aux temps, la ligne $e_1e_2e_3$ (fig. 6) n'est plus droite; les petits espaces e_1b_2, e_2b_3, ... décrits dans les temps élémentaires t_1t_2, t_2t_3, ... sont inégaux; par conséquent la vitesse varie à chaque instant. Pour le cas de la figure, le mouvement ou la vitesse est accéléré, parce que les espaces e_2b_2, e_3b_3, ... vont en croissant. Supposons qu'à l'instant qui répond au point e_3, le mouvement cesse d'être accéléré, et se continue uniformément avec la vitesse qui a lieu en cet instant, le reste du mouvement, au lieu d'être représenté par une courbe, le sera par une droite indéfinie e_3m, prolongement de e_2e_4, et puisqu'à l'instant qu'on considère, le mobile parcourait l'espace e_4b_4 dans le temps élémentaire e_3b_4 ou t_3t_4, on voit qu'en vertu du mouvement uniforme il parcourra dans l'unité de temps un espace qu'on obtiendra en cherchant l'ordonnée mn, qui, pour la droite e_3m, correspond à l'unité de temps e_3n; cet espace, d'après ce que nous avons vu, n'est autre chose que la vitesse à l'instant qu'on considère. Or, si nous supposons que l'élément de temps t_3t_4 est assez petit pour que la droite e_3e_4 puisse être censée confondue avec la courbe, la droite indéfinie e_3m deviendra précisément la tangente en e_3 à cette courbe; cette tangente se construira géométriquement ou par le tâtonnement, et son inclinaison sur la parallèle e_3n à l'axe des abscisses donnera, comme nous venons de le dire, la vitesse ou le chemin mn qui serait décrit dans l'unité de temps e_3n, si *le mouvement devenait tout à coup uniforme*. On voit par là que si l'on connaît pour chaque instant infiniment petit $t_3t_4 = e_3b_4$ l'espace correspondant e_4b_4, on aurait la vitesse dont il s'agit au moyen de la proportion

$$e_4b_4 \;:\; e_3b_4 \;::\; mn \;:\; e_3n \quad \text{ou } 1;$$

d'où l'on tire

$$mn \text{ ou la vitesse} = \frac{e_4b_4}{e_3b_4} = \frac{e_4b_4}{t_3t_4}.$$

Enfin, on voit que le mouvement *périodique* tel qu'il a été défini ci-dessus sera représenté par une courbe $EE_1E_2E_3$ sinueuse (fig. 7) dont les ondulations se font régulièrement autour d'une droite $ee_1e_2e_3$ qui en représente le mouvement uniforme moyen.

Il est sans doute inutile de remarquer que les courbes précédentes donnent la loi qui lie les espaces aux temps et ne doivent pas être confondues avec les lignes ou chemins mêmes parcourus par les mobiles. Dans ces dernières les tangentes donnent simplement la direction du mouvement ou de la vitesse pour chaque instant, et d'après ce qui précède, c'est le petit espace décrit sur la courbe du mobile. Cet espace étant divisé par le temps élémentaire employé à le décrire, donne pour quotient ce que nous avons nommé la *vitesse*.

17. *Inertie.*— La matière est inanimée ou *inerte;* elle ne peut se donner du mouvement par elle-même, ni changer celui qu'elle a reçu. Un corps en repos y persévère, à moins qu'une cause telle que la pesanteur, un moteur animé ne l'en fasse sortir. S'il a été mis en mouvement et dans une certaine direction *ab* (fig. 7 *bis*), il continuera à se mouvoir de *b* en *c* sur le prolongement de la droite *ab* : car, arrivé en *b*, il n'y a pas de raison pour qu'il se dirige au-dessus ou au-dessous de *ab*, à moins qu'une cause ne le fasse dévier de sa route. Pareillement, s'il y a une certaine vitesse de *a* en *b*, il conservera cette vitesse si une cause étrangère ne vienne accélérer ou ralentir son mouvement ou sa vitesse. Si nous voyons la bille lancée sur un billard ralentir sans cesse sa vitesse, cela tient à la résistance du tapis et de l'air; si nous voyons un corps lancé verticalement de haut en bas accélérer sans cesse son mouvement, cela tient à l'action de la pesanteur qui agit continuellement sur ce corps comme s'il était au repos; c'est tellement vrai qu'en diminuant les obstacles qui s'opposent au mouvement de la bille, elle y persévère plus longtemps, et qu'en lançant un corps de bas en haut sa vitesse diminue au lieu d'augmenter. Enfin, si la direction d'une bombe ou d'une pierre lancée obliquement change à chaque instant, c'est encore parce que la pesanteur tend sans cesse à ramener cette bombe ou cette pierre vers la terre.

Il résulte de là qu'en vertu de l'*inertie*, un corps qui se meut actuellement avec une certaine vitesse et dans une certaine direction, conserverait éternellement cette direction et cette vitesse, et que

le mouvement serait entièrement rectiligne et uniforme, si rien ne venait à le déranger; qu'enfin, si par une cause quelconque, le corps est forcé de décrire une courbe *ABC* (fig. 8), cette même inertie (la cause venant tout à coup à cesser à un certain instant) lui ferait décrire la tangente au point correspondant *B* de la courbe et conserver la vitesse qu'il possédait en ce point.

18. *Forces.*— On appelle *forces* les causes qui modifient l'état actuel des corps ou qui le modifieraient si d'autres forces ne venaient détruire l'effet des premières. La pesanteur, la résistance de l'air, le calorique sont des forces puisqu'elles peuvent changer l'état des corps. Un corps posé sur une table ou suspendu à un fil se mouvrait par l'action de la pesanteur, si la table ou le point de suspension se détruisait continuellement l'effort de cette pesanteur.

19. *Divers effets des forces.* — Les forces produisent des effets variés : tantôt elles laissent les corps en repos, en se détruisant les unes les autres; tantôt elles changent la forme des corps, elles les rompent; tantôt elles leur impriment du mouvement, elles accélèrent ou retardent celui qu'ils possèdent, ou en changent la direction; tantôt enfin ces changements s'opèrent avec lenteur ou brusquement; mais dans le fait, c'est toujours dans un temps fini et par degrés continus. Si nous voyons quelquefois des corps changer brusquement d'état, de direction ou d'intensité de mouvement, c'est que la force, alors très-grande, produit son effet dans un temps dont la durée est seulement inappréciable à nos moyens de mesurer le temps; en un mot, il faut un temps fini pour qu'une force imprime le mouvement à un corps. La balle d'un fusil traverse un carreau, une porte, une feuille de papier librement suspendue, avec une rapidité telle que les parties enlevées n'ont pas le temps de propager le mouvement dans toute l'étendue de ces corps. Un canon (fig. 9) en équilibre à l'extrémité d'une corde verticale porte le boulet au même but que s'il était sur son affût; ce qui prouve que la pièce n'avait point dévié d'une manière appréciable avant l'instant où le boulet est sorti de la pièce, bien qu'ensuite elle ait pris un mouvement de recul très-sensible. Nous examinerons dans ce qui va suivre comment le mouvement se propage de proche en proche dans toute l'étendue des corps d'une manière continue.

Les forces qui donnent le mouvement aux corps s'appellent forces

motrices : elles sont *accélératrices* quand elles accélèrent à chaque instant le mouvement; elles sont *retardatrices* quand elles le retardent.

20. *Nature des forces et leur mesure.*—Nous avons par nous-mêmes une idée exacte du mode d'agir de la force. Quand nous poussons ou tirons un corps, qu'il soit libre ou ne le soit pas, nous éprouvons une sensation qui se nomme *pression, traction,* ou en général *effort.* Cet effort est absolument analogue à celui que nous exerçons en soutenant un poids. Ainsi les forces sont pour nous de véritables pressions. La pression peut être plus forte ou plus faible : c'est donc une *grandeur.* Il ne s'agit que de l'exprimer en nombres, en prenant une pression quelconque *pour unité;* ce qui n'est pas difficile si nous pouvons trouver des pressions égales, comme nous avons trouvé des temps égaux.

Deux forces sont égales quand, substituées l'une à l'autre, et dans les mêmes circonstances, elles produisent le même effet, ou en détruisent une troisième qui leur est opposée.

Suspendons un corps à l'extrémité *AB* d'un fil; en vertu de la pesanteur, ce fil prendra la direction de l'aplomb et il faudra un effort pour le soutenir : si deux forces appliquées successivement à ce fil, et de la même manière, maintiennent ce poids en repos, ces forces seront nécessairement égales entre elles et au poids du corps : une force double, triple (fig. 10), supportera deux, trois corps semblables au premier, pendus les uns au-dessous des autres avec le même fil; prenant l'une de ces forces, par exemple, celle qui supporte un centimètre cube d'eau distillée, dont le poids s'appelle *gramme,* pour unité, une force quelconque sera exprimée par le nombre qui indique combien de grammes elle pourra supporter. On sait que 1000 grammes font un kilogramme, deux livres, du nouveau système adopté légalement en France. C'est au kilogramme que nous comparerons désormais toutes les forces de pression, de traction, de compression, etc.

21. *Moyen direct de mesurer les forces.*— Les poids se mesurent et se comparent entre eux au moyen d'instruments qu'on nomme balances, et dont nous parlerons plus tard. D'après la définition ci-dessus des forces égales, il est facile de trouver le poids d'un corps, quelles que soient la justesse et la composition d'un tel in-

trument. Il suffit de s'assurer que ce corps substitué, dans les mêmes circonstances, à un certain nombre de poids étalons, produit le même effet sur la balance, pour affirmer que le poids du corps est égal à celui des étalons. Sous ce rapport tous les appareils quelconques peuvent être employés à mesurer le poids des corps, et par suite les forces.

Les ressorts, entre autres, en supposant qu'ils conservent longtemps leur élasticité, peuvent servir et servent en effet à cet usage dans la pratique. Tels sont le ressort nommé *peson* (fig. 11), que tout le monde connaît; le *dynamomètre* de Régnier, sur lequel nous reviendrons plus tard, et dont la grandeur de flexion, indiquée par une aiguille sur un limbe divisé, sert à donner les poids. En se servant des balances à ressort, il faudra vérifier préalablement l'exactitude de leurs divisions avec des poids étalons, et changer la valeur de cette graduation si l'élasticité se trouvait altérée depuis l'instant de la fabrication.

22. *Remarque sur la pesanteur.* — On sait que l'action de la pesanteur diminue à mesure que l'on s'élève au-dessus de la surface de la terre. Par conséquent, le même corps qui, à la surface de la terre, faisait par son poids fléchir le ressort jusqu'à un certain degré, le fera fléchir un peu moins lorsqu'on le pèsera au haut d'une montagne. Ainsi son poids *absolu*, ou la force qui soutiendrait le corps pendu à un fil, aurait diminué. Mais cette diminution, même pour la hauteur d'une lieue, ne surpasse guère $\frac{1}{750}$ du poids total. L'expérience apprend aussi que l'action de la pesanteur diminue à mesure qu'on s'approche de l'équateur; mais pour un pays comme la France, cette diminution est à peine sensible. Enfin on sait que les directions du fil à plomb ne sont point rigoureusement parallèles d'un lieu à l'autre, puisqu'elles convergent au centre de la terre, à l'extrémité de rayons d'environ 1500 lieues. Ces directions pour une distance de 200^m ne forment pas un angle de $6'' \frac{1}{2}$, inappréciable pour nos instruments ordinaires. Il suit de là que nous pourrons considérer la pesanteur comme une force tout à fait constante, et invariable de direction dans l'étendue ordinaire de nos travaux industriels.

III.

MODE D'ACTION DES FORCES. — ÉQUILIBRE. — TRAVAIL. — MÉCANIQUE.

23. ***Manière dont les forces extérieures aux corps exercent leur action.***—Quand une force agit extérieurement à un corps et contre un point de sa surface, elle exerce une pression qui refoule les molécules les plus près de ce point; le corps *plie, fléchit, se comprime, se déprime;* les molécules se trouvant plus rapprochées au contact, font effort pour retourner à leur place, en vertu de l'élasticité plus ou moins grande qui appartient à toutes les substances; elles refoulent aussi les molécules les plus éloignées jusqu'à l'autre extrémité du corps. Si cette extrémité est fixe, ou arrêtée par un obstacle, le résultat sera une compression, une déformation, dans toute l'étendue du corps. Si au contraire cette extrémité est libre, elle s'avancera, de sorte que le mouvement sera propagé, ou communiqué à toutes les parties du corps, et cela de proche en proche. Ce mouvement intestin, résultat d'une suite de compressions, prouve qu'il faut un certain temps pour que la force ait produit son effet total, et l'absurdité de supposer que la vitesse finie puisse s'engendrer instantanément. Les mêmes choses se passeront si, à l'inverse, la force est employée à détruire le mouvement acquis d'un corps : elle détruira d'abord la vitesse des molécules les plus près au point d'action, puis de proche en proche celles des molécules les plus éloignées, etc.

24. ***La réaction est égale et contraire à l'action.***—Comme les ressorts moléculaires ne peuvent être comprimés sur eux-mêmes sans réagir en sens contraire et avec le même effort, l'*agent* qui presse le corps sera repoussé de la même manière qu'il pousse : ce qu'on exprime en disant que la *réaction* est égale et contraire à l'*action*. En pressant du doigt un corps, en tirant un corps avec une *ficelle*, en le poussant avec une barre, nous sommes pressés, tirés ou poussés, en sens contraire, avec le même effort. Deux pesons à ressort, placés aux extrémités d'une ficelle ou d'une barre, indiquent le même degré de tension quand une force vient agir par l'intermédiaire de la ficelle ou de la barre.

25. *Une force peut être censée appliquée en un point quelconque de sa direction.* — Dans tous les cas, l'action de la force ne se transmet intacte au point de la résistance que par une suite d'actions ou de réactions égales et contraires, qui se détruisent réciproquement, et que les ressorts moléculaires exercent en chaque point de la droite sur laquelle agissent cette force et cette résistance. C'est en vertu de cette propriété qu'il est permis de supposer que l'action d'une force s'exerce en un point quelconque de sa direction.

26. *Les corps peuvent être regardés comme rigides dans la plupart des circonstances.* — Les corps étant plus ou moins compressibles ou inextensibles, la ficelle ou la barre, imposée ci-dessus entre la puissance et la résistance, s'étend ou se comprime jusqu'à un certain degré, relatif à l'énergie de ces forces; mais, tant que la puissance et la résistance resteront les mêmes, la ficelle ou la barre ne changera plus de longueur : c'est d'après cette considération que nous pourvons regarder la plus grande partie des corps résistants, employés dans les arts pour transmettre l'action des forces, comme parfaitement rigides et inextensibles, d'autant plus qu'on les choisit presque toujours de façon qu'ils fléchissent en réalité très-peu sous l'action de ces forces.

27. *L'inertie de la matière peut se mesurer au moyen des forces.* — Nous venons de voir que lorsqu'une force extérieure agit sur un corps libre pour lui imprimer du mouvement ou pour détruire celui qu'il possède, ce corps réagit ou oppose une résistance égale à la force : c'est cette résistance qui mesure l'inertie de la matière du corps. Il est évident que, pour un même corps, la résistance augmente avec le degré de vitesse imprimée ou détruite ; nous verrons plus tard qu'elle est proportionnelle à cette vitesse et qu'elle augmente aussi avec la quantité de matière renfermée dans chaque corps. Si vous tirez un corps libre avec une ficelle, cette ficelle s'étend, s'allonge, et peut même se rompre quand elle est tirée brusquement, et cela d'autant plus que le corps est plus massif ou pesant. Si vous suspendez un corps à l'extrémité d'une ficelle verticale et que vous placiez un peson à ressort dans la ligne de *traction ou tirage*, le ressort indiquera le poids du corps dans le cas du repos; mais si l'on soulève le corps avec une certaine vitesse, le ressort se pliera davantage par suite de la résistance opposée par l'inertie de

la matière. Le mouvement une fois acquis et devenant régulier, uniforme, le ressort reprend et conserve constamment l'etat de tension qu'il avait dans le cas du repos, attendu que la vitesse n'est plus alors altérée. Si, au contraire, la vitesse vient à diminuer, le ressort se débande, et indique une pression moindre que le poids du corps. Les oscillations du ressort peuvent donc servir à mesurer les variations du mouvement et l'énergie de la force d'inertie qui agit contre ou avec la puissance, selon que la vitesse accélère ou diminue.

28. *Choses à distinguer dans les forces.*—Il faut distinguer dans une force : 1° son *point d'application*, c'est-à-dire le point où elle agit immédiatement ; 2° sa *direction indéfinie* ou la droite que décrirait le point d'application, s'il obéissait librement à la force ; 3° le *sens de son action* (à gauche ou à droite, en avant ou en arrière du point d'application) ; 4° son *intensité absolue*, mesurable en poids en kilogrammes.

29. *Représentation des forces par le dessin.* — Soit A (fig. 12) le point d'application d'une force sur la droite AB indéfinie ; portons de A en P, dans le sens de son action, un nombre d'unités de longueur (millimètres, centimètres, etc.), égal au nombre de kilogrammes qui exprime l'intensité de la force : il est évident que cette force sera complétement représentée. Ordinairement on exprime le sens de l'action au moyen d'une flèche, et l'intensité de la force par une lettre telle que P, afin d'abréger. Ainsi, on dit une force P ou AP, une force Q ou BQ, comme on dirait une force de 10 kilogr., de 15 kilogr., etc.; de cette manière l'étude de la mécanique est ramenée à celle de certaines figures de géométrie.

30. *Définition de l'équilibre des forces.* — Si des forces, appliquées à un corps quelconque, se balancent ou se détruisent réciproquement, de façon qu'elles laissent le corps dans le même état qu'avant leur application ; c'est-à-dire si elles le laissent en repos, lorsqu'il est en repos, ou si elles ne modifient ni la direction, ni l'intensité de sa vitesse lorsqu'il est en mouvement, on dit qu'il y a équilibre entre ces forces. L'équilibre est *statique* dans le premier de ces cas, et *dynamique* dans le second. Deux hommes tirant avec la même force aux extrémités d'une corde, il y a équilibre statique s'ils sont en repos, et dynamique si l'un entraîne l'autre dans son mouve-

nel. Dans la réalité, il n'y a point d'équilibre statique absolu, puisque la terre entraîne tous les corps dans son mouvement, comme un bateau entraîne avec lui tous les corps qui y sont placés, etc. Au reste, la distinction serait inutile, si la notion ordinairement admise pour l'équilibre n'entraînait l'idée du repos qui n'y est point indispensable.

31. *Influence de l'inertie sur l'état d'équilibre.* — Lorsqu'un corps soumis à l'action de plusieurs forces extérieures conserve un mouvement uniforme malgré ces forces, ces dernières se font nécessairement équilibre d'après les définitions ci-dessus : quand la vitesse augmente ou diminue, l'équilibre n'a plus lieu en ces forces, mais si l'on a égard à la force d'inertie des diverses molécules matérielles, et qu'on introduise parmi les premières forces une force extérieure égale à celle-là et capable d'empêcher la modification survenue dans le mouvement, il y aura encore équilibre entre toutes ces forces d'après les définitions ci-dessus. Un cheval qui tire une voiture, le long d'une route, détruit à chaque instant toutes les résistances qui s'opposent à son action : si le mouvement est constamment uniforme, ces résistances proviennent simplement du terrain, des divers frottements, etc. Si la vitesse augmente à chaque instant, l'inertie mise en action s'ajoute aux résistances précédentes, et le cheval fait équilibre à la fois à toutes ces forces ; au contraire, si la vitesse vient à diminuer, l'inertie, qui tend à faire persévérer la voiture dans son état de mouvement, ajoutera son action à celle du cheval, pour détruire toutes les autres résistances ou les maintenir en équilibre.

32. *Résultantes et composantes.* — Quand il y a équilibre entre plusieurs forces O, P, Q, l'une quelconque d'entre elles, O ou CO, peut être considérée comme détruisant l'effet de toutes les autres. Si donc l'on conçoit une force R ou CR (fig. 13) égale et directement opposée au même point d'application C, comme elle détruira à elle seule la force O dont il s'agit, elle produira le même effet sur le corps que les forces P, Q prises ensemble, c'est pour cette raison qu'on la nomme *résultante* des forces P, Q, et ces forces elles-mêmes les *composantes* de R.

Réciproquement, si à la résultante R de plusieurs forces $P, Q, \ldots$ on oppose une force O égale et contraire, il y aura équilibre entre cette force et toutes celles-là, P, Q, ...

23. *Équilibre et résultante des forces agissant sur la même droite.* — Lorsque plusieurs forces agissent suivant la même droite et dans le même sens, leur effet équivaut évidemment à celui d'une force unique égale à leur *somme* et qui en est la *résultante*, une force égale et contraire détruirait toutes celles-là ou les maintiendrait en équilibre. Si plusieurs forces agissent suivant la même droite, mais dans des sens opposés, leur résultante sera une force unique égale à l'*excès* de la somme des forces qui agissent dans un sens sur celle des forces qui agissent dans l'autre, et elle agira dans le sens de la plus grande somme : car lorsque deux forces sont opposées directement, la plus petite détruit dans la plus grande une portion égale à elle-même. Trois hommes tirant dans le même sens une corde avec des forces de 10, 17, 25 kilogr., (total 52 kilogr.), et deux autres tirant cette corde en sens contraire, avec des forces de 12 et 19 kilogr. (total 31 kilogr.), la corde sera réellement sollicitée comme elle le serait avec une force unique de 52 — 31 ou 21 kilogr., agissant dans le sens des premiers hommes.

24. *Définition et examen du travail mécanique des forces.* — Le cas le plus simple de l'équilibre est celui où deux forces égales et contraires se détruisent mutuellement, c'est à cela que se réduit l'emploi des forces motrices dans les travaux industriels. *Travailler*, c'est vaincre ou détruire, pour le besoin des arts, des résistances telles que la force d'adhésion des molécules des corps, la force des ressorts, celle de la pesanteur, l'inertie de la matière, etc. User, polir un corps par le frottement, le diviser en parties, élever des fardeaux, traîner une voiture le long d'un chemin, bander un ressort, lancer des pierres, des boulets, etc., c'est *travailler*, c'est vaincre continuellement des résistances sans cesse renouvelées.

Le travail mécanique ne suppose pas seulement une résistance vaincue, mais une résistance reproduite le long d'un chemin parcouru par le point où s'exerce cette résistance et dans sa propre direction. Pour enlever une parcelle de matière d'un corps avec un outil, par exemple, non-seulement il faut un effet directement opposé à la résistance présentée par cette parcelle, mais encore il faut faire avancer le point d'action de l'outil dans la direction de la résistance. Plus cet avancement sera grand, plus la parcelle enlevée aura de longueur ; d'un autre côté, plus sera grande la largeur ou l'épaisseur de cette parcelle, plus la résistance ou l'effort sera con-

sidérable. L'ouvrage fait à chaque instant croît donc avec l'intensité de l'effort et la longueur du chemin décrit dans sa direction. Un raisonnement analogue est applicable à tous les travaux industriels.

35. ***Mesure du travail quand la résistance est constante.***—Supposons que la résistance soit *constante* ainsi que l'effort qui lui est égal et directement opposé, c'est-à-dire qu'elle reste *la même* à chaque instant, il est clair que l'ouvrage produit ou le travail sera proportionnel au chemin (double si le chemin est double, triple si le chemin est triple,....); de sorte que, si l'on prend pour unité le travail qui consiste à vaincre la résistance le long d'un chemin de 1 mètre, le travail total sera mesuré par le nombre de mètres ou de fractions de mètre parcourus. Mais si, pour un autre travail, la résistance constante est double, triple,.... de ce qu'elle était dans le premier, à un chemin égal décrit par le point d'action de cette résistance, le travail sera double, triple,.... de ce qu'il était. Si, par exemple, la résistance était de 1 kilogr. dans le premier cas, et qu'elle fut de 2, 3, 4 kilogr. dans le second, le travail pour chaque mètre de distance serait 2, 3, 4 fois celui de 1 kilogr. En prenant donc pour unité de travail celui qui consiste à vaincre la résistance de 1 kilogr. le long de 1 mètre, on voit qu'un travail quelconque dont l'objet est de vaincre une résistance qui reste *constante*, ou *la même*, sera mesuré par le nombre de kilogrammes qui exprime cette résistance répété autant de fois qu'il y a de mètres et de fractions de mètre dans le chemin parcouru par le point d'action de cette résistance, c'est-à-dire, par le produit de ces deux nombres. Supposons un moteur employé à traîner un corps sur un plan horizontal, le travail devra vaincre le frottement constant exercé sur le terrain; supposons que la résistance due à ce frottement soit de $37^k,5$, et que le chemin décrit dans un certain temps soit de 64 mètres, il est clair que si l'on prend pour unité de travail celui qui consiste à vaincre la résistance d'un kilogramme le long d'un mètre de chemin, le travail total sera mesuré par

$$37^k,5 \times 64 = 2400^k$$

parcourant 1^m. En général, on voit que le travail mécanique que nécessite une certaine résistance constante et qui se reproduit le long d'un certain chemin, aura pour mesure le produit de cette

résistance par le chemin que décrit son point d'action, l'unité de travail étant toujours l'unité d'effort, mesuré en poids parcourant l'unité de chemin ou de longueur.

36. *Mesure du travail quand la résistance est variable.* — Si la résistance, ou l'effort égal et opposé qui la détruit, au lieu d'être la même à chaque instant, variait sans cesse comme cela arrive souvent, le travail ne pourrait plus s'évaluer ainsi qu'on vient de le dire; mais, comme pour chacun des espaces très-petits décrits par le point d'action, la résistance peut être censée constante, le travail correspondant devra encore se mesurer par le produit de cette résistance et du petit chemin dont il s'agit. Le travail total se composant de la somme des travaux partiels, sera mesuré également par la somme de tous les petits produits qui leur correspondent.

Traçons sur un plan ou tableau, une courbe $r r_1 r_2 \ldots$ (fig. 14), dont les abscisses Oe_1, Oe_2, Oe_3,.... représentent les chemins successivement décrits par le point d'action de la résistance, et dont les ordonnées Or, e_1r_1, e_2r_2, e_3r_3, ... représentent en lignes les résistances ou efforts correspondants. Supposons que Oe_1, e_1e_2, e_2e_3, ... soient les espaces égaux et très-petits décrits à chaque instant. Les travaux partiels ayant pour mesure les produits de ces petits espaces par les résistances correspondantes censées constantes pour chacun d'eux, c'est-à-dire les produits $Oe_1 \times Or$, $e_1e_2 \times e_1r_1$, $e_2e_3 \times e_2r_2$, ... ces travaux seront représentés par les aires des rectangles $Or\,S_1e_1$, $e_1r_1\,S_2e_2$, ... et le travail total le sera par la surface de tous ces petits rectangles réunis. On voit que cette surface différera d'autant moins de la surface $Or\,r_3\,e_3\,O$, comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les ordonnées qui répondent au commencement et à la fin du travail, que les ordonnées successives seront elles-mêmes plus rapprochées entre elles, de sorte que si l'on multiplie indéfiniment le nombre de ces ordonnées, on pourra prendre la surface $Or\,r_3e_3\,O$ pour la mesure véritable du travail effectué pendant que le point d'action de la résistance décrit l'espace Oe_3 (*).

(*) Pour calculer l'aire comprise entre une courbe, deux de ses ordonnées quelconques et l'axe des abscisses, on partagera sur cet axe, l'intervalle des deux ordonnées en un nombre pair de parties égales très-petites; on mènera par ces points de division

Lors donc que l'on connaîtra par expérience la loi ou la table qui lie la résistance variable aux chemins décrits par son point d'action, toute la question, pour trouver le travail mécanique relatif à un chemin quelconque parcouru, consistera à tracer la courbe de cette loi et à calculer, par petites parties, l'aire de la surface qui répond à cette longueur de chemin. Comme les unités de longueur qui ont servi à construire les ordonnées, représentent des unités d'effort ou de poids d'une certaine espèce, et que les abscisses sont elles-mêmes composées d'unités de longueur, représentant des unités de chemin parcouru, on voit que l'*unité de surface* des rectangles ou de leur somme totale sera réellement l'*unité d'effort* parcourant l'*unité de chemin*.

37. ***Valeur de l'effort moyen.*** **— Lorsqu'on a ainsi trouvé la valeur du travail mécanique d'une résistance variable pour une distance quelconque parcourue par son point d'action, en divisant cette valeur par cette distance, on obtiendra ce qu'on nomme l'*effort moyen* de la résistance, ou l'effort constant qui, étant repété le long du chemin, produirait la même quantité de travail : car nous avons vu que, pour une résistance constante, le travail se mesure par le produit de cette résistance et du chemin total décrit par son point d'application.**

38. ***Divers exemples du travail mécanique et principalement de celui qui consiste à bander un ressort.*** **— Quand un moteur est employé**

---

les ordonnées correspondantes. Cela posé on ajoutera ensemble les ordonnées extrêmes, ou les pressions qu'elles représentent, puis on prendra quatre fois la somme des ordonnées de rang pair, puis deux fois celle des ordonnées de rang impair, en ne comptant pas les ordonnées extrêmes ; enfin ayant ajouté tous ces résultats partiels, on prendra le tiers du total qu'on multipliera par la distance qui représente chaque intervalle des ordonnées. Par exemple, si les pressions ou résistances représentées par les neuf ordonnées équidistantes Or, e_1r_1, ... e_8r_8 sont 20^k, 25^k, 29^k, 32^k, 34^k, 35^k, 36^k, 36^k, 37^k, et que la distance représentée par les intervalles constantes e_1e_2, ... soit de $0^m,04$, on aura la quantité de travail qui répond à la surface $Or\,e_8r_8$, en prenant la somme

$$20^k + 37^k + 4\,(25^k + 32^k + 35^k + 36^k) + 2\,(29^k + 34^k + 36^k)$$
$$= 57^k + 512^k + 198^k = 767^k.$$

Puis, la divisant par 3, on aura $255^k,67$, qui, multiplié par $0^m,04$, produira en résultat $10^k,2268$ parcourant un mètre de chemin, pour la quantité de travail cherché.

à bander un ressort, il développe à chaque instant un effort qui est d'autant plus grand que son point d'action a décrit plus de chemin dans sa direction propre, effort qu'on peut même mesurer, ainsi que nous l'avons vu pour chaque position du ressort, ou pour chaque position du point d'action. On pourra donc, d'après la méthode précédente, trouver la courbe qui donne la loi de ces efforts, et calculer approximativement la somme des travaux mécaniques effectués à chaque instant et qui composent le travail total.

Nous avons pris pour exemple le travail produit par une force qui traîne un corps le long d'un plan de la part duquel il éprouve une résistance constante, et qui bande un ressort dont la résistance varie à chaque instant; mais nos raisonnements s'appliquent à tous les travaux des arts : un cheval tire-t-il après la barre d'un manége? un homme élève-t-il de l'eau du fond d'un puits? un ouvrier est-il employé à scier, à raboter du bois, à limer, à polir un métal? à arrondir un corps sur le tour....? la quantité d'ouvrage fait sera toujours mesurée par le produit de l'effort égal et contraire à la résistance de l'outil, de la matière et du chemin décrit par le point d'action de cette résistance si elle est constante, ou par la somme des produits qui mesurent les travaux partiels, si la résistance est variable.

39. *Réflexions et distinctions relatives au travail mécanique des matières.* — En cherchant à apprécier ainsi le travail mécanique, il faudra avoir soin de ne pas confondre celui que dépense effectivement le moteur avec celui qui résulte immédiatement de l'ouvrage fait, car on conçoit qu'une partie du premier travail peut être détruite par des résistances autres que celles qui proviennent de l'ouvrage. Ce n'est qu'à cette dernière résistance que s'appliquent les considérations précédentes et la mesure du travail; plus tard nous examinerons le mode d'action des forces motrices, les circonstances qui modifient les résultats de cette action, et le déchet que peut éprouver le travail de la force selon les diverses applications.

40. *Complication inhérente à certains travaux industriels.* — Pour montrer la complication réellement inhérente à certains travaux industriels, nous prendrons pour exemple le travail du limeur : il faut 1° qu'il appuie pour faire mordre ou enfoncer la lime; 2° qu'il supporte continuellement le poids de l'outil; 3° qu'il exerce un

effort pour faire glisser la lime le long du corps ; 4° qu'il promène cette lime avec une certaine vitesse en avant et en arrière, et que par conséquent il vainque l'inertie de la matière de cette lime. La quantité d'ouvrage fait est le résultat de ces diverses circonstances; mais on fait disparaître toute cette complication en séparant du résultat du travail tout ce qui n'y est pas indispensable, et en ne considérant que ce qui se passe à l'endroit même où la matière du métal est enlevée par la lime : là on n'aperçoit qu'une résistance qui suppose un effort égal et contraire dans la direction même du chemin que décrit le point d'action de la lime, et dont la quantité de travail se mesure ainsi que nous l'avons dit. Le travail du moteur peut être même réduit à n'être que cela, en supposant la lime mise à plat sur une barre de niveau, chargée d'un certain poids, et que le moteur soit uniquement employé à tirer régulièrement cette lime dans le sens de sa longueur ; encore faudrait-il tenir compte de la résistance opposée par l'inertie de la matière dans les premiers instants.

41. *Ce qu'on doit entendre spécialement par le travail mécanique d'une force.* — En général, quand il sera question désormais du *travail mécanique*, on devra entendre le travail qui résulte immédiatement de l'action simple d'une force sur une résistance qui lui est directement opposée, et qu'elle détruit continuellement en faisant parcourir un certain chemin au point d'action de cette résistance et dans la *direction propre*. Cette force elle-même devra être considérée comme un agent simple, produisant un effort, une pression mesurable en poids et agissant dans une *direction unique*, ainsi qu'on l'a définie précédemment. Il ne faudra pas confondre, comme on le fait souvent, l'expression de *travail* et de *forces* avec celles par lesquelles on désigne vaguement tous les effets, plus ou moins compliqués, des agents matériels ou animés qui développent leur action sur des résistances; ainsi nous ne parlerons pas de la force d'un cheval, d'un homme, d'une machine sans indiquer le point d'action de cette force, son intensité, sa direction ; nous ne parlerons pas de son travail mécanique sans spécifier les mêmes choses pour l'espèce de résistance qu'elle est censée détruire à chaque instant.

42. *Simplicité de la mesure du travail qui consiste à élever verticalement des fardeaux.* — Le travail le plus simple, celui qui donne im-

médiatement l'idée de la mesure, est l'élévation des fardeaux suivant la verticale ou l'*aplomb*, pourvu qu'on ne tienne pas compte de l'inertie de la matière propre de ces fardeaux : l'ouvrage fait *croît* alors visiblement comme le poids et comme la hauteur ou le chemin parcouru dans la direction de la résistance, c'est-à-dire qu'il est mesuré par le produit de ce poids et de cette hauteur : car, pour répéter encore une fois nos raisonnements, en élevant un poids double, triple, etc., à une même hauteur, le travail est bien double, triple, etc., de ce qu'il serait pour le poids simple, et en élevant le même poids à une hauteur double, triple, etc., c'est bien comme si on l'avait élevé deux, trois fois à la hauteur simple, ou une première fois à cette hauteur, puis une seconde fois ou une troisième fois à cette même hauteur. Si donc on prend pour unité de travail, l'unité de poids élevée à l'unité de hauteur, le travail total sera mesuré par le produit du nombre des unités de poids et de celui des unités de hauteur.

L'utilité de la mesure que nous avons prise pour le travail, résulte de sa simplicité même et de la facilité qu'on a d'évaluer des efforts des pressions en poids, et des distances, des chemins en unités de longueur. Du reste, on pourrait prendre la quantité même de l'ouvrage fait pour mesure du travail mécanique des forces : par exemple, on pourrait dire que telle force est capable de moudre 1, 2, 3 kilogr. de blé ; c'est même ainsi qu'on en agit quelquefois, et qu'en agissent les meuniers et les propriétaires de moulins, pour spécifier la valeur mécanique de leurs moulins ou de leurs cours d'eau. Mais comme un même poids de blé présente des résistances différentes à la mouture, selon sa qualité, le genre de l'outil, de la machine, non-seulement les meuniers ne pourraient être compris de tout le monde, mais ils ne pourraient pas même s'entendre entre eux : il faut donc une mesure commune et qui ne soit pas susceptible de varier et d'être interprétée diversement ; or telle est celle qui résulte de la considération de l'effort et du chemin décrit dans la direction de cet effort.

Il restera ensuite à savoir combien chaque unité de travail ainsi définie sera capable de moudre de kilogrammes de blé, de scier de mètres carrés de planches, etc., et c'est à quoi l'on parviendra par des observations et des expériences bien faites. L'essentiel est surtout qu'il n'y ait rien d'arbitraire dans la manière d'évaluer le travail mécanique.

43. *Dénominations diverses données au travail mécanique.* — Les mécaniciens ont donné diverses dénominations au travail mécanique, travail qu'il ne faut pas confondre avec l'ouvrage puisque ce dernier n'en est que l'effet.

Smeaton, mécanicien anglais, qui a beaucoup écrit sur les roues hydrauliques, a nommé le travail mécanique *puissance mécanique;* Carnot, *moment d'activité* (Principes de l'équilibre et du mouvement); Monge et Hachette (Traité des machines) l'ont appelé *effet dynamique;* MM. Coulomb, Navier et plusieurs autres l'ont appelé *quantité d'action;* et cette dernière expression est assez généralement en faveur. Il nous arrivera souvent d'en faire usage, et il faudra se rappeler qu'elle signifie la même chose que *quantité de travail, travail mécanique.*

Quelquefois aussi on nomme le travail mécanique *quantité de mouvement;* mais comme on emploie généralement en mécanique cette expression pour désigner tout autre chose, nous ne nous en servirons jamais pour désigner le travail. Les mêmes réflexions doivent s'appliquer à la dénomination de *force vive* mise en usage par certains auteurs; l'une et l'autre n'indiquent que les effets du travail mécanique d'une force sur un corps libre mis en mouvement. Nous ferons connaître plus tard le sens qu'on attache le plus ordinairement à ces mots. Ainsi, quand il sera question, dans un auteur, de quantité de mouvement ou de force vive, il conviendra de s'assurer s'il s'agit ou non, du travail mécanique tel que nous l'avons défini.

Le travail mécanique est ce qui se paye dans les forces. — Il est évident que tout travail se juge d'après la quantité d'ouvrage de chaque espèce qui se fait, mais nous venons de voir que la quantité d'ouvrage est proportionnelle à celle du travail mécanique qu'elle nécessite directement : donc le *travail* ou la *quantité d'action* est ce qui se paye dans la force.

44. *Manière d'exprimer en nombres le travail continu de forces.* — Quand un moteur ou un outil travaille pendant un temps assez long, ou quand il travaille continuellement et d'une manière uniforme, régulière, on se contente d'indiquer ce qu'il fait dans l'unité de temps; par exemple, dans un jour, dans une heure, dans une minute, dans une seconde. Mais il ne faut pas oublier le temps total pendant lequel le travail est continué. Ainsi, nous dirons le travail

mécanique de tel cheval est de 60 kilogr. parcourant un mètre par seconde, ou de 60 kilogr. parcourant 60 mètres par minute, ce travail étant continué pendant huit heures entières chaque jour. On change ainsi d'unité afin d'éviter les nombres trop grands qui résulteraient du produit de l'effort par le chemin total parcouru.

Le plus ordinairement on considère le chemin décrit pendant la seconde pour unité de temps, afin d'avoir de petits nombres à considérer. Ce chemin étant, d'après la définition du mouvement uniforme, la *vitesse même* du point de l'application de l'effort censé constant, on voit que le travail mécanique pendant l'unité de temps se trouve réellement mesuré par le produit d'un effort et d'une vitesse. C'est, comme nous le verrons un peu plus loin, ce qui fait confondre quelquefois le travail mécanique avec ce qu'on nomme la quantité de mouvement, quoique leurs mesures soient dans le fond très-différentes.

De même que l'unité de temps est totalement arbitraire, de même aussi l'unité d'effort ou de poids et l'unité de distance peuvent être choisies à volonté, et par suite l'unité de travail ou l'unité d'effort exercé le long de l'unité de chemin. Néanmoins, nous prendrons le plus communément pour unité d'effort le kilogramme, et pour unité de distance le mètre ; l'unité de travail mécanique ou d'action sera ainsi l'effort de 1 kilogramme exercé le long du chemin de 1 mètre. Supposons par exemple, un effort constant de 75 kilogr. répété le long d'un chemin de 4 mètres, le produit,

$$4 \times 75 = 300 \text{ kilogr.},$$

sera le nombre d'unités de travail, dont chacune équivaut à l'effort d'un kilogramme parcourant un mètre de distance; ce produit s'exprime ordinairement ainsi qu'il suit,

$$300^{\,k.m},$$

et se lit

300 kilogr. élevés à un mètre de hauteur ;

parce que l'on rapporte volontiers tous les travaux mécaniques à celui qui consiste dans l'élévation verticale des corps pesants, l'effet produit ou l'ouvrage fait étant alors la mesure même du travail. Si maintenant on ajoute à cette définition du travail le temps pen-

dant lequel on suppose qu'il s'effectue et qu'il est continué uniformément, on aura une idée complète de sa valeur.

45. *Diverses unités de travail proposées ou adoptées.* — Les mécaniciens sentant l'importance de fixer une unité de travail et de lui donner un nom, comme on l'a fait pour le *gramme*, le *litre*, etc., en ont proposé de diverses espèces; mais on n'est point jusqu'à présent tombé d'accord sur le choix de cette unité, et il est probable qu'on ne le sera pas plus pour cet objet, que pour désigner l'unité de vitesse, qui dépend tout à la fois de l'unité de temps et de l'unité de longueur. Les uns, tels que MM. Mongolfier, Hachette, Clément, etc., ont pris 1 mètre cube d'eau ou 1000 kilogr. élevés à 1 mètre de hauteur. D'autres, tels que M. Dupin, ont proposé d'adopter (voyez la leçon *Dynamie*, t. III) 1000 mètres cubes d'eau ou *tonneaux* élevés à un mètre, en ajoutant que ce travail s'opérait dans les vingt-quatre heures. On a même nommé ces unités *Dynames*, *Dynamies*; mais aucune n'a encore pris faveur dans le public.

Depuis que les machines à vapeur commencent à s'introduire en France, les mécaniciens ont adopté assez généralement une unité de travail qu'ils nomment *force*, *pouvoir de cheval*, d'après l'exemple des Anglais, de qui nous viennent ces machines. Cette unité n'a pourtant rien de bien défini, parce que la force du cheval est variable; cependant il n'y aurait pas d'inconvénient à s'en servir, si tous les mécaniciens s'entendaient sur sa valeur *fictive*, et si le gouvernement la consacrait par une loi, mais il en est autrement. Quoi qu'il en soit, la valeur qui paraît la plus généralement accréditée, d'après Watt et Boulton, soit en Angleterre, soit en France, ne s'écarte que de très-peu du travail mécanique de $75^{k.m}$, censé produit pendant la durée d'une seconde. Telle est du moins l'idée qu'on peut prendre de sa valeur approximative dans l'industrie manufacturière. Connaissant donc la quantité de travail d'un moteur, on l'estimera en nombre de chevaux de force, en se rappelant que le cheval vaut $75^{k.m}$ par seconde, ou 150 livres à 3 pieds, ou 450 livres à un pied, ou enfin $450^{liv} \times ^{p}$: car c'est la même chose, pourvu que la livre et le pied soient la nouvelle livre et le nouveau pied adoptés légalement en France, et dont l'une vaut le demi-*kilogramme* et l'autre le tiers du mètre.

46. *Erreur que l'on commettrait en appréciant la force des moteurs*

simplement par leur plus grand effort ou par leur plus grande vitesse. — D'après ce qui précède l'on doit être convaincu de l'erreur que l'on commettrait, si pour évaluer la force, le pouvoir productif d'un moteur ou d'une machine, on se contentait simplement de mesurer l'effort absolu dont ils sont capables, sans considérer le chemin qu'ils font parcourir au point d'application de cet effort, dans un certain temps; si l'on se bornait, par exemple, à estimer la force d'un homme par la grandeur du fardeau qu'il peut soulever ou soutenir en équilibre contre l'action de la pesanteur; ou si faisant tirer un cheval contre un obstacle fixe, et mesurant, au moyen d'un ressort ou dynamomètre, l'effort absolu, le plus grand effort qu'il peut exercer, on prétendait, de cette seule donnée, conclure la valeur de la force industrielle. Il est évident qu'il faut, en outre, savoir combien de temps le moteur soutiendrait cet effort et quel chemin il pourrait parcourir en l'exerçant d'une manière continue. Il est tellement vrai qu'exercer un effort ou supporter un fardeau, ce n'est pas travailler utilement, qu'on peut toujours alors remplacer un moteur par un corps inerte, tel qu'un support, une bûche, etc.

Pareillement il ne serait pas moins absurde de ne tenir compte que du chemin parcouru par le point d'action d'un moteur, sans avoir égard à l'effort qu'il exerce à chaque instant : il est évident, par exemple, qu'un coureur, qu'un cheval qui galope, sans exercer d'effort, ne produisent aucun travail effectif et extérieur, et que ce serait mal juger de la quantité d'ouvrage qu'ils pourraient produire que de se borner à mesurer la plus grande vitesse qu'ils sont capables de s'imprimer. En un mot, on doit être bien convaincu que le pouvoir productif des moteurs doit se mesurer à chaque instant, dans tous les cas, par le produit de l'effort et du chemin parcouru dans la direction de cet effort, ou de la résistance qui lui est égale et directement contraire; de sorte que si l'effort ou le chemin décrit est nul, le produit le sera pareillement et par conséquent le travail mécanique.

47. *Les forces ne peuvent agir, même sur des corps fixes, sans produire un certain effet.* — Remarquons cependant que, puisque tous les corps sont plus ou moins compressibles et extensibles, une force motrice ne peut jamais agir, même contre des obstacles fixes, sans produire et dépenser une certaine quantité d'action, un certain travail

mécanique, tel que nous l'avons défini : car le point où cette force est appliquée a plus ou moins cédé, le corps a plié, s'est aplati ou s'est allongé; les ressorts moléculaires ont opposé de la résistance, il y a eu un petit chemin décrit par le point d'application, dans la direction de la force : d'abord les efforts de la résistance égale et contraire étaient nuls, ensuite ils ont augmenté successivement jusqu'à ce que l'effort de la puissance ait atteint son *maximum*, sa plus grande valeur, et le corps sa plus grande déformation possible sous l'action de la force; passé quoi cette action s'est réduite à maintenir le corps ou l'obstacle à son état de tension et au repos, sans produire désormais aucun travail mécanique.

48. *Moyen d'apprécier cet effet ou le travail qu'il nécessite.* — Formons, comme nous l'avons déjà expliqué, une courbe Or_4r_7, (fig. 15), dont les abscisses représentent les chemins décrits successivement par le point d'action de la force ou de la résistance, dans sa direction propre, et dont les ordonnées représentent les pressions ou les résistances exercées en sens contraire par le corps; la quantité de travail détruite par un petit chemin quelconque e_4e_5, sera mesurée par le rectangle formé sur ce chemin et sur l'ordonnée correspondante e_4r_4, si l'on veut par le trapèze curviligne $e_4r_4r_5e_5$; le travail total le sera par l'aire entière Or_7e_7, comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et la dernière ordonnée r_7e_7 représentant le plus grand effort. Si donc il arrive que le corps ou l'obstacle s'allonge ou se comprime d'une quantité appréciable, c'est-à-dire si l'espace total Oe_7 décrit par le point d'application de la force est assez considérable, et qu'il en soit ainsi de la plus grande résistance e_7r_7, la quantité de travail dépensée par la puissance pourra être très-applicable, et il faudra en tenir compte dans certaines circonstances que nous ferons connaître.

49. *Ce travail peut être négligé ou considéré comme nul.* — Mais comme, en général, les corps qui servent à transmettre ou à recevoir l'action des forces sont choisis assez résistants, assez roides, pour ne pas fléchir d'une manière sensible sous cette action, on conçoit que, dans tous les cas semblables, le travail effectué sera une fraction très-petite de celui que le moteur pourrait développer, si l'obstacle se mouvait tout en opposant une certaine résistance, c'est-

à-dire si le chemin décrit devenait très-grand par rapport à celui qui provient de la simple déformation de l'obstacle; ce travail étant donc très-petit et n'ayant aucun but d'utilité, il sera permis de n'en pas tenir compte, et c'est sous ce rapport seulement qu'on peut dire que le travail d'un moteur qui agit sur un obstacle fixe est entièrement nul.

Il peut encore être considéré comme nul quand la force agit perpendiculairement au mouvement d'un corps. — Maintenant nous devons remarquer que ces réflexions sont également applicables toutes les fois qu'une force agissant en un certain point d'un corps en mouvement, ce point ne cédera pas sensiblement à l'action de la force et dans sa propre direction, ou que le chemin qu'il sera contraint de décrire, par suite de sa liaison avec d'autres corps, sera à chaque instant perpendiculaire à la direction de la force; celle-ci ne faisant que comprimer inutilement le corps, et ne produisant aucun travail effectif dans le sens du mouvement, son travail ou sa quantité d'action devra toujours être censé nul, tout comme le cas où le moteur agit sur un obstacle fixe. Un homme qui tirerait ou pousserait sur le côté d'une voiture en mouvement et perpendiculairement au mouvement qu'elle décrit, n'aiderait en rien le travail des chevaux; son objet serait absolument nul quant à l'objet utile du travail. La même chose pourrait se dire à l'égard d'un homme qui pousserait contre la barre d'un manége dans le sens de sa longueur et non dans celui du mouvement circulaire de cette barre, etc. Cependant on voit que le moteur aurait réellement dépensé une certaine quantité d'action ou de travail en comprimant le corps auquel il est appliqué.

80. *Les forces peuvent travailler sans produire d'effet utile, une partie de leur travail est consommée par la déformation des corps.* — Ces réflexions sont très-importantes, puisqu'elles prouvent en général que les forces motrices peuvent travailler ou développer une certaine quantité d'action sans produire aucun effet utile. De plus, si comme les divers agents matériels, les diverses pièces qui composent les machines et qui servent à transmettre le mouvement et le travail, n'agissent les uns sur les autres qu'en se comprimant et se tirant mutuellement, on aperçoit de suite que, même lorsque le point d'application de la force motrice est mis en mouvement dans la direction propre de cette force, il doit d'abord se dépenser une

certaine quantité de travail pour faire plier ou s'étendre les pièces qui transmettent l'action avant que le mouvement ne soit devenu régulier et uniforme ; de sorte qu'il pourra arriver que ce premier travail de la puissance soit totalement perdu si les corps, en cessant d'être comprimés, conservent la forme qu'ils ont acquise par suite du travail, c'est-à-dire, s'ils ne sont pas élastiques, ou plus généralement, si les ressorts moléculaires ne contribuent pas à augmenter le travail au moment où le débandement a lieu, comme ils ont contribué à le diminuer lorsqu'ils ont été d'abord bandés par l'action de la puissance.

51. *Cette perte de travail augmente avec le nombre des intermittences d'action de la force.* — On conçoit même que si l'action du moteur, ou de la résistance occasionnée par le travail, éprouve de fréquentes alternatives, ou devient tantôt plus faible, tantôt plus forte, qu'en un mot, si les corps sont souvent comprimés, puis distendus, la perte de travail pourra être très-comparable au travail total de la puissance ; ce qui n'aurait pas lieu si l'action de cette dernière était constamment la même, et ne variait qu'aux reprises et aux cessations de travail.

52. *Elle peut être très-grande dans le cas du choc.* — Le choc des corps, développant des pressions très-considérables et qui produisent des déformations sensibles, la quantité d'action développée ou détruite alors sera toujours appréciable ; voilà pourquoi il sera indispensable, dans les applications de la mécanique à l'industrie, de ne jamais négliger l'influence des chocs, plus ou moins violents, survenus pendant le travail.

53. *Avantages qu'il y a de régulariser l'action des forces et de faire usage des corps roides et élastiques.* — Enfin, ces réflexions nous font déjà entrevoir tout l'avantage qu'il y a à régulariser l'action des forces et le mouvement des pièces qui la transmettent, quand il s'agit de leur faire opérer un travail industriel quelconque, et à employer pour ces pièces des corps en même temps roides et élastiques, c'est-à-dire très-peu susceptibles de se déformer.

54. *Les ressorts parfaitement élastiques restituent dans le débandement toute la quantité de travail qu'ils ont d'abord dépensée.* — Pour

démontrer clairement comment le ressort des corps peut développer ou restituer, lors du débandement, une certaine quantité de travail mécanique, il ne s'agit que de voir ce qui se passe à l'instant où un corps revient progressivement à sa forme primitive après avoir été comprimé, et se rappeler ce que nous avons dit précédemment sur la manière de mesurer la quantité de travail d'une force qui est employée à bander ou à comprimer des ressorts. En effet, tout consistera à évaluer en poids les diverses pressions qui correspondent à chaque allongement du ressort, depuis l'instant où la compression est la plus forte jusqu'à celui où elle est nulle et où le corps a pris la position qu'il peut alors conserver par lui-même. Si le corps reprend, à ce dernier instant, exactement la forme qu'il avait avant d'être bandé; si d'ailleurs les pressions qui répondent au même degré de tension, aux mêmes positions de ce corps, sont les mêmes, si en un mot le corps est parfaitement élastique, la quantité de travail produit par son débandement, contre une résistance à vaincre, sera évidemment égale à celle qu'il a fallu dépenser primitivement pour le bander, puisque la courbe qui donne la loi des pressions et des espaces décrits sera la même de part et d'autre. Si, au contraire, le corps n'est pas parfaitement élastique, il ne reviendra pas à sa première forme, les pressions seront moindres dans le débandement, le travail restitué sera aussi moindre que celui qui a été d'abord dépensé, et il y aura une certaine quantité de travail perdu comme nous l'avons avancé ci-dessus.

Nous avons vu qu'il n'y a guère que l'air ou les gaz qui soient parfaitement élastiques, lorsqu'on les enferme dans des espaces clos et qu'on les presse avec un piston mobile. De tels ressorts peuvent donc servir à *emmagasiner* le travail mécanique, à faire fonction de réservoir, en les bandant jusqu'à un certain point, et les maintenant à ce point par des moyens faciles à imaginer. Les catapultes, les balistes, les arcs des anciens, lançaient des flèches, des pierres, etc., par le débandement des ressorts. On connaît l'usage du fusil à vent, qui n'est qu'un réservoir d'air comprimé. Le calorique qui dilate les corps et met en jeu leurs ressorts moléculaires, rend, par cela même, certains corps, et notamment la vapeur d'eau ou les gaz, capables de développer du travail; il ne s'agit que de les chauffer ou de les refroidir alternativement. La vapeur d'eau, la poudre à canon, produisent des effets terribles, quand on y applique une chaleur suffisante. Ces divers agents ne servent pas seule-

ment à lancer des projectiles, on peut aussi leur faire mouvoir des machines et produire des travaux industriels. En un mot, l'élasticité permet d'enfermer dans les corps inertes une force capable de les faire travailler à la manière des moteurs animés, tels que l'homme et le cheval. C'est par de semblables moyens que les montres, les pendules, reçoivent le mouvement pendant des jours, des mois entiers.

55. *La pesanteur rend aussi les corps susceptibles de reproduire le travail dépensé pour élever ces corps.* — La pesanteur offre aussi un moyen d'emmagasiner le travail mécanique des forces et de les rendre disponibles au besoin. Quand un moteur a élevé un corps à une certaine hauteur, en dépensant une certaine quantité de travail, mesuré par le produit du poids de ce corps et de la hauteur à laquelle il a été porté, ce corps, employé ensuite à vaincre des résistances, soit directement, soit par le moyen de machines, pourra restituer, dans sa descente, précisément la même quantité de travail que celle qui avait été dépensée primitivement. C'est ainsi que le mouvement est communiqué aux grandes horloges, aux tourne-broches, etc. L'eau qui fait mouvoir par sa pesanteur nos machines, nos usines, a été élevée primitivement à la hauteur des sources, ou plutôt à celle des nuages, par l'action de la chaleur qui l'a d'abord vaporisée à la surface de la terre.

Cette reproduction n'a pas lieu quand le travail a pour objet de détruire la force d'agrégation des particules des corps.—Il n'en est pas de même à l'égard des résistances que présentent les corps, lorsqu'un moteur a été employé à les diviser, à les rompre, à les polir, à les faire frotter, à détruire en un mot leur force d'affinité : la quantité de travail dépensée alors est entièrement anéantie sous le point de vue mécanique; en ce sens qu'elle ne pourra nullement être restituée par les corps, après qu'ils auront subi ce changement d'état.

Réflexions générales sur la force des ressorts, des animaux et de la chaleur.—Les ressorts, comme les animaux, et les combustibles qui donnent de la chaleur, ont cela de particulier qu'ils sont facilement transportables, et peuvent même servir de véhicules. Ainsi, l'on a vu des voitures mises en mouvement par des ressorts placés sur ces voitures, de même qu'on voit quelquefois des bateaux mus par la force des animaux ou de la vapeur de l'eau chauffée, et qui sont eux-mêmes transportés par ces bateaux. Mais il ne faut pas

oublier que les ressorts n'étant jamais parfaits, et étant soumis à des résistances étrangères, rendent toujours moins de travail mécanique qu'ils n'en ont reçu; qu'enfin les animaux, la chaleur même, sources primitives de tous les travaux mécaniques des arts industriels, exigent une certaine dépense en nourriture, en combustible, etc., qui, à son tour, est la représentation d'un certain travail mécanique; de sorte qu'il est réellement impossible de créer de la force motrice, sans qu'il y en ait eu de dépensée primitivement.

56. *L'inertie des corps est un autre moyen de produire le travail mécanique.* — Jusqu'à présent nous avons examiné le travail de la force lorsqu'elle est employée à vaincre la pesanteur, la résistance inhérente à l'état d'agrégation des corps ou à leur force d'affinité, à leur force de ressort, etc., il nous reste à parler de la résistance que tous les corps opposent au mouvement par suite de leur inertie, et dont nous n'avons nullement tenu compte dans ce qui précède, bien que réellement on ne puisse en aucune manière la séparer des autres genres de résistance quand il s'agit de travailler. Nous avons déjà remarqué, par exemple, que le limeur est obligé de vaincre l'inertie de la matière propre de sa lime; le cheval attelé à une voiture, l'inertie de la matière de cette voiture et du fardeau qu'elle supporte, etc. Il est donc fort important d'apprécier à sa juste valeur la quantité de travail qu'un corps donné absorbe pour acquérir un certain degré de mouvement ou de vitesse, indépendamment de ce qu'il arrive souvent que le mouvement est le but utile même du travail, comme lorsqu'il s'agit de lancer des projectiles, des boulets, par le ressort des gaz ou des corps solides. C'est même en cela que consiste l'art de la *balistique,* mis en usage par tous les peuples pour combattre. Enfin, il arrive encore très-souvent qu'au lieu d'appliquer immédiatement une puissance à la production d'un travail, on la fait agir d'abord sur un corps libre, et qu'on se sert du mouvement acquis par ce corps pour effectuer le travail au moyen du choc; *exemple :* les pilons, les marteaux; de sorte que l'inertie des corps sert aussi à restituer la quantité de travail qu'elle a consommée pour être vaincue.

IV.

ACTION DES FORCES MOTRICES EMPLOYÉES A VAINCRE L'INERTIE OU A PRODUIRE LE MOUVEMENT.

57. *Du mouvement uniformément varié en général.*—Nous considérerons d'abord le cas le plus simple, celui d'un corps qui est pressé, à chaque instant, par une force motrice constante, égale et contraire à la résistance opposée par l'inertie dans la direction du mouvement. Or, il est clair que la pression étant la même à chaque instant, l'accroissement ou le décroissement très-petit de la vitesse sera aussi le même, ou constant, pour le même corps. Ainsi, dans le cas dont il s'agit, la vitesse croîtra ou décroîtra comme le temps, ou proportionnellement au temps écoulé depuis l'instant où le mouvement a commencé; ces expressions revenant au même : c'est ce qu'on appelle *le mouvement uniformément varié*, en général, ou *uniformément accéléré, retardé*, selon que la force motrice constante agit pour *augmenter* ou pour *diminuer* la vitesse du corps.

58. *Du mouvement uniformément accéléré.* — Commençons par le mouvement uniformément accéléré, et rappelons-nous (1re partie, 16) que la *vitesse acquise* à un certain instant, est mesurée par le chemin que décrirait le corps, dans l'unité de temps et à compter de cet instant, si la force motrice cessant son action le corps continuait à se mouvoir uniformément et en vertu de son inertie, vitesse que nous avons enseigné à calculer au moyen de la loi qui lie les temps aux espaces décrits.

Nous pouvons représenter encore ici par le dessin la loi qui lie aux temps, les vitesses acquises par les corps au bout de ces temps, en traçant une ligne $Ov_1v_2v_3 \ldots . v_9$ (fig. 16) dont les abscisses Ot_1, Ot_2, ... Ot_9 représentent les temps écoulés depuis l'origine du mouvement, et dont les ordonnées t_1v_1, t_2v_2, t_3v_3, ... t_9v_9 représentent les vitesses acquises au bout de ces temps Ot_1, Ot_2, Ot_3, ... Ot_9.

Cela posé, puisque, dans le cas du mouvement uniformément accéléré, les vitesses t_1v_1, t_2v_2, t_3v_3, ... t_9v_9, sont proportionnelles aux temps écoulés Ot_1, Ot_2, Ot_3, ... Ot_9, il est clair

que la ligne $Ov_1v_2\ldots v_9$ est une ligne droite qui passe par l'origine O des abscisses, quand le mobile part du repos; car alors le temps et la vitesse sont nuls à la fois à l'instant du départ. Supposez qu'on ait partagé l'axe OB des abscisses ou des temps, en un grand nombre de parties égales très-petites, qu'on ait élevé les ordonnées correspondantes, et qu'enfin on ait mené par l'extrémité des ordonnées des parallèles à l'axe des abscisses, on formera une suite de petits triangles $v_1v_2b_2$, $v_2v_3b_3$, ... égaux et rectangles. Les côtés v_1t_1, v_2b_2, ... v_9b_9 de ces triangles marqueront les accroissements successifs de la vitesse, lesquels seront égaux et constants comme leurs petits instants correspondants Ot_1, v_1b_2, ... v_8b_9, conformément à la définition du mouvement uniformément accéléré.

Les intervalles de temps successifs Ot_1, t_1t_2, t_2t_3, ... étant supposés très-petits, on peut regarder le corps comme se mouvant uniformément pendant l'un quelconque, t_3t_4 ou v_3b_4, de ces intervalles, et avec la vitesse v_3t_3 acquise au commencement de chacun d'eux. Or, en vertu du mouvement uniforme, l'espace décrit dans un temps quelconque (1re partie, 13) est mesuré par le produit de la vitesse et du temps employé à le parcourir; ainsi l'espace décrit ici pendant le temps élémentaire t_3t_4 sera égal à t_3t_4 multiplié par la vitesse acquise v_3t_3 au commencement de ce temps élémentaire. Ce produit n'étant autre chose que le produit du petit rectangle $t_3v_3b_4t_4$, la surface de ce dernier pourra ainsi représenter l'espace parcouru pendant le temps élémentaire t_3t_4 : pour un autre intervalle quelconque t_4t_5 égal au premier, l'espace décrit sera également représenté par le rectangle $t_4v_4b_5t_5$. Donc l'espace total, décrit par le temps Ot_9, a pour mesure la somme ou la surface des rectangles élémentaires $t_1v_1b_2t_2$, $t_2v_2b_3t_3$, ... $t_8v_8b_9t_9$, somme qui finit par se confondre avec la surface même du triangle correspondant Ov_9t_9, quand on suppose que le temps total Ot_9 a été divisé en un nombre indéfini de parties égales et indéfiniment petites, le raisonnement étant ici le même que celui qui a été mis en usage (1re partie, 35, 36) pour la mesure du travail.

Lois du mouvement uniformément accéléré. — De ce que le chemin décrit au bout d'un temps quelconque est, pour le mouvement uniformément accéléré, représenté par la surface du triangle qui a pour base ce temps et pour hauteur la vitesse acquise au bout de ce même temps, on peut déduire plusieurs conséquences importantes

et qui permettent de calculer les circonstances de ce genre de mouvement.

Puisque la surface de tout triangle $Ov_9\ t_9$ a pour mesure la moitié du rectangle de même base et de même hauteur, et que ce dernier (1re partie, 18, 16) représente le chemin qui serait décrit uniformément pendant un temps égal à Ot_9 et la vitesse v_9t_9 acquise au bout de ce temps, on voit que,

1° *Dans le mouvement uniformément accéléré, le chemin décrit au bout d'un temps quelconque est la moitié de celui que le mobile décrirait dans un temps égal, s'il se mouvait uniformément avec la vitesse qu'il a acquise dans le premier temps ;*

Puisque les chemins décrits au bout de deux temps quelconques Ot_2, Ot_5 sont représentés par les triangles Ot_2v_2, Ot_5v_5, que ces triangles sont semblables, et que (*Leçons de géométrie*) leurs surfaces sont comme les carrés des côtés homologues, il en résulte encore que,

2° *Dans le mouvement uniformément accéléré, les chemins décrits au bout de deux temps quelconques, sont entre eux comme les carrés de ces temps ;*

3° *Que ces mêmes chemins sont aussi entre eux, comme les carrés des vitesses acquises au bout des temps correspondants.*

Formules pour calculer les circonstances du mouvement uniformément accéléré. — Lorsque, dans le sens du mouvement accéléré, on se donne la vitesse v_5t_5 acquise au bout d'un temps quelconque Ot_5, par exemple, au bout d'une seconde, prise pour unité de temps, la loi du mouvement, où la droite Ov_5 qui la représente, est entièrement déterminée ; en sorte qu'on peut calculer alors la vitesse et l'espace qui répondent à un autre temps quelconque.

En effet, représentons par e_1, v_1 le chemin et la vitesse qui répondent à la première seconde ; soient E, V le chemin et la vitesse qui répondent à un nombre quelconque de secondes représenté par T, on aura d'abord, en vertu de la première des propositions ci-dessus,

$$e_1 = \tfrac{1}{2}v_1 \times 1'' = \tfrac{1}{2}v_1, \quad E = \tfrac{1}{2}V \times T ;$$

puis, en vertu de la deuxième,

$$e_1 : E :: 1'' \times 1'' : T \times T \text{ ou } T^2 ;$$

d'où l'on tire

$$E = e_1 \times T^2 = \tfrac{1}{2} v_1 \times T^2;$$

puis enfin, en vertu de la troisième,

$$e_1 : E \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2} v_1 : E :: v_1^2 : V^2,$$

d'où

$$V^2 = 2v_1 \times E.$$

Nous avons d'ailleurs, en vertu de la même définition du mouvement uniformément accéléré,

$$v_1 : V :: 1'' : T,$$

d'où

$$V = v_1 \times T.$$

Ces différents résultats serviront à calculer la valeur de deux quelconques des quantités E, V, T, quand on connaîtra celle de la troisième, ainsi que le chemin e_1 ou la vitesse v_1 qui répondent à l'unité de temps $1''$: il ne s'agira que de remplacer chaque lettre par le nombre d'unités de temps ou de longueur qu'elle représente, et d'effectuer les opérations indiquées (*).

(Nous renvoyons nos lecteurs, tant pour cette leçon que pour la suivante, à la deuxième leçon du *Cours de mécanique* de M. Dupin, pages 41-49, où ils trouveront des développements qui leur faciliteront l'intelligence parfaite des lois du mouvement uniformément varié.)

Cas où le corps a une vitesse déjà acquise, quand on commence à compter le temps. — Dans ce qui précède nous avons supposé que le corps partait avec une vitesse nulle, en sorte que la droite qui donne la loi de son mouvement passait par l'origine O du temps ; mais s'il y avait déjà une vitesse Ov_0 acquise antérieurement, cette droite passerait par le point v_0, extrémité de l'ordonnée Ov_0 qui représente cette vitesse du départ.

(*) L'équation $V^2 = 2v_1 \times E$, qui indique que la vitesse V est *moyenne proportionnelle* entre $2v_1$ et E, ou entre le double du chemin décrit dans la première seconde, et celui décrit au bout du temps T, présente seule quelques difficultés pour le calcul de V, mais on peut y parvenir au moyen de constructions graphiques (*Leçons de géométrie*), ou par les Tables que nous ferons connaître plus tard, ou enfin par l'extraction directe de la racine carrée du produit $2v_1 \times E$ (voyez *Géométrie de M. Bergery*).

En menant la parallèle $v_0t'_2t'_2$ à Ot_4 (fig. 17), on verra que la vitesse v_2t_2, qui répond à un temps quelconque Ot_2 écoulé depuis l'origine O du mouvement, se compose de la vitesse $t_2t'_2$, égale à la vitesse initiale Ov_0, augmentée de la vitesse $v_2t'_2$, que le corps acquerrait sous l'action de la force motrice constante et au bout du temps correspondant Ot_2 ou $v_0t'_2$, si le corps partait réellement avec une vitesse nulle, comme dans le cas précédent : car la droite t_2v_4 donne, dans ce cas, $v_0t'_4$ étant pris pour axe des temps, la loi de l'accélération de la vitesse. Connaissant donc la vitesse que la force imprimerait au corps au bout de la première seconde, s'il partait du repos, on aura tout ce qu'il faut pour construire v_0v_4 par rapport à $v_0t'_4$, et par conséquent par rapport à Ot_4, d'où il sera aisé de déduire toutes les circonstances du mouvement et de les calculer au moyen des propriétés géométriques de la figure, en se rappelant les diverses notions déjà établies précédemment.

Qu'il s'agisse, par exemple, de calculer le chemin décrit par le corps au bout du temps Ot_4, lequel est représenté ici par l'aire du trapèze $Ov_0v_4t_4$, on apercevra de suite qu'il se compose du *chemin* Ov'_4t_4 *décrit uniformément en vertu de la vitesse* Ov_0, *augmenté de celui* $v_0v_4t'_4$ *qui serait décrit sous l'action de la force motrice constante, d'un mouvement uniformément accéléré et à partir de l'instant du départ*. Or, nous avons appris ci-dessus à calculer l'un et l'autre de ces chemins.

59. *Lois du mouvement uniformément retardé.* — Maintenant on peut supposer que la force motrice constante, au lieu d'augmenter sans cesse et par degrés égaux la vitesse *initiale* ou primitive Ov_0, la diminue au contraire à chaque instant ; le mouvement sera alors uniformément *retardé*. En menant la parallèle $v_0t'_2t'_2$ à Ot_4 (fig. 18), on verra que la vitesse v_2t_2, qui répond à un temps quelconque Ot_2 écoulé depuis l'origine O du mouvement, n'est autre chose que la vitesse primitive Ov_0 diminuée de la vitesse $v_2t'_2$ que le corps acquerrait sous l'action de la force motrice, au bout du temps Ot_2, si le corps partait du repos.

L'aire du trapèze $Ov_0v_4t_4$ étant encore ici la représentation du chemin décrit au bout du temps Ot_4, en vertu du mouvement retardé, on voit que ce chemin est égal à celui qui serait *décrit uniformément pendant le même temps et avec la vitesse primitive, moins celui qui serait décrit, sous l'action de la force motrice constante, d'un*

mouvement uniformément accéléré et à partir de l'instant du départ. On pourrait donc encore calculer, dans le cas actuel et au moyen de la fig. 18, toutes les circonstances du mouvement, si l'on connaissait la vitesse initiale Ov_0, ainsi que la diminution de vitesse $v_3t'_3$ due à la force retardatrice, au bout d'un temps quelconque Ot_3, ou si l'on veut à la fin de la première seconde du temps écoulé.

Supposons, entre autres, qu'on veuille trouver le temps Ot_5 au bout duquel la force motrice aura éteint entièrement la vitesse du corps, on aura, par les triangles semblables, $v_0t'_3v'_3$ et v_0Ot_5, la proportion

$$v_3t'_3 : v_0t'_3 \quad \text{où} \quad Ot_3 = 1'' :: t_5t'_5 : Ot_5;$$

d'où

$$Ot_5 = \frac{1. \times t_5t'_5}{v_3t'_3} = \frac{Ov_0}{v_3t'_3}.$$

Quant au chemin décrit par le corps, depuis l'instant du départ jusqu'à celui où la vitesse est devenue nulle, il sera donné par la surface du triangle Ov_0t_5 ou par le produit

$$\tfrac{1}{2}Ov_0 \times Ot_5 = \tfrac{1}{2}Ov_0 \times \frac{Ov_0}{v_3t'_3} = \tfrac{1}{2}\frac{(Ov_0)^2}{v_3t'_3}.$$

Une remarque très-importante à faire, c'est que, si l'on suppose que la force motrice constante, après avoir anéanti complétement la vitesse initiale du corps, continue à agir en lui imprimant à chaque instant des degrés de vitesse égaux et qui avaient servi à détruire la première, le corps retournera alors en arrière, en reprenant les mêmes vitesses quand il repassera par les mêmes positions. C'est ce qu'indique la ligne v_0t_5 en supposant que les temps soient comptés à partir de t_5 vers O; car la force motrice, qui est devenue accélératrice, aura imprimé, en sens contraire, la vitesse t_4v_4 au bout du temps t_5t_4, la vitesse t_3v_3 au bout du temps t_5t_3, etc.

60. *Mouvement vertical des corps pesants.* — L'un des exemples les plus importants du mouvement uniformément accéléré est celui que nous présente la chute verticale des corps pesants; mais, avant de l'exposer, faisons connaître les circonstances qui accompagnent et qui modifient ce mouvement à la surface de la terre.

Causes qui, à la surface de la terre, modifient ce mouvement. — Déjà nous avons vu (1re partie, 22) que la pesanteur pouvait être considérée comme une force sensiblement constante dans l'étendue ordinaire des travaux de l'industrie. Mais à la surface de notre globe, tous les corps sont plongés dans l'air, et cet air est lui-même un corps matériel qui, en vertu de son impénétrabilité, de son inertie, s'oppose, avec plus ou moins d'inertie, à toute espèce de mouvement des corps ; c'est là ce qu'on nomme sa résistance. L'expérience a depuis longtemps appris que la résistance de l'air croît avec la vitesse du mouvement et avec l'étendue de la surface des corps : c'est ainsi qu'en frappant l'air avec une palette plane très-légère, la résistance qu'on éprouve est d'autant plus grande que le mouvement est plus rapide, tandis qu'elle est à peine sensible quand le mouvement s'opère avec lenteur. Pareillement elle diminuera si, au lieu de frapper l'air avec toute la surface de la palette, on présente cette palette de biais ou *de champ*, c'est-à-dire sur le côté mince.

Influence de l'air sur la chute des corps ; le mouvement dans le vide est le même pour toutes les substances. — On conçoit, d'après cela, que la présence de l'air doit apporter des modifications aux lois de chute verticale des corps soumis à l'action de la pesanteur. En laissant tomber dans l'air des corps d'une même hauteur, on remarque que ceux qui pèsent plus sous le même volume, ou ceux qui présentent le moins de surface dans le sens du mouvement, arrivent les premiers au bas de leur chute : ainsi une balle de plomb tombe plus vite qu'une balle de bois égale en grosseur, celle-ci plus vite qu'une balle de liége, etc. Mais, si l'on fait tomber les mêmes corps dans un cylindre où l'on aurait fait le vide, au moyen d'un piston, par exemple (fig. 19), on reconnaît par l'expérience, que tous ces corps arrivent en même temps alors au bas de leur chute.

Il suit de là que *la pesanteur ou gravité agit indistinctement sur toutes les particules de la matière, et leur imprime à chaque instant le même degré de vitesse dans le vide,* résultat qu'il est bien essentiel de retenir.

61. *La pesanteur agit dans l'intérieur des corps.* — On peut, d'ailleurs, s'assurer très-simplement que la pesanteur agit aussi bien sur les molécules intérieures des corps que sur celles du dehors, en observant qu'un même corps pèse également à l'air libre ou placé dans

l'intérieur d'un autre corps, par exemple, dans une chambre, dans une boîte, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que l'action de la pesanteur se fasse sentir, à travers la matière de cette enveloppe.

Distinction entre le poids et la pesanteur. — Le *poids des corps* n'est autre chose que le résultat de toutes les petites actions réunies de la pesanteur sur les molécules matérielles de ces corps. Il ne faut donc pas confondre le *poids* avec la *pesanteur*, qui est véritablement la *force élémentaire* qui sollicite ces diverses molécules.

62. *Circonstances où le mouvement dans l'air est peu altéré.* — Enfin il est essentiel de se rappeler que les corps les plus denses, tels que l'or, le plomb, le fer, sont ceux qui, à égalité de volume, de surface, tombent le plus vite dans l'air, parce que la résistance est alors très-faible par rapport à leur poids, et qu'elle diminue très-peu la rapidité de leur mouvement. On peut même, dans ces circonstances, ne tenir aucun compte de cette résistance, quand la chute ou la vitesse n'est pas très-considérable.

Exemple de Galilée et d'Atwood. — Galilée, physicien italien, a le premier recherché, par expérience, la loi que suivent les corps pesants dans leur chute, abstraction faite de la résistance de l'air, et il a trouvé que leur vitesse est *uniformément accélérée*. La pesanteur est donc une force *accélératrice constante*, agissant avec une intensité égale à chaque instant, quelle que soit la vitesse déjà acquise. Atwood, physicien anglais, en reprenant les expériences de Galilée avec des moyens plus ingénieux et plus perfectionnés, a obtenu les mêmes résultats. Ainsi nous pouvons énoncer les principes suivants (1re partie, 58):

63. *Lois de la chute des corps dans le vide.* — Lorsqu'un corps tombe verticalement et d'une certaine hauteur dans le vide,

1° Les vitesses acquises sont proportionnelles aux temps écoulés ;

2° Les espaces totaux parcourus, ou les hauteurs de chute, sont proportionnels aux carrés des temps écoulés ;

3° Les mêmes hauteurs sont proportionnelles aux carrés des vitesses acquises au bout de chacune d'elles ;

4° La vitesse acquise au bout d'un certain temps est double de la hauteur de chute déjà parcourue avant cet instant.

Vitesse imprimée par la pesanteur au bout de la première seconde. — Pour le point du globe où nous nous trouvons, le chemin décri

au bout de la première seconde est égal à $4^m,9044$: donc la *vitesse acquise* au bout de ce temps est deux fois $4^m,9044$ ou $9^m,8088$. Cette dernière vitesse est ordinairement représentée par g dans la mécanique; ainsi $g = 9^m,8088$. C'est la connaissance de cette grandeur qui sert à calculer toutes les circonstances du mouvement accéléré des corps qui tombent d'une certaine hauteur (1re partie, 58).

Formule relative à la chute des corps dans le vide. — Ordinairement on représente par h ou H la hauteur en mètres, d'où le corps est tombé à un certain instant; en nommant toujours T le temps employé par le corps à décrire le chemin H, ou à tomber de H, et V la vitesse qu'il a acquise à la fin de ce temps, on aura, d'après ce qu'on a trouvé pour le mouvement uniformément accéléré en général,

$$H = \tfrac{1}{2} V \times T, \quad H = \tfrac{1}{2} g \times T^2, \quad V^2 = 2g \times H,$$

$$V = g \times T, \quad g = 9^m,809,$$

formules très-fréquemment rappelées en mécanique, et d'un grand usage pour calculer les circonstances de la chute des corps pesants.

Application particulière quand le temps de la chute est donné. — Supposons qu'on veuille trouver la vitesse acquise V et le chemin H décrit au bout de 7″ de chute; T représentant ici les 7″, on aura

$$V = g \times T = 9^m,809 \times 7 = 68^m,66 \text{ environ};$$

$$H = \tfrac{1}{2} g \times T^2 = 4^m,9044 \times 49 = 240^m,316.$$

On doit se ressouvenir que dans l'air le corps ne tomberait pas avec cette vitesse, à cause de la résistance; mais, d'après ce que nous avons fait observer, cette résistance aurait très-peu d'influence, si le corps était très-dense, comme du fer, du plomb, etc., ou s'il avait peu de surface comme une balle sphérique, si enfin la hauteur de la chute était faible, par exemple au plus 20^m. On pourrait donc, comme le dit M. Dupin (2e *leçon de mécanique*), calculer très-approximativement alors la hauteur d'une tour, la profondeur d'un puits, en mesurant avec une bonne montre (marquant les dixièmes, les cinquièmes de seconde) le temps total de la chute.

Connaissant la hauteur de chute, trouver la vitesse due à cette hauteur. — Si l'on se donnait la hauteur de chute, 10^m, par exemple, on calculerait la vitesse acquise au bas de cette chute au moyen de la relation

$$V^2 = 2g \times H ;$$

car on aurait

$$V^2 \text{ ou } V \times V = 19^m,6176 \times 10 = 196^{m\,car},176 ;$$

il ne s'agirait que de trouver la racine carrée de 196,176 ou le nombre qui, multiplié par lui-même, donnerait cette quantité : or, cette racine est ici 14^m environ, puisque 14×14 ou $(14)^2 = 196$. L'opération, où il s'agit de trouver la vitesse acquise au moyen de la hauteur, se reproduit très-fréquemment dans la mécanique pratique, aussi a-t-on construit des tables exprès qui fournissent immédiatement la vitesse répondant à une hauteur donnée ; nous les ferons connaître lorsqu'il sera question des lois de l'écoulement des fluides.

On dit ordinairement que la vitesse V est due à la hauteur H, expression abrégée qu'il est essentiel de retenir.

64. *Lois de l'ascension verticale des corps.* — Lorsqu'un corps, une balle de fusil par exemple, est lancé de bas en haut, selon la verticale, la pesanteur agit à chaque instant avec la même intensité, pour diminuer par degrés égaux la vitesse primitive; le mouvement sera donc *uniformément retardé*, et, d'après ce qui précède, la vitesse finira par s'éteindre quand le corps sera arrivé à une certaine hauteur, puis il redescendra, en vertu de l'action de la gravité, en reprenant tous les degrés de vitesse qu'il possède en montant et pour les mêmes positions. Ainsi à 1^m, à 2^m, à 3^m, au-dessus de la terre, le corps possédera exactement les mêmes vitesses, soit dans l'ascension, soit dans la chute, il n'y aura que la direction du mouvement de changée. Par exemple, lors de sa chute ou de son retour au point de départ, la pesanteur lui aura précisément restitué la vitesse qu'il avait primitivement. Nommant H la plus grande élévation à laquelle il soit parvenu, et V cette vitesse, on aura donc

$$V^2 = 2gH ;$$

d'où il sera facile de déduire H quand on aura V, et réciproquement.

Cela suppose toutefois que l'air n'oppose aucune résistance au mouvement; car dans la réalité, les corps montent à une hauteur moindre que celle qui *répond* à leur vitesse initiale, et de plus ils retombent avec une vitesse moindre que celle qui est due à la hauteur réelle de leur chute ou de leur ascension.

65. *Quantité de travail de la pesanteur pour imprimer une certaine vitesse.* — Nous pouvons maintenant apprécier la quantité de travail ou d'action que dépense la pesanteur pour engendrer une certaine vitesse dans un corps, ou pour vaincre l'inertie. Nommons en effet, P le nombre de kilogrammes que pèse le corps, ou plutôt *l'effort absolu* que la pesanteur exerce sur ce corps, et qu'il faudrait employer pour le soutenir à une certaine position; ce sera aussi la mesure de l'effort constant exercé sur le corps pendant la descente de la hauteur H. La quantité de travail consommée pendant cette chute sera donc représentée (1re partie, 35) par le produit $P \times H$, et cette quantité de travail aura engendré, dans le corps, la vitesse V, calculée par l'équation $V^2 = 2gH$. Mais si l'on divise le produit $2g \times H$ ou V^2 par l'un de ses facteurs $2g$, on aura l'autre $H = \frac{V^2}{2g}$; et par conséquent $P \times H$ est la même chose que

$$P \times \frac{V^2}{2g}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\frac{P}{g} \times V^2.$$

66. *Force vive des corps.* — Ainsi la quantité de travail développée par la pesanteur, pour imprimer une certaine vitesse V à un corps, est égale à la moitié du produit obtenu en multipliant le carré de cette vitesse, par le poids P de ce même corps, divisé par la vitesse g ou 9,8088 que la pesanteur imprime à tous les corps au bout de la première seconde de leur chute. Ce produit $\frac{P}{g} \times V^2$ est précisément ce que les mécaniciens ont nommé la *force vive* de P. On voit donc que *la quantité d'action ou de travail dépensée par la pesanteur est la moitié de la force vive imprimée*, ou, si l'on veut, *la force vive imprimée est le double de la quantité d'action dépensée par la pesanteur.*

La quantité d'action consommée a pour mesure la moitié de la force vive perdue ou gagnée. — On remarquera que, lorsque le corps est lancé de bas en haut avec une certaine vitesse, l'action de la pesanteur, toujours mesurée par le produit du poids et de la hauteur à laquelle le corps a été élevé, est employée au contraire à détruire cette vitesse, et que, dans les deux cas de la montée et de la descente, la moitié de la force vive détruite ou acquise mesure la quantité d'action ou de travail nécessaire pour vaincre l'inertie du corps, soit qu'il s'agisse de lui imprimer une certaine vitesse, ou qu'il s'agisse de détruire celle qu'il possède déjà.

Nous verrons bientôt que ce principe est général, quelle que soit la force motrice qui ait communiqué le mouvement à un corps, et quelle que soit la direction de ce mouvement. Mais il est nécessaire auparavant de faire plusieurs remarques et de poser quelques nouvelles définitions admises par les mécaniciens.

67. *Observations sur la force vive.* — Comme l'expression de *force vive* employée pour désigner le produit $\frac{P}{g} \times V^2$ pourrait induire en erreur beaucoup de personnes, il est bon de remarquer ici que, d'après notre manière de voir, ce n'est point réellement une force, pas plus que $P \times H$, ou ce que nous avons nommé en général *quantité d'action*, *quantité de travail* ; c'est tout simplement le résultat de l'activité d'une force motrice ou de pression *exprimable en poids* qui a été employée à vaincre l'inertie de la matière d'un corps, à imprimer un certain mouvement, une certaine vitesse, à ce corps. Sous ce point de vue la force vive n'est véritablement que l'*effet dynamique* de la force motrice, ou plutôt le double de cet effet, puisque $\frac{P}{g} \times V^2 = 2P \times H$.

A la vérité un corps mis en mouvement, ou un certain effet dynamique, peut, à son tour, devenir une cause, une source de travail ; ainsi, par exemple, un corps lancé verticalement, de bas en haut, est élevé en vertu de sa vitesse, à une certaine hauteur, tout comme il le serait par l'action d'un moteur animé. Mais il arrive ici la même chose que lorsqu'une force motrice a développé une certaine quantité de travail pour bander un corps élastique (1re partie, 38), l'inertie de la matière a été mise en jeu de la même manière que les ressorts moléculaires l'ont été dans ce dernier cas.

Cette inertie (1re partie, 56), quand elle a été ainsi vaincue, devient capable de restituer la quantité de travail dépensée, de même que le ressort qui a été bandé ; en un mot, l'inertie, comme les ressorts, sert à emmagasiner la quantité d'action, à la transformer en force vive, de sorte que la force vive est une véritable quantité d'*action disponible*. On peut en dire autant d'un corps qui a été élevé à une certaine hauteur (1re partie, 55) ; ce corps, sollicité par la pesanteur, est la source d'une quantité d'action dont on peut disposer subséquemment pour produire du travail mécanique. Mais, de même que nous ne disons pas que ce corps, actuellement élevé à une certaine hauteur, est une *force*, qu'un ressort bandé est une *force*, de même aussi il est peu exact de dire qu'un corps en mouvement ou $\frac{P}{g} \times V^2$ est une *force*. Il en est encore ainsi des *hommes*, des *animaux* en général, du *calorique*, des *cours d'eau*, du *vent*, etc. ; ce sont des agents de travail, des *moteurs* si l'on veut, mais non de simples forces (1re partie, 19).

L'objet de la mécanique industrielle consiste principalement à étudier les diverses transformations ou métamorphoses que peut subir le travail des moteurs par le moyen des machines ou des outils, à comparer entre elles les quantités de ce travail, à les évaluer en argent ou en ouvrage de telle ou telle espèce, etc.

En résumé, lorsque nous parlerons de la *force vive* communiquée ou acquise par un corps, sans s'arrêter à la signification propre de cette expression, il faudra seulement se ressouvenir qu'elle se *rapporte au mouvement réel de ce corps et au produit du carré de sa vitesse par son poids divisé par* g, *ou* $9^m,8088$.

68. *Définition de la masse.* — Puisque la pesanteur agit indistinctement sur toutes les parties matérielles d'un corps, et leur imprime, à chaque instant, le même degré de vitesse dans le même lieu, on voit que le poids d'un corps, qui est le résultat de toutes ses actions partielles, peut donner jusqu'à un certain point une idée de la *quantité de matière* que ce corps renferme, ou de sa *masse ; en sorte* que, suivant cette notion, la *masse* serait proportionnelle au poids : souvent même on prend dans les applications les poids pour des masses. Mais, comme l'intensité de la pesanteur varie d'un lieu à un autre, et que la quantité de matière ou la *masse absolue* d'un même corps ne varie pas, on voit que cette dernière

serait très-mal définie par le poids simple de ce corps. Or, l'expérience a appris que la vitesse imprimée par la pesanteur, au bout de la première seconde de sa chute, demeurait constamment proportionnelle à son intensité, c'est-à-dire que le rapport $\frac{P}{g}$ restait le même pour tous les lieux. Ainsi P et P' étant les *poids absolus* d'un même corps transporté, par exemple, à deux hauteurs différentes, g et g' les vitesses qu'à ces hauteurs la pesanteur imprime à chaque particule de matière, on a

$$P : P' :: g : g', \text{ ou } \frac{P}{g} = \frac{P'}{g'}.$$

C'est donc ce rapport invariable $\frac{P}{g}$, et non P, qu'on doit prendre pour la valeur de la *masse absolue* d'un corps, en mécanique. Ordinairement on représente la valeur de la masse par la lettre m ou M : on a donc

$$M = \frac{P}{g},$$

et, par suite,

$$P = Mg,$$

P exprimant l'effort exercé par la pesanteur sur un certain corps, et g la vitesse qu'elle lui imprime, dans le même lieu, au bout de la première seconde de temps.

69. *Expression de la force vive au moyen de la masse.* — D'après cela, la valeur ci-dessus $\frac{P}{g} \times V^2$ de la force vive d'un corps se trouve aussi représentée, dans les calculs mécaniques, par $M \times V^2$, c'est-à-dire *par le produit de la masse de ce corps et du carré de sa vitesse acquise.*

Enfin les mécaniciens sont également convenus de nommer *quantité de mouvement* d'un corps, *le produit de sa masse, défini comme on vient de le dire, par la vitesse simple que possède cette masse,* c'est-à-dire que $M \times V$, ou $\frac{P}{g} \times V$, est ce qu'on nomme une *quantité de mouvement* en mécanique : cette quantité est, comme on

voit, très-différente de ce que nous avons appelé (1re partie, 43) quantité d'action ou de travail (*).

70. *Usage de ces mots en mécanique.* — Au fait c'est principalement pour abréger et simplifier les calculs et les raisonnements qu'on emploie les dénominations de masse, de quantité de mouvement; et l'on pourrait aisément s'en passer dans la mécanique industrielle. Mais, comme tous les auteurs, et M. Dupin lui-même, en ont fait usage, il devient important de bien se pénétrer de leur véritable signification.

71. *Les forces motrices sont proportionnelles au degré de vitesse qu'elles impriment à un même corps, dans un même instant très-petit.* — Nous venons de voir que la pesanteur imprime à un même corps et au bout de la première seconde, des vitesses qui sont constamment proportionnelles à son intensité, ou au poids absolu du corps dans chaque lieu. Mais cette propriété provient uniquement de ce que la pesanteur est censée très-peu varier pendant la chute du corps; de sorte que la vitesse totale au bout de cette chute est proportionnelle aux degrés égaux de vitesse imprimés à chaque instant (1re partie, 62). Lorsque la force motrice, au lieu d'être constante, varie à chaque instant, il est évident qu'alors son intensité ne peut plus se mesurer par la vitesse qu'elle imprime à un même corps au bout de l'unité de temps, et qu'elle dépend uniquement du petit degré de vitesse qu'elle lui communique à un instant donné.

L'observation de ce qui se passe à la surface du globe terrestre, et dans les mouvements de notre système planétaire, prouve que

(*) Nommons Q la valeur de $\frac{P}{g} \times V$, on aura $Q = \frac{P}{g} \times V$, ou, ce qui revient au même, $Q : P :: V : g$. Mais P est le poids du corps ou un certain effort, g ou $9^m,8088$ est la vitesse que la pesanteur imprime à ce corps, au bout de la première seconde, dans le lieu où nous sommes; donc Q n'est autre chose que l'effort qui serait exercé sur le même corps, par la pesanteur, dans le lieu où elle serait capable d'imprimer la vitesse V au bout de la première seconde de chute. On voit aussi que la force vive MV^2, ou $MV \times V$, n'est elle-même que le produit de ce dernier effort par la vitesse V, ou par le chemin que décrirait uniformément le corps, dans l'unité de temps, en vertu de sa vitesse acquise. Ces observations peuvent donc servir à distinguer entre elles la quantité de mouvement et la force vive, ainsi qu'à montrer l'identité de la nature de cette dernière et de la quantité d'action ou de travail.

les forces motrices ou de pression sont réellement proportionnelles aux degrés de vitesse très-petits, qu'elles impriment à un même corps, dans des temps égaux infiniment petits. Ce fait sert de base à toute la mécanique du mouvement, et doit être considéré comme une loi générale des forces motrices que présente la nature.

72. *Mesure de la force motrice ou de la force d'inertie au moyen de la vitesse imprimée dans un temps infiniment court.* — D'après cela, soit F la mesure en kilogrammes, d'une certaine force de pression ; soit v le degré très-petit de vitesse qu'elle imprime à un corps à une époque quelconque et pendant le temps très-petit t ; soit pareillement P la pression que la pesanteur exerce en un certain lieu, sur le corps, ou le poids de ce corps, et v' le petit degré de vitesse qu'elle lui imprime dans le même temps t. On aura, d'après ce qui précède,

$$F : P :: v : v';$$

d'où

$$F = \frac{P}{v'} \times v.$$

Mais, d'après la première loi de la chute des corps (1re partie, 60), nous avons $v' : g :: t : 1''$; d'où $v' = gt$, et par suite,

$$F = \frac{P}{g} \times \frac{v}{t} = M \times \frac{v}{t},$$

M étant la masse du corps. Ainsi, quand on connaîtra la vitesse v imprimée dans le petit temps t par la force F, on pourra calculer cette force qui est égale et contraire à la résistance qu'oppose l'inertie de la matière de ce corps, au mouvement. Cette résistance a été appelée par les uns *force d'inertie*, et par les autres *force dynamique*. La relation $F = M \times \frac{v}{t}$ nous apprend donc que *la force d'inertie* F *croît proportionnellement à la masse du corps,* $M = \frac{P}{g}$, *et aux degrés de vitesse* v *qu'il reçoit dans des temps élémentaires* t *égaux et très-petits* (*).

(*) Soit F' une autre force motrice agissant sur un corps de masse M', et qui lui com-

73. ***Mesure du degré de vitesse imprimée par une force motrice donnée.*** — De la relation ci-dessus on tire la valeur

$$v = \frac{F \times t}{M},$$

et l'on voit que le degré de vitesse qu'une force motrice imprime à un corps, pendant un même temps élémentaire très-petit, croît proportionnellement à l'intensité de la force motrice, et inversement à la masse de ce corps ou de son poids.

74. ***Mesure de la force motrice ou d'inertie par la vitesse finie qu'elle imprimerait en une seconde, si elle agissait uniformément.*** — Maintenant, si nous supposons qu'à une certaine époque du mouvement d'un corps, la force motrice F cesse tout à coup de varier, ou continue d'agir sur le corps avec l'intensité qu'elle possède à cette époque, la vitesse augmentant ou diminuant dès lors de quantités proportionnelles au temps (1re partie, 57), cette intensité pourra être encore mesurée par la vitesse finie qu'elle imprimerait au corps à la fin de la première seconde, s'il partait du repos au commencement de cette seconde. Désignant par V cette vitesse finie, on aura

$$V : v :: 1'' : t,$$

d'où

$$V = \frac{v}{t};$$

et, en général, la force motrice égale et contraire à la force d'inertie, à la force dynamique, est mesurée à chaque instant, par la quantité de mouvement qu'elle imprimerait au bout d'une seconde, si, au lieu de varier, elle demeurait ce qu'elle est à cet instant.

---

mumique, dans le même temps élémentaire t, un degré de vitesse v', on aurait de même

$$F = M' \times \frac{v'}{t}.$$

Donc on aura

$$F : F' :: M \times \frac{v}{t} : M' \times \frac{v'}{t},$$

ou bien

$$F : F' :: M \times v : M' \times v';$$

ce qui indique que deux forces motrices quelconques sont entre elles comme les quantités de mouvement très-petites qu'elles communiquent pendant le même temps élémentaire.

75. *Moyens d'obtenir les mêmes choses à l'aide de la loi ou de la courbe qui lie les temps aux vitesses.* — Ces considérations sur la force motrice, dans le mouvement varié, sont analogues à celles qui concernent (1re partie, 16) la vitesse même du mouvement, et on peut les reproduire également à l'aide d'une figure. Soit tracée, comme cela a été dit (1re partie, 57), pour le mouvement uniformément accéléré, la ligne $v_0 v_1 v_2 \ldots . v_6$ (fig. 20), qui représente la loi des temps et des vitesses; soient $t_3 v_3$, $t_4 v_4$ les vitesses qui répondent au commencement et à la fin du temps très-petit $t_3 t_4$ ou t. Menons par v_3 la parallèle $v_3 b_4 m$ à l'axe des temps Ot_6; elle retranchera de l'ordonnée $v_4 t_4$ la petite longueur $v_4 b_4$ représentant le degré de vitesse imprimé par la force motrice dans la durée du petit temps $t_3 t_4$, degré que nous avons représenté par v. Or, si l'on suppose qu'à partir du commencement de ce temps t, la force motrice devienne constante, ou qu'elle imprime, dans les instants consécutifs et égaux à t, des degrés égaux de vitesse, la vitesse acquise au bout d'une seconde sera exprimée (1re partie, 58) par une droite $v_3 n$, prolongement de $v_3 v_4$, et qui sera tangente à la courbe $v_0 v_1 v_2 \ldots . v_6$, puisque l'intervalle $t_3 t_4$ ou t est censé excessivement petit. Prenant donc $v_3 m = 1''$ et élevant l'ordonnée mn, celle-ci ne sera autre chose que la vitesse V_1 acquise au bout de l'unité de temps en vertu de la force motrice supposée constante, et l'on aura, à cause des triangles semblables $v_3 v_4 b_4$ et $v_3 mn$, la proportion

$$v_3 b_4 \text{ ou } t' : b_4 v_4 \text{ ou } v :: v_3 m \text{ ou } 1'' : mn \text{ ou } v_1,$$

d'où l'on tire, comme ci-dessus, $V = \frac{v}{t}$.

Ainsi, quand on connaîtra la loi qui lie les temps aux vitesses imprimées, ou la courbe qui représente cette loi, on pourra pour chaque instant, et par le tracé d'une tangente de cette courbe, déterminer la vitesse V_1, et, par suite, calculer comme il a été expliqué ci-dessus, la valeur

$$M \times V_1 = \frac{P}{g} \times V_1,$$

trouvée précédemment, de la force motrice en vertu de laquelle le mouvement du corps a lieu, ou ce qui est la même chose, la ré-

stance égale et contraire que l'inertie oppose, à chaque instant, à l'action de la force.

78. La connaissance de la loi que suit la force motrice peut servir à trouver celle qui lie les temps aux vitesses. — Réciproquement, si l'on connaît, pour chaque instant, la force motrice F, on en déduira les valeurs correspondantes de $V_1 = \frac{F}{M}$, ou les inclinaisons des tangentes $v_1 m$ de la courbe des vitesses : car la mesure de ces inclinaisons est donnée par le rapport

$$\frac{mn}{v_1 m} = V_1.$$

Si l'on se donne d'abord la vitesse initiale Ov_0 du corps, vitesse nulle quand ce corps part du repos, rien ne sera plus facile que de trouver la courbe des vitesses successivement acquises sous l'action de la force motrice, puisqu'au moyen des inclinaisons des tangentes correspondantes à chaque abscisse ou à chaque temps, on pourra, de proche en proche, construire les positions successives $v_0 v_1$, $v_1 v_2$, $v_2 v_3$, $v_3 v_4$, $v_4 v_5$, ... des éléments de cette courbe.

77. Recherche du travail des forces motrices ou de la force d'inertie des corps. — A l'aide des notions qui précèdent, nous pouvons calculer la quantité de travail que doit dépenser, contre un corps de poids P, une force de pression F, égale et contraire à la force d'inertie, pour imprimer à ce corps une certaine vitesse V, ou, plus généralement, pour augmenter ou diminuer sa vitesse d'une quantité donnée.

En effet, cette quantité de travail est mesurée, pour chaque instant très-petit t, par le produit de F et du chemin élémentaire décrit par le corps dans cet instant. (Nous supposons ici que ce chemin est le même pour les diverses molécules du corps, ou qu'on ne considère qu'une de ces molécules en particulier.) Ce petit chemin est donné sur la figure 20 par l'aire du petit rectangle $v_1 t_1 t_1 b_1$ formé sur la vitesse correspondante $v_1 t_1$ ou V, et sur l'élément du temps $t_1 t_1$ ou t (1re partie, 57, 66), c'est-à-dire par le produit $V \times t$. Donc la quantité de travail élémentaire est $F \times V \times t$ pour chaque instant, ou pour chaque petit accroissement $b_1 v_1$ de la vitesse, accroissement que nous avons déjà nommé v. Or, nous avons trouvé ci-dessus que la valeur correspon-

dante de F était $M \times \frac{v}{t}$, ainsi la quantité de travail en question est $M \times V \times v$.

C'est la somme de toutes ces quantités de travail partielles qui composent le travail total, et cette somme est facile à trouver par la considération d'une figure. A partir du point O (fig. 21), pris pour origine, portons sur la droite OB les divers accroissements successifs Ow_1, w_1w_2, w_2w_3, w_3w_4, ... de la vitesse, répondant aux divers instants écoulés depuis celui du départ du corps, accroissements qui ne seront point égaux dans le cas du mouvement varié. Il est clair que les longueurs Ow_1, Ow_2, Ow_3, Ow_4, ... sont les vitesses totales acquises aux instants correspondants : portons ces mêmes longueurs sur les ordonnées correspondantes, w_1v_1, w_2v_2, w_3v_3, w_4v_4, ... de telle sorte qu'on aura

$$v_1w_1 = Ow_1, \quad v_2w_2 = Ow_2, \quad v_3w_3 = Ow_3, \ldots .$$

La suite des points O, v_1, v_2, v_3 va former une ligne droite inclinée à 45° sur l'axe des abscisses OB. Cela posé, considérons en particulier la vitesse v_3w_3 ou V, dont l'accroissement w_3w_4 ou v_3b_4, égal à v_4b_4, a été nommé v. Le produit $V \times v$ sera ici représenté (1re partie, 66) par le petit rectangle $v_3w_3w_4b_4$ ou par le trapèze $v_3w_3w_4v_4$, qui lui devient sensiblement égal quand les accroissements de vitesse ou de temps sont extrêmement petits. Donc la somme cherchée de tous les produits semblables à $V \times v$, a pour mesure celle de tous les petits trapèzes correspondants, ou l'aire comprise entre la droite Ov_4, l'axe des abscisses, et les ordonnées qui représentent les vitesses acquises au commencement et à la fin de l'intervalle de temps pour lequel on veut obtenir le travail de la force motrice.

78. *La quantité de travail de la force motrice ou de la force d'inertie d'un corps, a pour mesure la moitié de la force vive communiquée.* — Par exemple, si le corps part du repos, et qu'il s'agisse de trouver la somme des produits $V \times v$ relative à une vitesse acquise w_4v_4 que nous nommerons V' ; cette somme, étant représentée par l'aire du triangle Ow_4v_4, aura pour mesure

$$\tfrac{1}{2}\, Ow^4 \times w_4v_4, \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}\, w_4v_4 \times w_4v_4 = \tfrac{1}{2}\, V'^2.$$

Donc *la quantité de travail correspondante à la vitesse acquise* V', *et consommée par l'inertie du corps*, sera mesurée par $\frac{1}{2} M \times V'^2$, ou par la moitié de la force vive *communiquée depuis l'instant du départ* (1re partie, 66). Ce principe a donc lieu aussi pour un mouvement quelconque ou pour une force motrice différente de la pesanteur.

Pour une autre vitesse $v_6 w_6$, que nous nommerons V'', la consommation de travail sera également mesurée par $\frac{1}{2} M \times V''^2$, et par conséquent pour l'intervalle compris entre les positions du corps qui répondent aux vitesses V' et V'', la quantité de travail consommée sera mesurée par la différence

$$\frac{1}{2}\overline{M \times V''^2} - \frac{1}{2}\overline{M \times V'^2},$$

correspondante au trapèze $v_4 w_4 w_6 v_6$. Or, $M \times V'^2$ et $M \times V''^2$ sont les forces vives possédées par le corps au commencement et à la fin de l'intervalle de temps pour lequel on considère le travail de la force motrice : c'est donc encore l'accroissement de *la force vive* ou la force vive *communiquée* dans cet intervalle, de sorte que le principe ci-dessus peut s'appliquer à deux instants quelconques du mouvement d'un corps. Ainsi *la quantité de travail dépensée a dans tous les cas pour mesure la moitié de la force vive communiquée entre ces instants.*

79. *La quantité de travail consommée par une force opposée au mouvement d'un corps est la moitié de la force vive détruite.* — Enfin, on doit remarquer que ce qui précède suppose que la vitesse du corps augmente sans cesse, s'il en était autrement, ce serait un signe que la force motrice F serait opposée au mouvement du corps ou serait *retardatrice*, de sorte qu'elle agirait alors comme une *véritable résistance*. Du reste, tous nos raisonnements demeureraient encore applicables, et l'on trouverait que la quantité de travail ou d'action développée par la résistance F (égale et directement contraire à la force d'inertie devenue puissance), pendant un certain intervalle de temps, pour réduire la vitesse V'' à V', par exemple, serait égale à

$$\frac{1}{2}(\overline{M \times V''^2} - \overline{M \times V'^2})$$

ou à la moitié de la force vive *détruite* ou *perdue*.

Ainsi, la diminution de la force vive d'un corps entre deux instants suppose qu'une quantité de travail ou d'action égale à la moitié de cette diminution, a été développée par l'inertie de ce corps contre des obstacles, des résistances, comme son augmentation suppose de la part d'une puissance une consommation de travail égale à la moitié de cette augmentation.

80. *L'inertie de la matière sert à changer le travail en force vive et la force vive en travail.* — On voit donc clairement maintenant comment, en général, l'inertie de la matière sert à transformer le travail en force vive et la force vive en travail; ou, pour nous exprimer comme nous l'avons fait (1re partie, 67), à l'occasion du mouvement vertical des corps pesants, on voit que l'inertie sert à emmagasiner le travail des moteurs en le convertissant en force vive, et à le restituer intégralement ensuite, lorsque cette force vive vient à être détruite contre des résistances.

Les arts industriels nous offrent une infinité de circonstances où ces transformations successives s'opèrent par le moyen des machines, des outils, etc. L'eau renfermée dans les réservoirs des moulins représente une certaine quantité d'action ou de travail disponible, qui se change en force vive quand on ouvre la vanne ou l'écluse; à son tour la force vive acquise par cette eau, en vertu de sa chute du réservoir, se change en une certaine quantité de travail quand elle agit contre la roue du moulin, et celle-ci transmet ce travail aux meules, etc., qui confectionnent l'ouvrage. L'air refoulé dans le réservoir d'un fusil à vent représente la valeur mécanique du travail dépensé par un certain moteur pour l'y emprisonner; en lâchant la détente, l'air chasse la balle et convertit une certaine quantité d'action en force vive. Si la balle est lancée contre un ressort ou un corps élastique, ce dernier va se bander (fig. 22), se comprime en opposant une résistance de plus en plus forte, égale et contraire à la force d'inertie de la balle, et qui finit par éteindre le mouvement, quand la quantité de travail développée par le ressort atteint une valeur moitié de la force vive possédée par la balle; le travail étant maintenu à cet instant par un moyen quelconque, la force vive s'y trouvera emmagasinée en quantité de travail disponible, de façon que, si l'on vient à supprimer l'obstacle qui maintient le ressort dans sa dernière position, la balle va être lancée en sens contraire, avec une vitesse telle que la force vive ac-

quise sera le double de la quantité d'action ou de travail (1re partie, 78) restituée par le ressort dans son débandement.

81. *Les corps parfaitement élastiques restituent complétement la force vive quand ils sont choqués.* — Si donc ce ressort est parfaitement élastique, la vitesse transmise à la balle sera précisément égale à celle que le fusil à vent lui avait d'abord imprimée dans une direction contraire. Ainsi, dans l'exemple dont il s'agit, la *quantité de travail* a été alternativement changée en *force vive* et la force vive en *quantité de travail*, sans qu'il y ait eu rien de perdu ni de gagné. Mais, si le ressort n'est pas parfaitement élastique, une portion de la force vive imprimée à la balle sera employée à détruire les forces moléculaires de ce ressort.

82. *Dans le choc des corps non élastiques, il y a toujours une perte de force vive appréciable.* — Ainsi, dans le choc des corps non parfaitement élastiques, il y a toujours une perte de quantité de travail mesurée par la moitié de la force vive détruite. Presque tous les corps étant dans ce cas, et la quantité de travail consommée inutilement par les forces moléculaires étant comparable à celle que développe l'inertie pendant que les corps se compriment, on voit que si cette dernière, ou la vitesse en vertu de laquelle le choc s'opère, est considérable, il y aura eu, dans un très-petit instant, une grande perte de quantité d'action, et voilà pourquoi, comme nous l'avons déjà dit, il faut éviter les chocs dans le mouvement des machines industrielles. Au surplus, nous reviendrons sur ce sujet dans la suite.

83. *Les ressorts et l'inertie ne peuvent pas servir à augmenter la force vive des corps et le travail des moteurs.* — On voit encore, par tout ce qui précède, qu'il est aussi impossible de se servir de la force de ressort que de celle de la gravité, pour imprimer à un corps une vitesse plus grande (1re partie, 55) que celle qu'il possédait primitivement, ou pour augmenter le travail quelconque d'une puissance, et qu'au contraire cette vitesse restituée sera toujours moindre que la vitesse primitive ; mais, comme la portion de vitesse ou de force vive détruite dans le choc a été employée réellement à vaincre certaines résistances moléculaires, et par conséquent à produire un certain travail, nous avons pu dire ci-dessus que la force d'inertie

Ainsi, la diminution de la force vive d'un corps entre deux instants suppose qu'une quantité de travail ou d'action égale à la moitié de cette diminution, a été développée par l'inertie de ce corps contre des obstacles, des résistances, comme son augmentation suppose de la part d'une puissance une consommation de travail égale à la moitié de cette augmentation.

80. *L'inertie de la matière sert à changer le travail en force vive et la force vive en travail.* — On voit donc clairement maintenant comment, en général, l'inertie de la matière sert à transformer le travail en force vive et la force vive en travail; ou, pour nous exprimer comme nous l'avons fait (1re partie, 67), à l'occasion du mouvement vertical des corps pesants, on voit que l'inertie sert à emmagasiner le travail des moteurs en le convertissant en force vive, et à le restituer intégralement ensuite, lorsque cette force vive vient à être détruite contre des résistances.

Les arts industriels nous offrent une infinité de circonstances où ces transformations successives s'opèrent par le moyen des machines, des outils, etc. L'eau renfermée dans les réservoirs des moulins représente une certaine quantité d'action ou de travail disponible, qui se change en force vive quand on ouvre la vanne ou l'écluse; à son tour la force vive acquise par cette eau, en vertu de sa chute du réservoir, se change en une certaine quantité de travail quand elle agit contre la roue du moulin, et celle-ci transmet ce travail aux meules, etc., qui confectionnent l'ouvrage. L'air refoulé dans le réservoir d'un fusil à vent représente la valeur mécanique du travail dépensé par un certain moteur pour l'y emprisonner; en lâchant la détente, l'air chasse la balle et convertit une certaine quantité d'action en force vive. Si la balle est lancée contre un ressort ou un corps élastique, ce dernier va se bander (fig. 22), se comprime en opposant une résistance de plus en plus forte, égale et contraire à la force d'inertie de la balle, et qui finit par éteindre le mouvement, quand la quantité de travail développée par le ressort atteint une valeur moitié de la force vive possédée par la balle; le travail étant maintenu à cet instant par un moyen quelconque, la force vive s'y trouvera emmagasinée en quantité de travail disponible, de façon que, si l'on vient à supprimer l'obstacle qui maintient le ressort dans sa dernière position, la balle va être lancée en sens contraire, avec une vitesse telle que la force vive ac-

quise sera le double de la quantité d'action ou de travail (1re partie, 78) restituée par le ressort dans son débandement.

81. *Les corps parfaitement élastiques restituent complétement la force vive quand ils sont choqués.* — Si donc ce ressort est parfaitement élastique, la vitesse transmise à la balle sera précisément égale à celle que le fusil à vent lui avait d'abord imprimée dans une direction contraire. Ainsi, dans l'exemple dont il s'agit, la *quantité de travail* a été alternativement changée en *force vive* et la force vive en *quantité de travail*, sans qu'il y ait eu rien de perdu ni de gagné. Mais, si le ressort n'est pas parfaitement élastique, une portion de la force vive imprimée à la balle sera employée à détruire les forces moléculaires de ce ressort.

82. *Dans le choc des corps non élastiques, il y a toujours une perte de force vive appréciable.* — Ainsi, dans le choc des corps non parfaitement élastiques, il y a toujours une perte de quantité de travail mesurée par la moitié de la force vive détruite. Presque tous les corps étant dans ce cas, et la quantité de travail consommée inutilement par les forces moléculaires étant comparable à celle que développe l'inertie pendant que les corps se compriment, on voit que si cette dernière, ou la vitesse en vertu de laquelle le choc s'opère, est considérable, il y aura eu, dans un très-petit instant, une grande perte de quantité d'action, et voilà pourquoi, comme nous l'avons déjà dit, il faut éviter les chocs dans le mouvement des machines industrielles. Au surplus, nous reviendrons sur ce sujet dans la suite.

83. *Les ressorts et l'inertie ne peuvent pas servir à augmenter la force vive des corps et le travail des moteurs.* — On voit encore, par tout ce qui précède, qu'il est aussi impossible de se servir de la force de ressort que de celle de la gravité, pour imprimer à un corps une vitesse plus grande (1re partie, 55) que celle qu'il possédait primitivement, ou pour augmenter le travail quelconque d'une puissance, et qu'au contraire cette vitesse restituée sera toujours moindre que la vitesse primitive; mais, comme la portion de vitesse ou de force vive détruite dans le choc a été employée réellement à vaincre certaines résistances moléculaires, et par conséquent à produire un certain travail, nous avons pu dire ci-dessus que la force d'inertie

restitue *intégralement* la quantité de travail qui a été dépensée pour le mettre en jeu ; seulement il arrive qu'une portion de ce travail est, dans certains cas, *étrangère* à l'ouvrage qu'il s'agit de faire, ou n'est point considérée comme faisant partie de l'*effet utile*, ainsi qu'il a déjà été expliqué (1re partie, 40) à l'égard des forces de pression ordinaires.

84. *Examen de ce qui se passe dans les mouvements alternatifs ou périodiques.* — Nous venons de montrer par des exemples comment la quantité de travail ou d'action peut être transformée alternativement en force vive, et la force vive en quantité d'action, par le moyen des ressorts et des machines qui les emmagasinent et les restituent successivement. Ces transformations se présentent, en général, toutes les fois que le mouvement d'un corps sollicité par une puissance motrice varie, par degrés insensibles, de manière à être tantôt accéléré et tantôt retardé. C'est ce qui a lieu, par exemple, dans les mouvements périodiques dont nous avons déjà parlé (1re partie, 15), et en général dans tous ceux de va-et-vient qu'on nomme *alternatifs*, et où la vitesse devient nulle de temps en temps. Les mouvements oscillatoires des pendules et des fils à plomb sont évidemment de ce dernier genre. Or, lorsque la vitesse du corps augmente, c'est un signe qu'une certaine portion du travail du moteur agit dans le sens du mouvement pour accroître la force vive du corps d'une quantité égale au double de cette portion, le surplus du travail ayant été absorbé par les autres résistances ; si, au contraire, la vitesse du corps vient à diminuer, malgré l'action de la puissance toujours exercée dans le sens du mouvement, c'est qu'une certaine portion de la force vive acquise a été dépensée, contre les mêmes résistances, pour augmenter le travail du moteur d'une quantité égale à la moitié de cette portion, et ainsi de suite selon le nombre des alternatives du mouvement.

85. *La quantité de travail consommée ou restituée par l'inertie est toujours la moitié de la force vive acquise ou détruite.* — On voit, d'après cela, que, lorsque la vitesse ou la force vive d'un corps oscille entre certaines limites, c'est une preuve que l'inertie a successivement absorbé et restitué des portions de travail du moteur qui sont égales pour tous les instants où la vitesse est redevenue la même, c'est-à-dire que, dans l'intervalle de ces instants, il n'y a eu

rien de perdu ni de gagné, et que la puissance doit être considérée comme ayant été entièrement employée à vaincre les résistances autres que l'inertie. Mais, si dans un intervalle de temps quelconque, la vitesse, après avoir subi également des alternatives de grandeur, ne redevient pas ce qu'elle était d'abord, la moitié de la différence des forces vives qui répondent à la fin et au commencement de cet intervalle mesure la quantité de travail qui a été réellement consommée ou restituée par l'inertie du corps. Par conséquent, si le corps était parti du repos, la quantité de travail consommée par l'inertie, à un instant quelconque, serait mesurée seulement par la moitié de la force vive acquise à cet instant.

86. *Démonstration des mêmes choses par la figure.* — On remarquera que tous les raisonnements qui précèdent peuvent être répétés au moyen de la fig. 22, en observant que, lorsque la vitesse du corps diminue après avoir augmenté pendant un certain temps, il en est de même de l'abscisse et de l'ordonnée de la droite Ov_6 qui représentent cette vitesse ; de sorte que cette ordonnée, après s'être éloignée de l'origine jusqu'à un certain point, en *balayant* des aires *triangulaires* proportionnelles à la quantité de travail dépensée par l'inertie ou à la moitié de la force vive acquise par le corps, se rapproche de cette même origine, en soustrayant de la plus grande aire, ou du plus grand triangle des surfaces trapézoïdes qui diminuent de plus en plus, l'aire de ce triangle répondant à la plus grande force vive. Une voiture qui chemine avec une vitesse tantôt plus grande, tantôt plus petite, offre l'exemple de ce que nous venons de dire : d'abord les chevaux dépensent une certaine quantité de travail pour la mettre en mouvement au pas ou au trot ; puis, lorsque la vitesse de la voiture vient à ralentir par suite de l'augmentation des résistances, ou de la diminution d'action des chevaux, cette même inertie développe contre ces résistances une portion du travail qu'elle avait d'abord absorbée, et qui est égale à la moitié de la diminution de la force vive ; et les choses continuent ainsi alternativement : de sorte que, lorsque la voiture est mise au repos, la quantité de travail restituée par l'inertie est précisément égale à la quantité de travail qu'elle a consommée, et qu'en réalité il n'y a rien eu de perdu. Il est entendu, d'ailleurs, que les diminutions de vitesses éprouvées par la voiture ne proviennent pas de ce que les chevaux retiennent ou de ce qu'on aurait enrayé, puisque alors ces

chevaux et l'*enrayage* auraient servi à augmenter les véritables résistances, et à consommer la force vive acquise, sans utilité immédiate pour l'objet du transport.

87. *Ces réflexions s'appliquent aussi bien à la pesanteur qu'à l'inertie. Avantages des routes à pentes douces.* — Les mêmes réflexions sont applicables à l'action de la pesanteur sur une voiture qui monte ou descend une côte : la quantité de travail, employée dans la montée pour vaincre la pesanteur, sera restituée dans la descente, pourvu que celle-ci ne soit pas trop roide, et ne force pas à enrayer ou à retenir, et à perdre inutilement cette quantité de travail. On voit par là aussi l'un des avantages des routes à pentes douces sur les autres, et c'est pour cela que, de nos jours, on a fixé la limite des pentes du vingtième au trentième.

88. *Nouveaux exemples où l'inertie ne diminue en rien la quantité de travail du moteur.* — Lorsqu'un moteur est employé à élever verticalement des fardeaux, il prend le corps au repos ; de là une consommation de travail pour vaincre l'inertie du corps. Arrivé à la hauteur voulue, le moteur ralentit son mouvement pour remettre de nouveau le corps au repos ; dans ce ralentissement, la force vive acquise est employée à détruire une portion de l'effet de la pesanteur sur les corps, et l'inertie n'a rien absorbé. Les mêmes choses peuvent se dire encore du travail du limeur, du scieur, etc., puisqu'à la fin de chaque oscillation de l'outil, la vitesse devient nulle en variant par degrés insensibles. Il est évident que cela n'aurait plus lieu si le mouvement changeait brusquement, ou qu'il y eût des chocs ou des secousses entre corps non parfaitement élastiques : une portion de la force vive serait employée alors (1re partie, 82) à détruire les ressorts moléculaires des corps qui se choquent.

89. *Autres exemples du rôle que joue l'inertie des corps dans divers procédés des arts.* — Afin de donner une idée plus complète encore du rôle que joue l'inertie des corps dans les travaux industriels, et démontrer comment elle peut servir à expliquer une infinité de procédés des arts, nous allons ajouter quelques exemples particuliers à tous ceux qui ont été rapportés jusqu'à cette heure.

Pour faire sortir le ciseau en fer d'une varlope, l'ouvrier frappe le bois sur le derrière; en lui imprimant brusquement de la vitesse,

le ciseau et son coin résistent par leur inertie, ou ne cèdent qu'en partie au mouvement.

On emmanche souvent un outil, par exemple, un marteau, en frappant la queue du manche dans le sens de sa longueur ; ce manche chemine, et l'inertie de la matière du marteau résiste au mouvement imprimé. C'est par l'effet de l'inertie qu'on parvient à lancer, avec une grande vitesse, des pierres à l'aide de la *fronde :* car on accumule la force vive dans cette pierre, en lui faisant faire plusieurs révolutions successives, et de plus en plus rapides. La *toupie*, lancée à terre, tourne et chemine en vertu de la force vive qui a été primitivement accumulée par le déroulement accéléré de la ficelle. Le *diable* est un autre exemple du moyen qu'on peut employer pour accumuler la force vive dans un corps mobile autour d'un axe. Le mouvement *par volées* des cloches résulte également de l'accumulation du travail de la puissance dans les premières oscillations et de sa transformation en force vive. Le jouet que les enfants nomment *jalointe* reçoit d'abord sa vitesse par le déroulement du fil enveloppé sur son axe; en vertu de l'inertie du *volant* placé sur cet axe, le mouvement continue et sert à enrouler le fil, en sens contraire, en le tirant comme le ferait la main, avec un certain effort : ce moyen peut être même employé dans les grandes machines pour transformer le travail des moteurs en force vive, puis la force vive en travail ordinaire. On se sert avec avantage, dans les arts, du *tour à pédale et à ressort,* pour les petites pièces légères ; parce que l'inertie exerce alors peu d'influence, malgré les variations, les alternatives de la vitesse. Mais son emploi aurait des inconvénients pour les grosses pièces ou les pièces de métal, c'est pourquoi on y substitue le *tour à mouvement de rotation continu.*

99. *Observations générales sur ces exemples.* — Nous engageons le lecteur à méditer attentivement ces divers exemples que nous ne faisons pour ainsi dire qu'indiquer, et d'en faire autant de tous ceux que la pratique des arts pourrait offrir à ses méditations : ils serviront à lui bien faire concevoir comment l'inertie de la matière se comporte, tantôt comme une simple résistance, tantôt comme une véritable force motrice, absolument de la même manière que la pesanteur des corps et les ressorts parfaitement élastiques.

Nous les engageons, par les mêmes motifs, à lire, après ce qui

précède, les dernières pages de la 2e leçon du *Cours de M. Dupin*, relativement à la manière dont le mouvement est communiqué aux machines par les moteurs. Du reste, nos derniers exemples concernent principalement l'inertie des pièces qui ont un mouvement de rotation ; et tout ce que nous avons fait jusqu'à présent de la force vive n'est simplement que relatif au mouvement de transport des corps dont les diverses parties sont animées de la même vitesse ; mais nous verrons bientôt que les principes sur la force vive et le travail mécanique ont lieu en général, et nous apprendrons à calculer rigoureusement la valeur de cette quantité et de cette force vive, quel que soit le mouvement d'un corps ou d'une machine.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉQUILIBRE DES FORCES ET DYNAMIQUE.

I.

FORCES CONCOURANT EN UN POINT.

1. *Équilibre d'un corps.* — Jusqu'ici on n'a considéré que l'effet d'une force égale et directement appliquée à une autre force, et il arrive souvent que des forces appliquées d'une manière quelconque à un corps ont pour but de vaincre des résistances aussi quelconques par l'intermédiaire de ce corps. Quand un corps est ainsi soumis à l'action de plusieurs forces (*puissances* ou *résistances*), on dit qu'il y a équilibre entre toutes ces forces lorsque l'une d'elles détruit un certain effet que produiraient les autres sur le corps si la première n'existait pas. Le corps est lui-même en équilibre si les diverses forces qui lui sont appliquées le laissent en repos. Cette dernière espèce d'équilibre ne saurait jamais être absolue, parce que les corps participent au mouvement continuel de la terre et qu'il n'y a en réalité point de repos pour eux. Toutefois un corps sera pour nous en repos lorsque sa position restera la même par rapport à des objets tels que les montagnes, les maisons, etc., que nous regardons comme fixes. Ainsi, l'idée d'équilibre ne se rapporte pas uniquement au repos, et n'exclut nullement le mouvement. De là résulte la distinction de l'équilibre *Statique* et de l'équilibre *Dynamique*. On nomme *Résultante* de plusieurs forces, celle qui produit à elle seule le même effet que ces forces ; ces dernières sont dites *Composantes*.

2. *Résultante de forces appliquées selon la même direction.* — Lorsque plusieurs forces agissent sur une même droite et dans le même

sens, leur effet équivaut à celui d'une force unique égale à leur somme et qui en est la résultante. Si ces forces agissent dans des sens opposés et toujours sur la même droite, leur résistance sera une force unique égale à l'excès de la somme des forces qui agissent dans l'autre sens, et elle agira dans le sens de la plus grande des deux sommes. C'est le cas où des efforts sont exercés sur la direction d'un même cordon. Remarquons que la tension du cordon est la même dans tous ses points, et qu'il n'est pas possible que ses deux bouts soient tirés avec des efforts différents. La différence obtenue pour ceux qui lui sont appliqués dans un sens et dans l'autre est purement arithmétique, et indique que les efforts supérieurs pourraient développer une action plus grande que celle des efforts inférieurs.

3. *Parallélogramme des chemins.* — Lorsqu'un corps ou point matériel se meut de A en B (fig. 23) de manière à décrire le chemin AB supposé rectiligne, chacune des positions A et B peut être projetée sur les droites quelconques OM, ON, situées dans le même plan que la droite AB, par des parallèles à ces lignes ou axes; ou plutôt la position A donne lieu aux deux coordonnées AA', AA'', et la position B aura deux coordonnées BB', BB''. Les positions A', A'' sur les droites données sont simultanées avec le point A, et celles B', B'' avec le point B. Les chemins $A'B'$ et $A''B''$, sur les directions OM, ON, sont donc décrits en même temps que le chemin véritable AB. Les premiers se nomment *Chemins estimés*, ou *Chemins relatifs* sur telle ou telle direction. Prolongeons les parallèles ou coordonnées des points A et B jusqu'à ce qu'elles forment le parallélogramme $AEBF$, et nous reconnaîtrons, à cause de $AE = A'B'$ et de $AF = A''B''$, ce principe : *qu'un chemin rectiligne parcouru peut toujours se décomposer en deux chemins relatifs sur deux directions quelconques, et que ces derniers sont les côtés parallèles à ces directions, d'un parallélogramme qui a pour diagonale le véritable chemin parcouru.* Réciproquement, quand on a les chemins relatifs dans deux directions quelconques, on en déduit le chemin véritable, au moyen de la diagonale du parallélogramme sur les deux premiers.

4. *Parallélogramme des vitesses.*—On a dit (1re partie, 16 et suiv.) que la vitesse d'un corps en mouvement est représentée par l'étendue du chemin décrit dans un même temps très-court, et qu'il n'y

à que le cas du mouvement uniforme où le temps pendant lequel s'estime la vitesse puisse être pris aussi grand qu'on voudra. Or, le chemin AB étant décrit par le corps, en même temps que les chemins $A'B'$, $A''B''$, le premier pourra être regardé comme sa vitesse véritable, et les deux autres comme ses vitesses relatives. Ainsi, *la vitesse véritable d'un corps est la diagonale d'un parallélogramme construit sur ses deux vitesses relatives estimées dans des directions quelconques.*

5. *Cas du mouvement curviligne ou du mouvement varié.* — Si le mouvement est curviligne, la diagonale rectiligne AB ne peut plus représenter le chemin décrit. Si le mouvement était varié, cette même diagonale ne donnerait plus l'intensité de la vitesse, dans le cas où il s'agirait d'un intervalle fini de mouvement. Il convient alors de déterminer par une suite de temps infiniment petits et égaux, les chemins élémentaires décrits simultanément sur deux axes. Autant on aura de couples de ces petits chemins, autant on construira de parallélogrammes dont les diagonales donneront les véritables petits chemins élémentaires. Mais alors, comme les dispositions consécutives A et B (fig. 24) sont très-rapprochées, une diagonale telle que AB se confondra sensiblement avec la courbe et pourra être regardée comme la tangente de cette dernière. Dans la construction de chaque parallélogramme on peut, pour plus de facilité, doubler, quintupler, etc., les deux chemins relatifs correspondants, sans que la direction de la diagonale soit altérée; seulement, le chemin qu'elle donnera sera double, quintuple, etc., du chemin réel.

6. *Méthode de Roberval.*—Lorsque la loi du mouvement d'un point est connue dans deux directions quelconques, il est toujours possible, d'après ce qui précède, de mener une tangente à la courbe que décrit ce point. L'ellipse, par exemple, s'engendre en fixant à deux points F, F' (fig. 25), que l'on nomme ses foyers, les extrémités d'un fil FAF' d'une longueur égale à son grand axe, et en promenant une pointe A dans toutes les positions où le fil peut être tendu par cette pointe contre les foyers. Puisque dans les mouvements du point descripteur, la longueur du fil $FA + F'A$ est toujours la même, il est évident que la portion FA s'allonge de la même quantité que celle dont se raccourcit l'autre portion corres-

pondante $F'A$. Le point A tend donc à décrire ou décrit en effet deux chemins simultanés égaux sur les rayons vecteurs FA et $F'A$. Ainsi, prenant sur le prolongement de FA une partie quelconque AB, et sur $F'A$ une partie $AB' = AB$, construisons le parallélogramme $ABCB'$. La diagonale AC sera la tangente à l'ellipse en A. On observera que ce parallélogramme est ici un losange, et qu'à cause de l'égalité des angles BAC et CAB', la tangente à l'ellipse jouit de la propriété que les angles qu'elle forme avec les deux rayons vecteurs sont égaux. Cette méthode, due à Roberval, est fort utile dans tous les cas où l'on connaît la description organique de la courbe.

7. *Indépendance des vitesses simultanées dans un même corps.* — On a fait voir comment on pouvait décomposer un mouvement en deux autres, et réciproquement, et cela parce qu'en réalité un corps peut être animé de deux ou plusieurs vitesses simultanées. Supposez que, pendant qu'un bateau chemine sur une rivière, un homme se dirige d'un bord à l'autre de ce bateau, et que, partant de A (fig. 26) par exemple, il soit arrivé en B au moment où le bateau est parvenu dans une position telle que le point A soit en A' et le point B en B'. Quoique l'homme n'ait parcouru que le chemin AB sur le bateau, il n'en a pas moins décrit par rapport aux rives le chemin AB' ; car il est mû à la fois et de la vitesse qui lui est propre et de celle qui est propre au bateau. Cela posé, ce même espace AB' serait encore décrit si le bateau marche d'abord de A en A' et que l'homme se transporte ensuite de A en B' ; ou si le bateau s'arrête pendant que l'homme va de A en B et qu'ensuite l'homme demeurant au repos en B, le bateau s'avance de A en A'. — *Autre exemple :* La terre tourne en même temps que le bateau précédent marche, et l'homme peut lui-même marcher sur ce bateau. Cet homme est ainsi animé de trois vitesses simultanées, dont on trouvera la résultante, en les composant les unes après les autres. — Considérons enfin un corps posé sur un certain nombre de feuilles de papier placées les unes au-dessus des autres sur une table à roulettes. — On peut d'abord tirer la table, elle entraînera dans son mouvement les feuilles de papier et le corps de manière que le tout sera animé d'une vitesse commune. Si, outre ce mouvement général, un homme tire la feuille de papier inférieure, cette feuille sera, ainsi que toutes les autres et le corps, animée de deux vites-

ses composantes. Qu'un autre homme fasse encore mouvoir la deuxième feuille de papier, celle-ci et toutes celles qui lui sont superposées, recevront leurs vitesses qui se composeront en une seule. En un mot, quand un corps a plusieurs mouvements simultanés, le véritable mouvement est le même que si le corps recevait l'une après l'autre toutes les vitesses qu'il possède en même temps. De là cette règle : *la résultante de plusieurs vitesses simultanées s'obtient en construisant un polygone* (fig. 27) *dont les côtés sont égaux et parallèles aux vitesses composantes, et en joignant le point de départ à l'extrémité du dernier côté.*

8. *Indépendance de l'action des forces simultanées.* — L'action d'une force sur un corps, qu'il soit en repos ou qu'il soit déjà en mouvement, est toujours la même et lui imprime dans l'une et l'autre circonstance les mêmes degrés de vitesse. Que vous abandonniez, par exemple, un corps à son propre poids, la pesanteur lui imprimera les mêmes degrés de vitesse à chaque instant, si ce corps part de l'état de repos ou s'il a déjà reçu un mouvement quelconque de la part d'une autre force. Par exemple, quand une bombe décrit dans l'air une parabole; la vitesse que le mobile possède à chaque instant est toujours la résultante *MR* (fig. 28) de la vitesse *MQ* qu'il a reçue à l'instant qui précède immédiatement l'instant que l'on considère, et du degré de vitesse très-petit *MP* que la pesanteur lui imprime pendant l'intervalle de temps aussi très-petit qui sépare ces deux instants consécutifs. Ainsi, lorsque deux forces seront appliquées à un même corps, elles lui imprimeront à chaque instant et simultanément les degrés de vitesse qui leur sont propres. Nous avons dit (1re partie, 71) que ces degrés étaient, d'après une loi générale de la nature, proportionnels aux intensités des forces.

9. D'après cela, soit un point matériel *A* (fig. 29) sur lequel agissent deux forces *P* et *Q* représentées en grandeur et en direction par les droites *AB* et *AC*. Il est visible qu'elles lui imprimeront simultanément, et dans leurs directions respectives, les mêmes petits degrés de vitesse *Am*, *An*, que si elles le tiraient chacune isolément. La vitesse totale qui en résulte sera d'ailleurs (2e partie, 8) donnée par la diagonale *Ar* du parallélogramme *Amrn*. Imaginons, dans une direction opposée à celle de cette diagonale, une force *X*

qui détruise la vitesse résultante Ar. Le mouvement ne pourra plus alors naître, en sorte que la force X, détruisant ainsi l'effet de P et Q, fera équilibre à ces forces. Soit porté $AD = X$ sur la diagonale : on conçoit que AD produira le même effet que les deux forces P et Q, ou qu'elle sera leur résultante : or, leur force PQ et leur résultante AD ou X sont proportionnelles aux degrés de vitesse Am, An et Ar, qu'elles impriment simultanément, c'est-à-dire aux côtés et à la diagonale du parallélogramme construit sur leurs directions. D'où résulte ce principe, connu sous la dénomination de parallélogramme des forces, que *la résultante de deux forces est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les intensités de ces forces*. Il ne faut pas oublier que l'intensité d'une force est représentée par une ligne prise dans sa direction, et contenant autant d'unités linéaires qu'il y a de kilogrammes dans la mesure de la force. On voit encore que les forces se combinent entre elles comme les chemins et les vitesses. C'est, au reste, ce que l'expérience confirme. Si, par exemple, on attache à une corde ACB (fig. 30), fixée à ses deux extrémités, un poids R de 15 kilogr., il est possible de mesurer avec deux pesons les efforts qu'il exerce sur les directions CA et CB. Portant ensuite au-dessus du point C, et dans sa verticale, une longueur CD proportionnelle à 15, et construisant le parallélogramme $CaDb$, on trouve que les côtés Ca, Cb sont proportionnels aux efforts indiqués par les pesons.

10. *Décomposition d'une force en deux autres.* — De ce que deux forces appliquées en un même point donnent lieu à une force unique, réciproquement une force quelconque peut se décomposer en deux autres agissant sur deux directions données. Soit Ar (fig. 31) une force appliquée en A, et que l'on veut décomposer en deux autres dirigées sur AB et AC ; on les obtiendra au moyen du parallélogramme $Amrn$. Le côté Am sera la première composante, et le côté An la seconde. Si les composantes sont perpendiculaires entre elles et qu'on appelle PQ ces forces et R leur résultante, on a, à cause du triangle rectangle Arm, et de $rm = An$,

$$\overline{Ar}^2 = \overline{Am}^2 + \overline{An}^2, \quad \text{ou} \quad R^2 = P^2 + Q^2,$$

et, par suite,

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Au lieu d'extraire la racine carrée pour obtenir la résultante des deux forces P et Q, qui sont perpendiculaires entre elles, on aura une valeur suffisamment approchée au moyen de cette formule qu'il faut admettre,

$$R = 0{,}96P + 0{,}4Q,$$

P étant la plus grande des deux composantes.

11. *Quantité de travail d'une force sur une résistance qui ne lui est pas immédiatement opposée.* — Jusqu'à présent on a supposé que la résistance était immédiatement opposée à la force destinée à la vaincre. Considérons maintenant le cas où la résistance a lieu dans une tout autre direction que celle de la puissance et où le point d'application de cette dernière ne peut se mouvoir que dans le sens de la résistance. Soit, par exemple, une force AR (fig. 32) appliquée sur le corps A et que nous nommerons R, et supposons que le corps A ne puisse se mouvoir que dans la direction AB. Décomposons la puissance R en deux autres forces : l'une $P = AP$, perpendiculaire à AB, et l'autre $Q = AQ$, située sur la droite AB, et par conséquent immédiatement opposée à la résistance qu'il faut vaincre. Puisque le corps A ne peut céder dans le sens perpendiculaire à AB, la composante ne tendra qu'à presser le corps A sans le faire cheminer et par conséquent sans produire du travail. Quant à la composante Q, elle est immédiatement opposée à la résistance des corps, et, d'après ce qui est dit, si Aa est le chemin très-petit décrit par le corps sur la direction AB, qui est aussi celle de Q ou de la résistance, la quantité de travail élémentaire qui vaincra cette résistance sera mesurée par le produit $Q \times Aa$. Telle sera aussi la quantité de travail effectif produite par la force R. Si l'on abaisse du point a la perpendiculaire ar sur la direction de R, la distance ar ne sera que le chemin décrit par le point d'application de cette force et estimé dans sa direction. Or, les triangles AQR et Aar, étant rectangles et ayant un angle commun en A, sont semblables; ce qui donne la proportion

$$Aa : Ar :: AR : AQ, \quad \text{ou} \quad Aa : Ar :: R : Q;$$

d'où la force R est aussi égale au produit $R \times Ar$: ce qui apprend que la dépense de travail d'une force qui n'est point immédiatement opposée à la résistance, est égale au produit de cette puissance mul-

tipliée par le chemin que parcourt son point d'application et qui est estimé dans la direction propre de la puissance. Il serait facile de faire voir que le chemin Ar, estimé dans la direction propre de la force R, est en réalité le chemin que décrit le point d'application de cette force.

12. *Quantité de travail pour faire mouvoir un corps pesant sur une courbe.* — Lorsqu'un corps de poids P est assujetti à se mouvoir sur une courbe ABC (fig. 38), la quantité de travail élémentaire que la pesanteur dépense pour lui faire décrire un petit élément BC, est, d'après ce qui précède, égal au produit de P et du chemin $b'c'$ estimé sur la verticale. C'est aussi la mesure de la quantité de travail dépensée parallèlement à l'élément de la courbe. En ajoutant toutes les quantités de travail élémentaires en vertu desquelles le corps a décrit toute la courbe, on trouvera que la somme, ou la quantité de travail dépensée par la pesanteur, est égale au poids P multiplié par la somme de tous les petits chemins estimés verticalement, ou par la hauteur $AD' = H$, ou bien au produit $P \times H$. Ce produit est également le travail de la force qui agirait immédiatement dans le sens même du mouvement. Or, on sait (1re partie, 78) que le double de ce dernier travail est égal à la force vive du corps, c'est-à-dire au produit $\frac{P}{g} \times V^2$, V étant la vitesse qu'il possède dans le sens de la courbe au moment de la fin du travail. On aura donc

$$2P \times H = \frac{P}{g} \times V^2, \quad \text{ou} \quad V^2 = 2gH :$$

c'est-à-dire que la vitesse acquise par une courbe sur une certaine hauteur est la même que s'il tombait verticalement sur cette hauteur. On voit encore que la quantité de travail que doit dépenser un moteur pour faire monter un corps pesant le long d'un plan ou d'une surface quelconque, est toujours mesurée par le produit du poids de ce corps et de la hauteur verticale du point où il doit monter.

13. On a démontré (2e partie, 11) que la quantité élémentaire de travail d'une force dont le point d'application est mû dans une direction différente de celle de la force, était mesurée soit par le

produit de cette force et du petit chemin estimé, selon sa direction, soit encore par le produit du chemin réel décrit par le point d'application et de la composante de la force dans la direction du mouvement; et remarquons que cette composante n'est autre chose que la projection de la force sur le chemin parcouru. D'après cela, considérons les deux forces P et Q (fig. 34) appliquées au point A, R leur résultante, Aa le petit chemin parcouru par leur point commun d'application. Abaissons des points P, Q, R sur la direction Aa les perpendiculaires PP', QQ', RR'; la projection de la force P ou AP sera évidemment AP', et celles de Q et R seront AQ' et AR'. Quant au travail élémentaire de P, ce sera $Aa \times AP'$, et on aura pour ces deux forces Q et R les produits de $Aa \times AQ'$ et $Aa \times AR'$. Or,

$$AR' = AP - R'P',$$

et comme

$$R'P' = r'P = AQ',$$

et, par suite,

$$AR \times Aa = \overrightarrow{AP' \times Aa} - \overrightarrow{AQ' \times Aa}.$$

C'est ici le lieu d'observer que la composante AP' de P est dirigée dans le sens du mouvement Aa, tandis que la composante AQ' de Q est dirigée en sens contraire, de sorte que le travail effectif de ces forces ou leur travail total doit être ici la différence des travaux de chacune de ces deux forces. Ce même travail en eût été la somme si les composantes des deux forces P et Q, sur la direction du mouvement Aa, eussent été dirigées l'une sur l'autre dans le sens de ce mouvement. Quoi qu'il en soit, nous voyons que *le travail élémentaire de la résultante de deux forces est égal au travail des deux composantes, et ce dernier travail est la somme ou la différence des travaux que produisent chacune d'elles selon qu'elles agissent dans le même sens ou dans des sens opposés.*

14. *Moment de la résultante de deux forces.* — Le petit espace Aa peut être décrit de diverses manières. Si l'on suppose, par exemple, que le point a soit appliqué à une barre de manége AO (fig. 35),

qui tourne autour d'un point O pris arbitrairement sur le plan des deux forces, l'espace élémentaire Aa devient un petit arc de cercle qu'il est permis de regarder comme une petite ligne droite perpendiculaire à AO. Les petits chemins estimés Ab, Adc, Ac, sur les directions des forces P, Q, et de leur résultante R, sont donnés par les pieds des perpendiculaires abaissées sur chaque force, de l'extrémité a du petit chemin décrit; et les quantités élémentaires de travail qui sont aussi mesurées par le produit de la force et du petit chemin estimé sur sa direction, sont respectivement pour P, Q, R,

$$P \times Ab, \quad Q \times Ad, \quad \text{et} \quad R \times Ac.$$

On nomme bras de levier des forces P, Q, R, les perpendiculaires, telles que Op, Oq, Or, abaissées du centre de rotation O sur leurs directions. En examinant ce qui est relatif à la force P, on reconnaît que les deux triangles AOp et Aab sont semblables, attendu qu'ils sont rectangles en p et en b et que l'angle OAp de l'un est égal à l'angle Aab de l'autre. Ce qui donne la proportion

$$Ab : Aa :: Op : AO;$$

d'où

$$Ab = Op \times \frac{Aa}{AO}.$$

Ainsi, la quantité de travail de la force P, ou $P \times Ab$, devient $P \times Op \times \frac{Aa}{AO}$. On trouverait de même pour celle de Q, ... $Q \times Oq \times \frac{Aa}{AO}$; et pour celle de R, $R \times Or \times \frac{Aa}{AO}$. Mais nous avons fait voir (2e partie, 13) que la dernière était égale à la somme ou à la différence des deux premières, selon que les forces P, Q agissaient dans le même sens ou en sens contraires. On aura donc

$$R \times Or \times \frac{Aa}{AO} = \left(P \times Op \times \frac{Aa}{AO} \right) \pm \left(Q \times Oq \times \frac{Aa}{AO} \right) \ldots .$$

ou bien, supprimant le facteur commun $\frac{Aa}{AO}$ et en désignant par r,

p, q les bras de levier des forces R, P, Q,

$$Rr = Pp \pm Qq.$$

On nomme moment d'une force le produit de cette force par son bras de levier. Ainsi, le moment de la résultante de deux forces qui concourent en un même point est égal à la somme ou à la différence des moments des deux composantes, selon que ces dernières agissent sur leur point commun d'application dans le même sens ou dans des sens différents.

15. *Deux points d'application de deux forces peuvent être ramenés à un seul.* — Jusqu'ici on a supposé que les deux forces étaient appliquées à un seul et même point, et cependant deux forces P et Q agissent pour l'ordinaire sur un même corps en deux points différents, tels que B et C (fig. 36). Quelle que soit leur action sur le corps, il est évident qu'elle ne sera pas changée si l'on traverse celui-ci par deux barres rigides AB et AC, situées dans les directions respectives des deux forces données. Ces deux barres iront concourir en un point A, et celui-ci leur étant invariablement lié, ainsi qu'au corps lui-même, il sera permis de regarder les forces P et Q comme appliquées à ce point A. La résultante AR s'obtiendra alors au moyen de la diagonale du parallélogramme $APRQ$, où elle rencontrera la surface du corps au point D que l'on considérera ensuite comme le point d'application de la résultante R. Maintenant, si le corps tend à se mouvoir autour d'un point quelconque O, le point A, qui est le point commun d'application des deux forces PQ et de la résultante R, décrit un petit arc de courbe que l'on considérera comme une droite sur laquelle toutes ces forces pourront être projetées, et l'on sera amené à conclure encore que le travail de la résultante est égal au travail total des composantes. Pareillement on déduirait que le moment de la résultante R par rapport au point O équivaut au moment total des deux composantes P et Q par rapport au même point.

16. *Extension du théorème des moments.* — Les relations précédentes que nous venons d'établir, soit entre les quantités de travail, soit entre les moments des forces et de leur résultante, ont lieu de quelque manière que le point de rotation O ait été choisi

dans le plan des forces ; mais elles sont particulières au mouvement des points de concours de leurs directions considéré comme leur point d'application. Ces relations subsisteront-elles en ayant égard au mouvement des véritables points B, C et D, où les forces P, Q, R sont appliquées sur le corps. Remarquez que chaque moment respectif ne dépend que de l'intensité de la force et de la grandeur de la perpendiculaire abaissée du point O sur sa direction. Le moment de la force P, par exemple, sera le même, soit qu'on la suppose appliquée au point extérieur A, soit qu'on la suppose appliquée au point B, où sa direction rencontre la surface du corps. Par conséquent, le théorème des mouvements est vrai, lors même que les deux composantes P et Q ont des points d'application différents.

17. *Extension du théorème des quantités de travail.* — Si l'on parvient à démontrer que la quantité de travail d'une force est la même, quel que soit le point qu'on choisisse sur sa direction pour point d'application, il est évident que le théorème des quantités de travail évaluées d'après le mouvement du point de concours commun à deux forces et à leur résultante est également applicable lorsque les quantités de travail de ces forces sont mesurées d'après le mouvement de leur point respectif d'application : or, il peut arriver trois cas, selon que le corps a un mouvement de rotation, ou un mouvement de translation, ou un mouvement quelconque.

PREMIER CAS. — Le corps et par conséquent la direction AP d'une force quelconque étant supposé avoir un mouvement de rotation autour d'un point O (fig. 37), deux points quelconques A et B de cette droite décrivent autour de ce point des angles égaux et tels que les petits arcs Aa, Bb sont proportionnels à leurs rayons respectifs AO et BO. On aura donc $\frac{Aa}{AO} = \frac{Bb}{BO}$. Or la quantité de travail de P, estimée par le mouvement de son point d'application supposé en A, a pour mesure $P \times \frac{Aa}{BO} \times Op$. Estimée d'après le mouvement d'un autre point B d'application, elle a pour mesure $P \times \frac{Bb}{BO} \times Op$; et ces deux quantités de travail sont égales, puisque leurs expressions se composent des mêmes facteurs P, Op et des facteurs égaux $\frac{Aa}{AO}$, $\frac{Bb}{BO}$, ...

DEUXIÈME CAS. — Si le corps n'a qu'un mouvement de translation, les deux points d'application quelconques A et B (fig. 38), pris sur la direction de la force P, décrivent des chemins Aa et Bb qui sont égaux et parallèles. Par conséquent leurs projections Aa', Bb', sur la direction de P, sont égales, ainsi que les deux quantités de travail $P \times Aa'$ et $P \times Bb'$.

TROISIÈME CAS. — Le mouvement étant quelconque, supposons que la droite AP d'une force quelconque ait pris, en vertu de ce mouvement, la position A_1B_1, et que deux points quelconques A et B de la direction de la force se soient transportés en a et b, sur la droite A_1B_1 (fig. 39). Ce mouvement peut être regardé comme décomposé : 1° en un mouvement de rotation autour d'un point quelconque O, centre d'un cercle tangent aux deux positions infiniment voisines de la droite ; 2° en un mouvement de translation qui s'opère sur la deuxième position. Ainsi, Aa et Bb étant les véritables chemins des deux points d'application quelconques A et B, ces chemins seront encore les véritables espaces décrits si ces deux points parcourent d'abord les petits arcs concentriques AA_1 et BB_1 autour de O, et si les mêmes points A et B se transportent ensuite en a et b par un mouvement commun de translation. Projetons ces divers mouvements sur la direction AP de la force. $P \times Aa'$ sera sa quantité de travail d'après le mouvement Aa du point d'application A, et $P \times Bb'$ celui de la même force estimé d'après le mouvement du point B. Or, on a

$$Aa' = A_1'a' - A_1'A, \quad \text{et} \quad Bb' = B_1'b' - B_1'B.$$

En multipliant la force P par $A_1'a'$ ou par $B_1'b'$, les travaux élémentaires seraient ceux qui auraient lieu s'il n'y avait eu qu'un simple mouvement de translation dans le sens de AB, et nous avons démontré par le deuxième cas qu'ils seraient égaux. Donc, on a

$$A_1'a' = B_1'b'.$$

De même, les produits $P \times A_1'A$ et $P \times B_1'B$ sont égaux, attendu qu'ils mesurent les quantités de travail dues au mouvement de A et B dans l'hypothèse où la droite AB aurait un simple mouvement de rotation autour de O. D'où l'on tire

$$A'_1A = B_1'B,$$

et, par suite, $A_1'a' - A_1'A = B_1'b' - B_1'B$,

ou $Aa' = Bb'$, ou enfin $P \times Aa' = P \times Bb'$.

Ainsi, la relation qui a lieu entre la quantité de travail de la résultante et le travail total des composantes subsiste dans tous les cas, quels que soient les points d'application de ces forces et la nature de leurs mouvements.

18. *Cas où le moment de la résultante est nul.* — Nous avons fait voir (2e partie, 14) que, r, p, q étant les bras de levier de la résultante R et de ses deux composantes P, Q, on avait $Rr = Pp \pm Qq$ (fig. 35). On remarquera d'abord que le moment de la résultante Rr ne peut être nul sans que les moments des composantes Pp et Qq ne soient égaux et de signes contraires. Or, le produit Rr devient 0, ou $R = 0$, ou pour $r = 0$. Dans le premier cas la résultante est nulle, et il est évident que l'équilibre du corps subsiste de lui-même. Dans le deuxième cas, la perpendiculaire r, abaissée du centre de rotation sur la direction de la résultante, étant réduite à zéro, cela indique que la direction de cette dernière passe par le point de rotation ou par le point fixe. D'un autre côté, l'égalité des moments des composantes revenant à l'égalité des quantités de travail de ces forces, et ces quantités s'entre-détruisant puisqu'elles sont de signe contraire, on voit que le corps est en équilibre, autour d'un point fixe sous l'action de deux forces, lorsque leur résultante passe par ce point.

II.

FORCES PARALLÈLES.

19. *Analogie entre deux forces concourantes et deux forces parallèles.* — Les principes qui ont été exposés sur la combinaison de deux forces concourantes P et Q agissant contre un corps de forme quelconque nous ont appris, 1° que leur résultante R concourt au point O (fig. 40) d'intersection des deux composantes; 2° que le moment de la résultante pris par rapport à un point K quelcon-

que, situé dans le plan des forces, est égal au moment total des composantes, c'est-à-dire à la somme ou à la différence de leurs moments, selon qu'elles tendent à faire tourner le corps autour d'un point K dans le même sens ou dans des sens différents. Les propriétés indépendantes du point de l'éloignement du point commun d'application O ne cessent point d'avoir lieu lorsque ce point de convergence est placé à une très-grande distance, ou lorsque les forces deviennent sensiblement parallèles. On peut même regarder ces forces comme telles dès que leur point de concours est suffisamment éloigné. On sait, par exemple, que l'action de la gravité converge vers le centre de la terre et que trois corps pesants liés entre eux par des barres rigides sont soumis à des forces analogues à des forces précédentes P, Q, R; toutefois on regarde ces forces de pesanteur comme parallèles, et alors nos théorèmes leur deviennent applicables. Ainsi, la résultante de deux forces parallèles est située dans leur plan et leur est parallèle; son moment par rapport à un point quelconque de leur plan est égal au moment total des deux composantes.

10. *Résultante de deux forces parallèles, croisant par rapport à un point.* — Passant ainsi à la limite de deux forces concourantes, considérons deux forces parallèles P et Q appliquées aux points A et B d'un corps (fig. 41). Soit pris sur leur plan un point arbitraire K, et une perpendiculaire à K abaissée de ce point sur ces forces. Enfin R est supposée être leur résultante. On aura

$$R \times Kc = \overline{P \times Kac} + \overline{Q \times Kb},$$

parce que les deux forces P et Q tendent à faire tourner le corps du même côté autour du point K. Ce résultat étant indépendant de la position de K, imaginons qu'il soit placé en a. On a

$$Ka = 0,\ K = ac \text{ et } Kb = ab,$$

l'expression précédente devient $R \times ac = Q \times ab$. Si le point K est transporté en b, on a $Ka = bc$, $Ka = ab$ et $Kb = 0$. Cette substitution étant faite dans l'égalité générale des moments, on a $R \times bc = P \times ab$. Ajoutant à cette dernière l'égalité particulière $R \times ac = Q \times ab$, on trouve $R(ac + bc) = (P + Q)\,ab$, ou $R = P + Q$ à cause de $ac + cb = ab$. Donc la résultante de deux forces parallèles agissant dans le même sens est égale à leur

somme. Supposons que le point K soit placé au point c; les forces P et Q tendront à faire tourner le corps en sens contraire autour. Les moments de P et Q seront alors de signes différents, et leur égalité générale deviendra $R \times Kc = \overline{P \times Ka} - \overline{Q \times Kb}$. D'ailleurs, dans la position du point K en c, on a $Kc = 0$, ou $R \times Kc = 0$, $Ka = ac$ et $Kb = bc$. Faisant ces substitutions dans l'égalité générale, on trouve $P \times ac = Q \times bc$; ce qui nous apprend que la résultante partage l'intervalle des points d'application des composantes en parties réciproquement proportionnelles à ces forces lorsque ces points sont situés sur une droite perpendiculaire à leur direction. Si les deux forces P et Q, au lieu d'être dirigées dans le même sens, sont dirigées dans des sens opposés, le moment de la résultante devient ici égal à la différence des moments des composantes, et en passant par une série d'opérations analogues aux précédentes, on trouve que la résultante R est égale à $P - Q$, c'est-à-dire à la différence des composantes, et qu'elle agit dans le sens de la plus grande.

21. *Extension des propriétés des forces parallèles, leurs points d'application étant quelconques.*—Ces théorèmes ne sont encore démontrés que lorsque les points d'application des forces P, Q, R appartiennent à une même droite Kb, perpendiculaire à leur direction; mais les deux composantes P et Q appliquées à un corps ont le plus généralement leurs points d'application sur une droite rigide AB, oblique par rapport à la direction de ces forces. Soit pris un point quelconque K' (fig. 42) sur cette droite, et abaissons une perpendiculaire $K'B''$ à ces forces. Les points A'', B'', C'' des composantes et de la résultante R satisferont aux relations précédentes, et comme les parties $K'C''$, $K'A''$ et $K'B''$ sont proportionnelles aux parties obliques $K'C$, $K'A$ et $K'B$, on aura encore

$$R \times K'C = \overline{P \times K'A} + \overline{Q \times K'B}.$$

Quant au point d'application de la résultante sur le corps, après l'avoir déterminé en C sur la droite AB, on pourra supposer que la résultante est appliquée en c, à l'extérieur du corps. On remarquera que, dans l'égalité $R \times K'C = \overline{P \times K'A} + \overline{Q \times K'B}$, il ne s'agit plus seulement des perpendiculaires abaissées d'un même point sur les composantes parallèles et sur leur résultante; elles sont ici remplacées par les simples distances de leurs points respectifs

d'application à un point quelconque K', situé comme eux sur une même ligne quelconque.

22. *Moment de deux forces parallèles par rapport à une droite.* — Lorsque deux forces sont parallèles, on ne prend pas seulement leurs moments par rapport à un point et on emploie souvent leurs moments par rapport à une droite. De tels moments sont le produit de chaque force et de la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur la droite ou *axe des moments.* Ainsi, A, B (fig. 43) étant les points d'application des forces PQ et de leur résultante R, LK' l'axe des moments qui rencontre en K' la droite AB de leurs points d'application, on a

$$R \times K'C = \overline{P \times K'A} + \overline{Q \times K'B},$$

ou

$$R = \overline{P \times \frac{K'A}{K'C}} + \overline{Q \times \frac{K'B}{K'C}}.$$

Soient AA', BB' et CC' les perpendiculaires abaissées de ces points sur LK', on voit que ces perpendiculaires sont proportionnelles à $K'A$, $K'B$, $K'C$, et que l'on a

$$\frac{K'A}{K'C} = \frac{AA'}{CC'}, \text{ et } \frac{K'B}{K'C} = \frac{BB'}{CC'};$$

d'où

$$R = \overline{P \times \frac{AA'}{CC'}} + \overline{Q \times \frac{BB'}{CC'}},$$

et, par suite,

$$R \times CC' = \overline{P \times AA'} + \overline{Q \times BB'}.$$

Donc, le moment de la résultante par rapport à une droite est égal au moment analogue totale des composantes.

23. *Moment de deux forces parallèles par rapport à un plan.* — En abaissant des points d'application de deux forces parallèles et de leur résultante, des perpendiculaires à un plan que l'on nomme *Plan des moments,* on reconnaît, comme pour les moments par rapport à une droite, que le moment de la résultante par rapport à un plan est égal au moment total de ses composantes.

24. *Forces parallèles en nombre quelconque.* — Supposez que les forces parallèles soient en nombre quelconque, et que vous en ayez,

par exemple, cinq à six. Cherchez la résultante de deux quelconques d'entre elles; composez cette résultante avec la troisième force, puis cette résultante des trois premières avec la quatrième, puis encore la résultante des quatre premières avec la cinquième, et ainsi de suite. La résultante totale ainsi obtenue est égale à la somme des forces composantes ou à la différence entre la somme de celles qui agissent dans un sens et la somme de celles qui agissent dans un sens opposé. De plus, son action a lieu du côté de la plus grande des deux sommes. On voit encore que le moment de la résultante totale est égal au moment total des composantes, etc. — Des hommes qui font effort sur des cordons parallèles, des chevaux qui tirent sur leurs traits attachés à des palonniers, sont des exemples de forces parallèles qui se présentent fréquemment dans la pratique.

25. *Travail de la résultante de plusieurs forces parallèles.* — Je suppose qu'un corps soit tiré dans un sens par un certain nombre de forces parallèles P, Q, R (fig. 44), et dans un autre sens par les forces parallèles aux premières P', Q', R', et qu'il soit entraîné dans le sens des forces P, Q, R. Il est visible que le chemin décrit par le point d'application d'une force est ici le même quelle que soit la force; et qu'ainsi son travail sera donné par le produit de cette force et du petit chemin commun à tous les points d'application. Le travail total est, comme on sait, égal à la somme des travaux des forces P, Q, R qui agissent dans un sens, diminuée de la somme des travaux des forces P', Q', R' qui agissent dans le sens opposé, c'est-à-dire, qu'il équivaut au petit chemin commun multiplié par la somme ou la différence de toutes les composantes, ou enfin par la résultante. Or, le produit du petit chemin commun et de la résultante n'est autre chose que le travail de cette dernière. Donc le travail de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles est égal au travail total des composantes.

26. *Emploi des moments pour trouver la position de la résultante.* — D'après les théorèmes sur les moments, on sait que le moment de la résultante par rapport à un plan est égal au moment total des composantes. Appelons K ce moment total, r la distance du point d'application de la résultante au plan. On a

$$R \times r = K; \quad \text{d'où} \quad r = \frac{K}{R}.$$

r est précisément la distance entre le plan des moments et un autre plan parallèle sur lequel la résultante est située. Si l'on connaissait encore le moment total des composantes par rapport à un autre plan, on aurait, comme précédemment, un nouveau plan devant contenir la résultante, en sorte que cette dernière serait à l'intersection des deux plans ainsi obtenus.

37. ***Emploi de la romaine.*** — La romaine consiste en un fléau qui tourne autour d'un axe C (fig. 45), suspendu à un point fixe et dont l'un des bras reçoit à son extrémité A le corps P dont on veut trouver le poids, tandis que l'on applique sur l'autre bras un poids constant Q à une distance convenable BC. Pour qu'il y ait équilibre, il faut (2e partie, 18) que la résistance des forces P et Q passe par le point fixe C, ou que l'on ait $P \times AC = Q \times BC$. D'où $BC = \frac{P}{Q} \times AC$, et par suite $BC = P \times AC$. En supposant que le poids étalon Q soit de 1 kilogr., si le corps P pèse 1^k, 2^k, 3^k, 4^k, 5^k,.... les distances auxquelles le poids constant lui fera équilibre seront AC, $2AC$, $3AC$, $4AC$, $5AC$,.... Ainsi, la division de la romaine se borne à porter sur son bras le plus long des divisions égales au bras le plus court : si ce dernier est de 1 centimètre les divisions de l'instrument seront espacées entre elles de 1 centimètre. Ainsi, par exemple, lorsque le poids curseur sera à 15 centimètres du point C le corps pèsera 15 kilogr. La construction de la romaine est, comme on le voit, basée sur un principe fort simple ; elle donne lieu néanmoins à des considérations délicates, sur lesquelles nous reviendrons quand il sera question du levier.

III.

CENTRE DE GRAVITÉ DES CORPS.

38. ***Centre des forces parallèles.*** — Quel que soit l'angle de deux forces parallèles P, Q avec la droite AB (fig. 46), qui passe par leur point d'application, l'intensité de leur résultante R et la position C de son point d'application sont les mêmes, parce que l'on a toujours $R = P + Q$, et $P \times AC = Q \times BC$. Par conséquent, ce point C demeurera invariable, si les composantes, restant paral-

lèles entre elles, viennent à tourner autour de leurs points d'application respectifs. Pareillement, si l'on a trois forces P, Q, S, et que, joignant le point d'application C de la résultante R des deux premières au point D d'application de la troisième, on cherchera celui de la résultante des deux forces R et S, ou des trois forces données P, Q, S; on reconnaîtra que le point O où leur résultante T est appliquée, est indépendant de l'inclinaison des trois composantes autour de leur point d'application. On étendrait facilement ce raisonnement à un nombre quelconque de forces parallèles, lesquelles auront un point par lequel leur résultante passera constamment. Ce point est ce qu'on nomme *Centre des forces parallèles*.

29. *Centre de gravité.* — Un corps quelconque se compose d'une infinité de parties pesantes qui sont comme les points d'application d'autant de forces verticales ou parallèles. Leur résultante est ici une force égale à leur somme ou au poids total, et son point d'application s'obtiendra par la combinaison de ces forces parallèles entre elles. Ce point, qui doit appartenir au corps comme les points d'application des forces parallèles dues à la pesanteur, s'appelle CENTRE DE GRAVITÉ.

30. *Détermination pratique du centre de gravité d'un corps.* — Le centre de gravité d'un corps étant le centre de toutes les forces verticales qui sollicite les molécules pesantes dont il se compose, il est évident qu'il doit demeurer invariable lorsque ces forces sans cesser d'être parallèles, s'inclinent autour de leur point d'application. Au lieu de faire tourner les forces, que l'on fasse au contraire tourner le corps. Dans ce mouvement les forces conserveront leur direction verticale, et leur résultante, c'est-à-dire le poids total, exercera toujours son action suivant une verticale passant par le même point, c'est-à-dire par le centre de gravité du corps. De là résultent deux moyens fort simples de le trouver quand le corps est invariable. Un corps suspendu à un fil s'arrange de telle sorte que l'effort pour le soutenir fait équilibre à la résultante de tous les points partiels des molécules de ce corps. Ainsi, la direction AC (fig. 47) du fil qui le supporte est immédiatement opposée à la verticale qui passe par le centre de gravité G, ou bien le point C par lequel le corps est suspendu au fil et le centre de gravité G appartiennent successivement à la verticale AC qui passe par le point

d'attache extérieur *A*. Si l'on change le point du corps *C* par lequel il est suspendu au fil, on aura autant de lignes droites qui concourront au centre de gravité.

Par la même raison, il est possible de soutenir le corps sur une pointe (fig. 48) toutes les fois que la verticale de son centre se confond avec celle de la pointe, et toutes les positions du corps qui satisfont à cette condition donnent autant de lignes devant contenir le centre de gravité. Les points supérieur ou inférieur où deux de ces lignes percent respectivement la surface du corps étant connus, on conçoit que des ouvertures rectilignes pratiquées d'outre en outre donneraient le centre de gravité par leur intersection commune. Reste à trouver les points inférieur et supérieur où une même verticale concourant au centre de gravité d'un corps rencontre sa surface. Suspendez ce corps à un fil, alignez de part et d'autre deux fils à plomb sur le fil de suspension, et faites tracer sur la surface du corps, avec un crayon, la section comprise dans ce plan vertical. Recommencez l'opération par un nouveau plan vertical passant par le même fil de suspension, les deux sections ainsi obtenues se croiseront aux deux points cherchés.

31. *Recherche du centre de gravité par le calcul ou par la géométrie.* — Cette méthode devient impraticable pour les corps très-lourds, ou pour ceux qui sont fixes, ou pour ceux qui n'existent pas encore et dont la construction est seulement en projet. En général, lorsque la forme d'un corps est définie géométriquement ou par un dessin, voici comment on peut connaître son centre de gravité. Il faut diviser le corps par une suite de plans, chercher le moment du poids de chaque partie par rapport à un plan quelconque, et prendre la somme de tous ces moments; cette somme, d'après ce qu'on a vu dans la théorie des forces parallèles, est égale au moment du poids total, c'est-à-dire, au produit de ce poids multiplié par la distance de son centre de gravité à un plan arbitraire. Partant cette distance sera donnée par le quotient de la somme des moments partiels divisée par le poids total. Si l'on opère de même par rapport à un deuxième et un troisième plan arbitraire, on aura deux nouvelles distances du même centre. Ainsi, ce dernier sera situé à l'intersection des trois plans respectivement parallèles à ceux des moments. Mais cette méthode, déjà fort longue en soi, peut être abrégée selon les circonstances, surtout quand il s'agit de trouver le centre de

gravité des corps *homogènes*. On nomme ainsi ceux dont deux parties quelconques pèsent le même poids à égal volume.

82. *Centre de gravité des corps réguliers.* — L'expérience apprend qu'une barre AB (fig. 49) parfaitement homogène, en bois ou en fer, que l'on suspend par son milieu C à un fil, y demeure en équilibre. Le centre de gravité de cette barre est donc situé au milieu de sa longueur. On voit aussi sans difficulté qu'il doit être dans le milieu de l'épaisseur. Si la barre supporte à ses deux bouts une sphère M, elle demeure encore en équilibre quand elle est suspendue par son milieu. Le centre d'une sphère en est également le centre de gravité, car en la suspendant à un fil EA par un des points quelconques de sa surface, la verticale du fil passe constamment par le centre C de la sphère. C'est un principe général que le centre de gravité de tous les corps réguliers et homogènes se confond avec leur centre de figure. Voilà pourquoi un prisme droit, ou un cylindre droit ont leur centre de gravité sur le milieu de leur longueur, et que ceux d'un cercle ou d'une droite sont placés l'un au propre centre du premier, l'autre au milieu de la droite. C'est ici le lieu d'observer que le centre de gravité d'une surface n'est autre chose que celui d'un corps d'une très-petite épaisseur, et tel qu'une feuille de tôle, de papier, etc. La même considération s'applique à une ligne droite dont l'épaisseur et la largeur sont très-petites par rapport à sa longueur.

83. *Centre de gravité des corps symétriques.* — On dit qu'un corps homogène est symétrique par rapport à un plan, lorsque ce dernier coupe en deux parties égales toutes les perpendiculaires qui lui sont abaissées et qui sont terminées à deux extrémités opposées du corps. Il est symétrique par rapport à une droite, quand il a deux plans de symétrie passant par cette droite. Une surface plane est symétrique par rapport à une droite, lorsque celle-ci coupe également les perpendiculaires terminées de part et d'autre au contour de la surface. Dans tous les cas, *le centre de gravité de ces corps ou surfaces est situé dans leur plan ou dans leur droite de symétrie.* Considérons, par exemple, une courbe ayant AB (fig. 50) pour droite de symétrie, et pour laquelle on a déterminé les centres de gravité G et G' des moitiés supérieure et inférieure. Ces deux moitiés, étant rabattues l'une sur l'autre, leurs centres de gravité G et G' devront

coïncider ; ce qui revient à dire, qu'avant le rabattement ces mêmes centres étaient situés sur une droite GG' perpendiculaire à AB et à des distances égales de cet axe. Cela posé, si l'on concentre ces deux moitiés à leurs centres respectifs G et G', GG' n'est plus qu'une droite terminée par deux points matériels dont le centre de gravité est évidemment à son milieu O ou sur AB. — Un raisonnement analogue pourrait être appliqué à un corps à trois dimensions symétriques par rapport à un plan. — Le centre de gravité d'une surface qui a deux axes de symétrie, est à l'intersection de ces deux axes. Le grand axe et le petit axe d'une ellipse sont des axes de symétrie qui se coupent au centre de l'ellipse. Ce qui indique pourquoi ce centre est aussi celui de gravité de l'aire plane contenue dans cette courbe. — Le rectangle a aussi son centre de gravité à l'intersection de ses diagonales, parce que cette intersection coïncide avec l'intersection des perpendiculaires qui passent par les milieux des côtés opposés. Lorsqu'un volume a une droite de symétrie ou deux plans de symétrie, nous avons dit que son centre de gravité devait se trouver sur cette droite. — Le cylindre droit à base elliptique a deux plans de symétrie déterminés par les grands et petits axes de ses deux bases opposées. Son centre de gravité se trouve donc sur la droite qui joint leur centre G (fig. 51), et il est évident qu'il sera en même temps au milieu de cette droite.

D'autres corps sont partagés symétriquement d'une infinité de manières. Telle est la sphère dont tous les plans de symétrie passant par le centre ; c'est pourquoi ce dernier en est aussi le centre de gravité.

34. *Centre de gravité des corps réguliers non homogènes.* — Si le corps régulier n'est pas homogène, on le regarde d'abord comme tel, et le centre de gravité O (fig. 52), obtenu dans cette hypothèse, donne lieu à une première approximation. On supposera ensuite que le poids du corps, supposé homogène, y soit concentré ; après quoi, retranchant ce poids p du poids total P, on observera que la différence $P - p$ est le reste du poids négligé jusqu'alors à l'égard de la partie plus pesante. Soit O' le centre de gravité du volume de cette dernière, il faudra partager la droite OO' par un point K, tel que l'on ait

$$p \times OK = (P - p)\, KO',$$

et le point K sera le centre de gravité réel.

35. *Centre de gravité des corps coupés par tranches parallèles.* — Quand on peut partager un corps en une suite de tranches parallèles et connaître le centre de gravité de chacune d'elles, le centre de gravité de tout le corps est sur la ligne qui contient les centres de toutes les tranches. En effet, composez deux de ces tranches entre elles, puis leur résultante avec une troisième et ainsi de suite, et vous reconnaîtrez que le centre de gravité total doit appartenir à cette ligne.

36. *Parallélogramme, parallélipipède cube.*—Soit, par exemple, le parallélogramme *ABCD* (fig. 53), décomposé en une suite de tranches très-étroites et parallèles au côté *AB*, le centre de gravité de chacune d'elles étant à leur milieu, et tous ces milieux étant situés sur la droite *EF* qui passe par les milieux des côtés opposés *AB* et *DC*, il en résulte que le centre de gravité du parallélogramme doit se trouver sur cette droite, et comme on peut voir aussi de la même manière qu'il est contenu sur la droite *HI* qui joint les milieux des deux autres côtés opposés *AD* et *BC*, il est donc à leur intersection *O*. — Un raisonnement analogue conduirait à prouver que le centre de gravité d'un cube ou d'un parallélipipède quelconque est à l'intersection des trois droites qui passent respectivement par le centre de gravité de deux faces opposées.

37. *Triangle.* — Le triangle *ABC* (fig. 54) étant partagé en tranches très-minces et parallèles au côté *AC*, on reconnaît comme précédemment que les centres de ces tranches sont tous compris sur la ligne *BD* qui va du sommet *B* au milieu *D* du côté *AC*, et qu'ainsi cette droite doit contenir le centre de gravité du triangle. Ce même centre, par une raison analogue, doit également appartenir aux deux droites qui joignent chacun des deux autres sommets *A* et *C* aux milieux *F* et *E* des côtés opposés *BC* et *AB*. Donc enfin le centre de gravité d'un triangle est à l'intersection commune des trois droites menées de chaque sommet au milieu du côté opposé. Il est aussi celui du système de trois boules égales placées aux sommets du même triangle; car le centre particulier de gravité de deux boules placées aux extrémités de la droite *AC* est sur le milieu *D* de cette droite, et ce dernier point sera tel qu'on pourra y concentrer les deux boules. Joignons le point *D* à la troisième boule *B* par une droite *BD*; celle-ci contiendra évidemment le centre de gra-

vité des trois boules ; et comme on reconnaîtrait semblablement que ce même centre appartient encore aux droites CE et AF, on voit qu'il coïncide avec celui du triangle. Remarquons que, puisqu'il y a deux boules à l'extrémité D de la droite BD, et une seule au sommet B, le centre de gravité G de toutes trois partagera la ligne BD en deux parties, telles que

$$DG = \frac{1}{3}BG = \frac{1}{3}AB.$$

Donc enfin le centre de gravité d'un triangle est situé sur la droite qui passe par le milieu de sa base et par le sommet opposé ; il se trouve sur le premier tiers de cette droite à partir de la base. On voit encore que sa hauteur au-dessus de la base est le tiers de la hauteur du sommet opposé.

38. *Quadrilatère quelconque.* — La règle suivante a pour but de trouver le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque $ABDC$ (fig. 55). Menez les deux diagonales AD et BC qui se coupent en F ; portez la partie la plus courte AF de l'une d'elles AD sur elle-même de D en H, et après avoir joint le point H au milieu E de l'autre diagonale BC, divisez l'intervalle EH en trois parties. Le centre de gravité G du quadrilatère sera au premier tiers de cet intervalle à partir du milieu de la deuxième diagonale.

39. *Pyramide triangulaire.* — Une suite de plans parallèles à la base ABC de la pyramide triangulaire $SABC$ (fig. 55 *bis*) donne lieu à des tranches triangulaires parfaitement semblables à cette base, et tous leurs centres de gravité seront sur la droite SG' qui va du sommet S au centre de gravité G' de la face ABC, parce qu'ils sont les uns et les autres semblablement placés. Ainsi la droite SG' doit contenir le centre de gravité de la pyramide. Comme il y a quatre sommets et quatre bases dans la pyramide triangulaire et que celle-ci peut se décomposer en tranches parallèles à toutes ces bases, on voit que *son centre de gravité est à l'intersection des quatre droites qui joignent chaque sommet au centre de gravité de la base opposée*. Ce centre de gravité est aussi celui de quatre boules égales respectivement placées au sommet de la pyramide. Car on reconnaît sans peine que le centre de gravité des trois premières A, B, C coïncide avec celui du triangle ABC, et que celui de toutes quatre appartient à la droite qui joint le sommet S au centre de gravité

de la base ABC. Maintenant que nous savons que le centre de gravité de la pyramide est précisément celui des quatre boules égales, nous pouvons en trouver la position sur SG' en observant que trois d'entre elles peuvent être considérées comme concentrées en G' et que la quatrième est seule située sur l'autre extrémité S de la droite. Ainsi le point G doit partager la droite SG' en parties réciproquement proportionnelles aux poids que ses deux bouts supportent et qui sont triples l'un de l'autre; donc, on a

$$GG' = \frac{1}{3}SG, \quad \text{ou} \quad GG' = \frac{1}{4}SG';$$

d'où il résulte que *le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est sur la droite qui joint un sommet au centre de gravité de la base opposée et au premier quart de cette droite à partir de la base.* Il est encore évident que la hauteur de ce même centre de gravité au-dessus de la base est le quart de la hauteur du sommet opposé.

40. *Pyramide à base quelconque.* — La proposition précédente est également applicable à une pyramide dont la base est un polygone (fig. 56). Non-seulement son centre de gravité est sur la droite qui joint le centre de gravité de la base au sommet, mais encore on peut décomposer la base en une suite de triangles qui servirent eux-mêmes de bases à pareil nombre de pyramides triangulaires dont la somme forme la pyramide totale. Ces pyramides ayant pour sommet commun celui de la pyramide donnée, on voit que tous leurs centres de gravité, ainsi que celui de cette dernière, seront situés sur un plan parallèle à celui de la base et élevés du quart de la hauteur de celle du sommet. Donc, enfin, *le centre de gravité cherché est au premier quart à partir de la base sur la droite qui joint le centre de gravité de la base au sommet opposé.* De la pyramide on passe au cône à base quelconque. Pour avoir le centre de gravité de celui-ci il suffit de joindre le centre de gravité de la base au sommet par une droite et de déterminer, à partir de la base, le premier quart de cette droite.

41. *Polyèdre quelconque.* — Puisque tout polyèdre se décompose en pyramides triangulaires et qu'en vertu du théorème des moments, le moment du poids ou du volume de ce polyèdre, par rapport à un plan, est égal à la somme du moment des poids ou des volumes de ces pyramides, il est toujours possible de trouver le

position du centre de gravité de ce polyèdre par rapport à trois plans quelconques.

42. *Corps de forme quelconque.* — Lorsqu'un corps est terminé par des surfaces courbes, ou une aire plane par une courbe quelconque, il faut décomposer le corps ou la surface en petites parties de forme analogue aux précédentes, calculer chaque moment partiel par rapport à un plan ou à une droite, et diviser la somme de ces moments par le volume total ou par la surface que l'on considère. S'il s'agit, par exemple, d'obtenir le centre de gravité de l'aire plane quelconque *CabDdc* (fig. 57), tirons dans son plan une droite quelconque *AB*, et partageons cette aire en une suite de tranches très-minces et perpendiculaires à cette droite. La tranche *abcd* pourra être regardée comme un rectangle dont le centre de gravité *g* est à son milieu. Son moment partiel sera égal à *abdc* × *gi*, *gi* étant la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce centre de gravité, ou une moyenne entre les distances *af* et *ef* des extrémités de la tranche à la droite *AB*. Prenant ensuite la somme de tous les moments partiels trouvés de la même manière, on la divisera par l'aire totale mesurée d'après la méthode de Thomas Simpson, et le quotient donnera la distance du centre de gravité cherché à la droite *AB*. On recommencera l'opération par rapport à une autre droite, pour que la position de ce centre de gravité soit complétement arrêtée.

43. *Utilité du centre de gravité pour la mesure de certains volumes.* — La considération du centre de gravité est très-utile pour la cubature de certains volumes, fort difficiles à évaluer par les méthodes ordinaires. Tels sont la vis, l'échiffre d'un escalier. Telle est encore la surface de révolution engendrée par le mouvement d'une courbe plane *CDE* (fig. 58) autour d'une droite *AB* situé dans son plan. Supposez cette courbe découpée en petites parties rectangulaires dont les côtés soient perpendiculaires et parallèles à l'axe. Chaque rectangle engendrera autour de l'axe un petit anneau partiel, et la somme de tous ces anneaux réunis donnera le volume total de la surface de la révolution. Soit *r* la distance depuis l'axe jusqu'au centre d'un petit rectangle quelconque. On sait que le volume d'un anneau dont le profil est un rectangle a pour mesure l'aire *a* de ce rectangle multipliée par la circonférence moyenne de l'anneau,

laquelle est ici $2\pi r$ (*π est le rapport $\frac{22}{7}$ de la circonférence au diamètre*) : car la base circulaire d'un tel anneau étant développée en ligne droite forme un trapèze dont la longueur moyenne est précisément celle de la circonférence moyenne $2\pi r$ développée. Donc, enfin, le volume de l'anneau élémentaire engendré par le rectangle que l'on considère est exprimé par le produit $2\pi r \times a$, ou $2\pi \times ar$. Les anneaux qu'engendrent d'autres parties rectangulaires a', a'',.... ont de même pour expression de leurs volumes respectifs, $2\pi \times a'r'$, $2\pi \times a''r''$. Partant le volume total de la surface de la révolution sera égal à

$$2\pi\,(ar + a'r' + a''r'' + \ldots\ldots).$$

Or, le produit ra étant le moment d'un élément plan par rapport à l'axe, la somme $ar + a'r' + a''r''$ sera égale au moment de l'aire totale A de la courbe, ou au produit de cette aire et de la distance R de son centre de gravité à l'axe. Par conséquent le volume total devient $2\pi R \times A$; ce qui indique que le volume d'une surface de révolution est donné par le produit de l'aire de sa courbe génératrice et de la circonférence qu'a décrite le centre de gravité de cette aire. Si, au lieu d'une circonférence, le centre de gravité n'en décrivait que le dixième, le quinzième, etc., le volume engendré serait réduit au dixième, au quinzième de celui qui aurait lieu pour une circonférence complète; mais ce volume partiel n'en serait pas moins donné par le produit de l'aire totale de la courbe et du chemin qu'a parcouru son centre de gravité. — Cette dernière remarque s'applique aux corps à profil constant, aux échiffres d'escalier, toutes les fois que ce profil demeure perpendiculaire à une certaine ligne droite ou courbe dans toutes ces positions. Car, chaque portion du corps compris entre deux profils voisins est une véritable surface de révolution qui a le profil pour aire génératrice et dont l'axe est à l'intersection des deux profils, en sorte que ce volume partiel sera donné par le produit du profil et du petit chemin qu'a décrit son centre de gravité dans l'intervalle des deux positions. D'où l'on voit que le volume total se compose du produit de l'aire du profil multiplié par la somme de tous les petits chemins ou par le chemin total que le centre de gravité de l'aire a parcouru. Veut-on avoir le volume d'un échiffre d'escalier contourné en hélice? on calculera l'aire de la section perpendiculaire à l'hélice moyenne (fig. 59), c'est-à-dire, à l'hélice engendrée par le centre de gra-

vité de la section verticale et rectangulaire de l'échiffre. Puis on multipliera l'aire de la section par la longueur de cette hélice, et ce produit sera le volume cherché. — Les déblais d'un fossé en excavation sont ordinairement des volumes dont les profils sont constants. On les évalue en multipliant l'aire du profil constant par le chemin de son centre de gravité.

IV.

MOUVEMENT DE TRANSPORT PARALLÈLE D'UN CORPS OU D'UN SYSTÈME DE CORPS.

44. *Force totale de l'inertie d'un corps ou d'un système de corps dans un mouvement de transport parallèle.* — Le mouvement d'un corps ou d'un système de corps est dit de *transport parallèle*, lorsque tous ses points ou toutes ses parties décrivent simultanément et dans un très-petit temps des chemins égaux et parallèles. Appelons v le degré de vitesse commun imprimé à toutes les parties par les forces motrices pendant le temps t. La force d'inertie f de l'une d'elles dont le poids est p sera mesurée par $\frac{p}{g} \times \frac{v}{t}$. Quant à la force d'inertie f' d'une autre partie du poids p', elle sera $\frac{p'}{g} \times \frac{v}{t}$, attendu que le degré de vitesse imprimé à cette dernière est le même que celui qui a été imprimé à la première pendant le temps t. De plus, comme chaque force d'inertie partielle est située dans la direction du mouvement propre de chaque partie et que tous ces mouvements sont eux-mêmes parallèles, on voit que toutes les forces d'inertie partielles f, f', ... seront aussi parallèles, et que leur résultante, c'est-à-dire la force d'inertie totale F du corps ou du système, sera égale à la somme $f+f'+f''$, ou à ..... $\frac{v}{t}\left(\frac{p+p'+p''\ldots.}{g}\right)$; leurs poids $p+p'+p''+\ldots.$ le poids total P, et $\frac{P}{g}$ la masse totale M. Donc, enfin, on aura

$$F = M \times \frac{v}{t}.$$

Reste à trouver le point d'application de la force F. Or, il faut remarquer que les forces d'inertie partielles $f, f', f'', \ldots$ seront proportionnelles aux poids $p, p', p'', \ldots$ des parties auxquelles elles sont appliquées, et qu'ainsi le point d'application de la résultante F devra se confondre avec le centre d'application des poids $p, p', p'', \ldots$ c'est-à-dire avec le centre de gravité du poids entier du système. Donc, la force totale d'inertie d'un corps ou d'un système de corps mus d'un mouvement parallèle se mesure par la masse entière du corps que l'on multiplie par le rapport du petit degré de vitesse imprimé et du petit temps pendant lequel il a été communiqué. Enfin, cette force totale d'inertie a son point d'application au centre même de gravité du corps ou du système de corps. C'est par ce motif qu'Euler avait aussi nommé le centre de gravité, *centre d'inertie*. Toutefois ces deux points ne coïncident que quand les mouvements sont parallèles, et cette coïncidence cesse pour toutes les autres circonstances de mouvement.

45. *Quantité totale de mouvement d'un corps.* — En désignant par V la vitesse du mouvement parallèle d'un corps supposé uniforme dans un instant quelconque; on sait que la quantité de mouvement d'une de ses parties de poids p est $\frac{p}{g} \times V$. Pour une autre partie de poids p', cette quantité de mouvement serait $\frac{p'}{g} \times V$, et comme toutes ces quantités de mouvement sont parallèles, leur somme donnera la quantité de mouvement totale du corps, laquelle aura pour expression $\left(\frac{p + p' + p'' + \ldots}{g}\right) V$, ou $M \times V$. Ainsi, la quantité de mouvement totale d'un corps mû parallèlement à lui-même est égale à la masse de ce corps multipliée par la vitesse commune à tous ses points.

46. *Mouvement d'un corps lorsque la force motrice est appliquée à son centre de gravité.* — Lorsqu'un certain degré de vitesse v est appliqué à tous les points d'un corps pendant un très-petit temps t, on peut calculer (2e partie, 44) la force d'inertie totale F de ce corps, puisque, M étant la masse de ce dernier, on a

$$F = M \times \frac{v}{t}.$$

Nous savons en outre que cette force d'inertie est appliquée selon la direction commune du mouvement, au centre de gravité du corps. Par conséquent, si l'on suppose qu'à l'instant où le degré v de vitesse va naître, on applique en sens contraire du mouvement et au centre de gravité une force précisément égale à F, il est évident que cette force introduite arrêtera le mouvement. Cela posé, si l'on applique au centre de gravité d'un corps une force motrice X (fig. 60), elle lui imprimera un mouvement de transport parallèle. Car cette force X sera égale et directement contraire à la force d'inertie totale F qu'elle fait naître. Autant il y aura de parties du corps, autant il y aura de petites forces partielles $f, f', f'', \ldots$ dans lesquelles la force F se subdivisera et qui toutes seront proportionnelles aux poids de ces parties. Ainsi, $f = \frac{m}{M} F$, $f' = \frac{m'}{M} F$. Les degrés de vitesse que chacune d'elles imprimeront à leurs parties respectives seront $\frac{f \times t}{m}$, $\frac{f' \times t'}{m'}$, $\frac{f'' \times t''}{m''}$, ou simplement $\frac{F \times t}{M}$, en remplaçant $f, f', f'', \ldots$ par leurs valeurs $\frac{m}{M} F$, $\frac{m'}{M} F, \ldots$ et comme $\frac{F \times t}{M}$ est précisément le degré de vitesse qu'imprime au centre de gravité la force F ou la force X qui lui est égale, on reconnaîtra que *pour qu'un corps reçoive un mouvement de transport parallèle, il faut que la force motrice ou la résultante des forces motrices qui lui sont appliquées passe par son centre de gravité.*

47. *Mouvement d'un corps lorsque la force motrice ne passe plus par le centre de gravité.* — Si la force motrice X était dirigée suivant une droite AB (fig. 61) en dehors du centre de gravité G du corps, on peut prévoir que le mouvement ne sera plus de transport. En effet, si ce mouvement était parallèle dans tous les points, il naîtrait des forces d'inertie partielles dont la résultante passerait par le centre de gravité G, et si on remplace cette dernière par une force F contraire au mouvement, cette force F appliquée en G devrait l'arrêter et produire l'équilibre ; mais il est impossible que deux forces telles que F et X appliquées aux extrémités d'une droite ou barre AG, puissent s'entre-détruire à moins qu'elles n'exercent leur action dans la direction de la barre. En général, si des forces

agissent d'une manière quelconque sur un corps libre, ce dernier reçoit un mouvement compliqué d'un mouvement de translation au centre de gravité, et d'un mouvement relatif ou de rotation autour de ce centre. Les géomètres ont de plus trouvé que, quel que fût le mode d'action des forces, le mouvement du centre de gravité était le même que si toutes les forces y étaient transportées parallèlement. Ainsi, d'après la composition de ces forces, on peut toujours trouver le mouvement du centre de gravité, et c'est surtout ce qu'il importe de connaître. Le centre de gravité de la bombe qui décrit une trajectoire dans l'air, a une vitesse bien autrement rapide que la vitesse relative des autres points autour de ce centre, en sorte que ce mouvement de rotation n'exerce qu'une très-faible influence. La loi du mouvement du centre de gravité est, d'après ce qui précède, facile à trouver. Car si on appelle X la résultante de toutes les forces motrices transportées à ce centre parallèlement à elles-mêmes, F la force d'inertie totale, on a $X = F$. D'ailleurs

$$F = M \times \frac{v}{t} \text{ (2e partie, 44)};$$

d'où l'on tire

$$v = \frac{X \times t}{M}.$$

v sera le petit degré de vitesse imprimée à un instant quelconque pendant le très-petit temps t. Enfin, de ce petit degré de vitesse, on passe aux vitesses acquises au bout d'un temps quelconque et de là aux espaces décrits.

48. *Force vive totale imprimée à un corps mû parallèlement à lui-même.* — Ce que nous avons dit précédemment s'applique encore à la force vive totale que possède un corps lorsque toutes ses parties ont un mouvement de transport parallèle. En effet, V étant la vitesse générale, $\frac{p}{g} \times V^2$ sera la force vive de la partie dont le poids est p, $\frac{p'}{g} \times V^2$ celle de la partie de poids p', etc.; de sorte que la somme de toutes ces forces vives, c'est-à-dire la force vive totale, sera $V^2\left(\frac{p + p' + \ldots}{g}\right)$, ou $M \times V^2$. Ce dernier résultat prouve qu'on a eu raison dans l'estimation de la force vive de la voiture du roulier, de l'évaluer d'après la masse de la voiture

en bloc, au lieu de rechercher séparément les forces vives des roues, du corps de la voiture, etc.

49. *Conclusion relative au mouvement de transport.* — Les considérations que nous venons de développer font voir que dans les mouvements de transport d'un corps ou d'un système de corps, les calculs pourront être simplifiés, puisqu'il est permis de faire abstraction de la forme extérieure des corps, de concentrer leur masse totale autour du centre de gravité, et de raisonner sur ce point comme sur la masse totale.

TRAVAIL DE LA PESANTEUR DANS LE MOUVEMENT D'UN CORPS OU D'UN SYSTÈME DE CORPS. DIVERS ÉQUILIBRES DE CES CORPS.

50. *Théorème général sur le travail de la pesanteur.* — Jusqu'ici nous avons justifié la concentration de la masse d'un corps autour de son centre de gravité, seulement lorsqu'il s'agit d'un mouvement de transport parallèle. Ajoutons que cette concentration devient, en général, impossible lorsque toutes les parties de ce corps reçoivent des mouvements différents les uns des autres. En effet, les forces d'inertie partielles ne sont plus parallèles entre elles, et leur résultante, c'est-à-dire la force d'inertie totale, ne peut plus être égale à leur somme. Mais, si dans ces mouvements divers on veut évaluer le travail de la pesanteur pendant un temps quelconque, les actions exercées par cette force sur toutes les parties du corps ne cessent pas d'être parallèles et verticales, et, comme leur résultante, et le poids total, passe constamment par le centre de gravité, on raisonnera sur le mouvement de ce point comme si la masse y était concentrée, en faisant abstraction du mouvement de rotation de toutes les autres parties du corps; puis on évaluera la quantité de travail dépensée par la pesanteur d'après le produit du poids total et du chemin parcouru par le centre de gravité dans le sens vertical. Si, par exemple, le centre de gravité d'un corps animé d'un mouvement quelconque va de la position G à la position G' (fig. 62) en décrivant une courbe quelconque, on multipliera le poids P de ce corps par la hauteur verticale $G'R$ dont aura monté le centre de gravité, afin d'obtenir le travail dépensé par la pesanteur dans l'intervalle des deux positions. Ce théorème, à l'égard du travail de la pesanteur, loin d'être particulier au mouvement d'un seul

corps, s'étend à l'ensemble des pièces liées entre elles, et telles que les roues, les barres, les leviers, etc., dont une machine est pour l'ordinaire composée. Si vous calculez la somme des quantités de travail dépensée sur chaque pièce par la pesanteur, vous reconnaîtrez que cette somme est la même que la quantité de travail dépensée sur le centre général de gravité de tout le système. En général, soient $p, p', p'', \ldots$ les poids de diverses pièces liées entre elles ; $h, h', h'', \ldots$ les hauteurs dont leurs centres de gravité particuliers montent ou descendent dans le passage d'une position à une autre, en vertu de leurs mouvements respectifs d'ailleurs quelconques ; P la somme de tous ces points, et z la hauteur dont le centre de gravité général est monté ou descendu. On aura

$$Pz = ph + p'h' + p''h'' + \ldots.$$

Dans cette égalité, il faudra ajouter entre eux tous les travaux dépensés par la pesanteur sur les centres de gravité qui ont un mouvement ascendant, et retrancher au contraire de cette somme les quantités de travail relatives aux centres de gravité qui se sont abaissés. Cela résulte de ce principe, déduit de la résultante des forces parallèles (2e partie, 25), que la quantité de travail de leur résultante est égale à la somme des quantités de travail des composantes qui agissent dans un sens, diminuée de la somme des quantités de travail de celles qui agissent dans le sens opposé. On peut en voir la démonstration directe, en rapportant, dans chaque position, à un même plan de niveau AB (fig. 68), des centres de gravité des différents corps, par des perpendiculaires abaissées sur ce plan. Soient $H, H', H'', \ldots$ les distances perpendiculaires à AB des centres de gravité des poids $p, p', p'', \ldots$ lors de la première position du système, P la somme de ces poids, Z la distance au même point pour la même position du centre de gravité général, on aura, en vertu du théorème des moments,

$$PZ = pH + p'H' + p''H'' + \ldots.;$$

pour la deuxième position du système, on aurait encore

$$PZ_1 = pH_1 + p'H_1' + p''H_1'' + \ldots.$$

Les deux égalités étant retranchées terme à terme l'une de l'autre,

leur différence donnera

$$P(Z_1 - Z) = p(H_1 - H) + p'(H_1' - H') + p''(H_1'' - H'') + \ldots.$$

En supposant que le plan de niveau AB demeure inférieur à tous les points partiels, on remarquera que $Z_1 - Z$ est la hauteur z dont le centre de gravité général a monté ou descendu, selon que Z_1 est plus grand ou plus petit que Z ; qu'il en est de même des différences $H_1 - H$, $H_1' - H'$, ... lesquelles sont égales aux quantités h, h', h'', ... et sont positives ou négatives selon que le centre de gravité des points particuliers p, p', p'', ... ont monté ou descendu. De plus, les quantités $P(Z_1 - Z)$, $p(H_1 - H)$, $p'(H_1' - H')$,.... sont les produits des forces par les chemins parcourus dans leurs directions propres, c'est-à-dire les quantités de travail partielles dues à la pesanteur. Ainsi, *le travail total dû à la pesanteur sur un système de corps pesants en mouvement, est égal à la somme des travaux des poids qui montent, diminuée de celle des travaux des poids qui descendent.*

51. *Équilibre des corps pesants.*—Si le système des corps pesants est dans une position telle qu'en passant à une position voisine, le centre de gravité général demeure sur une même ligne de niveau, ou que l'on ait $Z_1 = Z$, dans ce cas la quantité de travail $P(Z_1 - Z)$ devient nulle et l'on a

$$ph + p'h' + p''h'' + \ldots. = 0.$$

Donc, dans une semblable position, la quantité de travail à dépenser pour en déplacer le corps est nulle, les quantités de travail partielles de la pesanteur sur chaque corps s'entre-détruisent, et il y a équilibre dans le système. Telle est la condition d'équilibre des corps pesants qui sont seulement soumis à la gravité. Toutefois, cet équilibre se présente sous divers états, selon la nature des positions du système. Si, après avoir dérangé un peu l'ensemble du système des pièces, le centre de gravité général descend, on conçoit qu'il tendra à descendre de plus en plus et qu'il faudrait dépenser une certaine quantité de travail pour le ramener à sa position primitive. Un tel équilibre est dit *instable*, parce que le système tend évidemment à s'en écarter. Au contraire, si, en déplaçant un peu l'ensemble des pièces, le centre de gravité général s'est élevé, c'est une preuve que ce déplacement a exigé une certaine quantité de travail que la pe-

santeur tend à restituer ; l'équilibre est alors *stable ;* parce que le système est sollicité à y revenir, quand on l'abandonne à lui-même. Enfin si, après un dérangement analogue au précédent, le centre de gravité général ne monte ni ne descend, la quantité de travail dépensée est toujours nulle ; le système n'a aucune tendance ni à revenir à sa première position, ni à s'en écarter. En un mot l'équilibre est *indifférent.*

52. *Exemples des diverses espèces d'équilibre.* — Considérons, par exemple, une tige tournant autour d'un point fixe A (fig. 64) et supportant à sa partie inférieure un corps symétrique par rapport à la ligne milieu qui va du centre de rotation au centre de gravité général G. Il est évident qu'il y aura équilibre, lorsque la tige occupera la position verticale AG. Je dis de plus, que l'équilibre est ici stable ; car, en éloignant le système de la position AG, le centre de gravité monte de G en G' en décrivant l'arc GG', et il a fallu dans ce déplacement dépenser une quantité de travail que la pesanteur va restituer aussitôt qu'on abandonnera la tige à elle-même. A la vérité elle fera une suite d'oscillations autour de AG, mais leur amplitude diminuera par suite de la tendance de la ligne à occuper sa position primitive AG. Supposez la tige dans une situation opposée à la précédente (fig. 65) : si elle est encore parfaitement verticale, la résultante de toutes les forces de pesanteur ou du poids total passe par le point d'appui ; il n'y a point de raison pour que le corps s'incline plus à droite qu'à gauche, attendu sa symétrie par rapport à la ligne AG. Toutefois cet équilibre est instable ; car, pour peu que le système soit dérangé, le centre de gravité descend de G en G', et il faudrait ensuite une certaine quantité de travail pour le ramener à la position AG.

Quand un cône (fig. 66) est posé sur sa base et qu'on vient à l'incliner, le centre de gravité de ce cône décrit un arc qui l'élève ; partant, ce corps, abandonné à lui-même, revient à sa première position. Si, au contraire, on appuie le cône sur sa pointe rationnellement, il y a encore équilibre comme lorsque ce corps reposait sur sa base ; mais le plus petit mouvement suffit pour faire descendre le centre de gravité. La première position du cône correspond à l'état d'équilibre stable, et la deuxième à celui d'équilibre instable.

Un cylindre elliptique placé sur un plan de niveau est en équilibre stable ou non stable, selon que le grand axe ou le petit axe de

sa base elliptique est parallèle à ce plan (fig. 67). Une boule sphérique qui se meut sur un plan de niveau offre l'exemple d'un équilibre indifférent. Le centre de gravité ou le centre de figure de cette boule demeure à la même hauteur au-dessus du plan, et la quantité de travail employée à le déplacer à chaque instant est toujours nulle, de sorte que le corps dans toutes ses positions a plus de tendance à s'arrêter qu'à s'éloigner. Un cylindre parfaitement circulaire est encore dans ce cas.

Les ponts-levis ne sont autre chose qu'un système de pièces à l'état d'équilibre indifférent, ou qui demeure en équilibre pour toutes les positions possibles. Pour que cette condition soit remplie, il suffit de s'assurer que le centre de gravité général de la bascule et du tablier, dans toutes les positions possibles, à la liaison de ces corps est à la même hauteur ou parcourt un même plan de niveau.

Les chariots, les voitures ne doivent, à proprement parler, exiger aucune quantité de travail dans leur transport horizontal, et par conséquent leur centre de gravité total ne doit ni monter ni descendre pendant leur mouvement.

Si certaines roues de moulin tantôt se ralentissent et tantôt s'accélèrent, c'est qu'elles ne sont pas cintrées, ou que leur centre de gravité G est en dehors du centre A des tourillons (fig. 68). Cette roue devient analogue au pendule qui offre alternativement les caractères de l'équilibre stable et non stable : d'abord l'équilibre est *stable* lorsque le centre de gravité de la roue occupe la position la plus basse ; puis ce centre de gravité monte en s'écartant de la verticale AB, et la pesanteur pendant ce mouvement ascendant diminue sa vitesse par petits degrés successifs ; arrivé au point le plus haut, le centre de gravité G prend de nouveau une position d'équilibre qui est *instable*, parce qu'au delà la pesanteur accélère la vitesse jusqu'au point le plus bas que nous avons pris pour point de départ, et dans lequel la vitesse redevient la même.

La balance consiste principalement dans un fléau à bras égaux AC et CB (fig. 69), armé de couteaux dont l'arête D repose dans l'œil d'une chape double suspendue en E. Les deux extrémités du fléau portent deux bassins extrêmement égaux qui doivent contenir, l'un le corps à peser, et l'autre les poids étalons. Une balance peut être *sourde*, *folle*, ou *paresseuse*, selon qu'elle tend à revenir vers sa position horizontale ou à s'en écarter, ou qu'elle demeure en équilibre ou en repos sous toutes sortes de positions. Prenez en particulier le

moment du poids de chaque pièce dont la balance se compose par rapport à un plan de niveau *AB*, et divisez la somme de tous ces moments par le poids total de la balance. Le quotient vous donnera la hauteur du centre de gravité *G* au-dessus de ce plan. Sa position sera déterminée, attendu que ce centre doit être compris dans l'axe de symétrie *CF* du système. Lorsque le centre de gravité sera au-dessous du point d'appui *D* des couteaux, la balance sera *sourde*, parce que l'équilibre est stable; s'il est au-dessus, la balance est *folle* et l'équilibre instable; enfin, l'équilibre est indifférent et la balance *paresseuse*, lorsque le centre de gravité de la balance et le point d'appui des couteaux du fléau sur la chape se confondent. Les bonnes balances sont celles dont le centre de gravité est placé au-dessous du point d'appui sans en être ni trop près ni trop loin.

V.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE LIBRE.

58. *Équilibre d'un corps libre.* — Quand des forces appliquées à un corps se font équilibre sur ce corps, ou qu'elles ne changent point l'état de son mouvement, ou quand elles s'entre-détruisent, il est nécessaire que la somme des quantités de travail des forces qui entraînent le corps dans un sens soit égale à la somme des quantités de travail des forces qui l'entraînent en sens contraire. Pour se rendre raison de ce principe, concevons que l'on ait composé les premières forces qui agissent d'un côté en une seule, et qu'on ait fait de même à l'égard de celles qui agissent de l'autre côté : le système des forces sera ainsi réduit à deux forces uniques qui devront se faire équilibre; et cet équilibre aura lieu quand les deux forces seront égales et directement opposées. Mais lorsque deux forces sont égales et contraires, la quantité de travail de l'une est égale à la quantité de travail de l'autre, et si d'ailleurs on admet que la quantité de travail de chacune d'elles est égale à la somme des quantités de travail des forces données dont elle est composée, on

reconnaître ainsi la condition d'équilibre que nous avons énoncée ci-dessus (*).

54. *Équilibre et mouvement des machines.* — Considérons une machine composée de roues qui sont soutenues par des appuis et qui se communiquent le mouvement, soit par des dents, soit par des chaînes ou par des courroies. Imaginons qu'une force ou puissance fasse tourner la première roue, celle-ci éprouvera une réaction de la part de la deuxième. Cette réaction à son tour devient pour la deuxième une puissance qui tend à la faire marcher ; mais cette deuxième éprouve sur les appuis qui la lient à la troisième, une réaction qui est une véritable résistance à son propre mouvement, et qui devient puissance pour cette troisième roue. Remplaçons maintenant les appuis de deux pièces voisines par les efforts de réaction qui y sont exercés : chaque pièce deviendra un corps libre, et pour qu'il y ait équilibre autour de ce corps, il faudra que

(*) Voici une démonstration plus rigoureuse pour les lecteurs qui ne se contenteraient pas de celle du texte. Soient P, Q, R, S, ... (fig. 70) des forces appliquées à un corps solide de forme quelconque. Prenons dans l'intérieur de ce corps trois points quelconques a, b, c, que nous regarderons comme les sommets d'un triangle invariable abc, et décomposons chaque force en trois autres selon les droites Aa, Ab et Ac, dirigées du point d'application A de la force à chaque sommet. De cette manière nous obtiendrons trois groupes de composantes qui concourront respectivement aux points a, b, c, et qui auront pour résultantes, le premier la force Z, le deuxième la force X, et le troisième la force Y. L'équilibre est ainsi réduit à celui des trois forces X, Y, Z, et il ne sera pas troublé si l'on suppose que les côtés ab, ac, bc deviennent fixes tour à tour. Dans l'hypothèse du côté fixe ab, les deux forces Z et X sont détruites par la résistance de ce côté, et si la troisième force Y n'était pas située dans le plan abc, elle le ferait tourner autour de ab. On démontrerait semblablement que les forces X et Z doivent être comprises dans ce même plan abc comme la force Y. Maintenant, pour que ces trois forces se fassent équilibre dans ce plan, il faut que l'une d'elles soit directement égale et opposée à la résultante des deux autres, ou que la résultante de toutes trois soit nulle, condition qui entraîne celle que les trois forces concourent en un même point. Si la résultante des trois forces X, Y, Z est 0, la somme de leur quantité de travail est nulle. La quantité de travail de chacune d'elles est d'ailleurs égale à la somme des quantités de travail d'un même groupe, et la chose est évidente puisque ces composantes ont un même point d'application. Ainsi, la somme des quantités de travail des forces X, Y, Z peut être remplacée par la somme des quantités de travail de toutes les forces groupées autour de a, b et c. Mais ces dernières, ajoutées trois par trois, donnent la quantité de travail de chacune des forces proposées P, Q, R, S. En sorte que la somme des quantités de travail des forces X, Y, Z n'est autre chose que la quantité de travail des forces P, Q, R, S. D'où l'on voit que dans l'équilibre d'un corps solide, la quantité *totale* de travail des forces qui le sollicitent est égale à zéro.

la quantité de travail des forces qui tendent à faire marcher le corps dans un sens, soit égale à celle des forces qui le font marcher en sens contraire. A l'égard d'une pièce particulière, cela revient à dire que le travail de la puissance qui la fait mouvoir, est égal à celui de la résistance opposée par la pièce suivante ; en raisonnant de proche en proche, depuis la pièce qui reçoit l'action du moteur jusqu'à celle qui fait l'ouvrage et qu'on nomme *outil*, on reconnaît que la quantité de travail de la puissance équivaut à celle de l'outil. En un mot, quand des forces travaillent à l'aide de machines, ou par l'intermédiaire de corps sur d'autres corps, il faudra distinguer les puissances des résistances, et on trouvera que le travail des unes est toujours égal à celui des autres. Si les corps se pressent, s'étendent ou se frottent, les nouvelles résistances qui résultent de ces actions seront comprises parmi les résistances, bien que ces actions soient inutiles au travail que l'on veut obtenir. L'équilibre peut avoir lieu, soit que le corps reste en repos ou qu'il soit en mouvement. Dans le premier cas, les quantités de travail sont celles qui seraient produites par un petit dérangement du système. Dans le deuxième cas, les corps ne peuvent avoir qu'un mouvement uniforme, leur inertie n'étant point alors mise en jeu ; les quantités de travail sont mesurées uniquement d'après le mouvement de chaque point d'application des forces, sans que l'inertie entre pour rien dans la comparaison de ces quantités. On conçoit, par exemple, que quand une roue tourne régulièrement, l'inertie est tout à fait nulle. Il n'en est plus de même quand la vitesse varie ou que le mouvement ne demeure pas constant. L'inertie lui est contraire ou favorable selon que la vitesse s'accélère ou diminue : on doit alors, dans ces circonstances, comprendre l'inertie parmi les résistances ou les puissances. Mais la condition du mouvement est toujours la même, c'est-à-dire que le travail des puissances est encore égal au travail de toutes les résistances augmenté du travail de l'inertie, lorsque le mouvement s'accélère, ou diminué de ce même travail si le mouvement se ralentit.

55. *Relation entre le travail des forces sur un corps libre et sa force vive. Exemple sur les trajectoires d'un corps pesant.* — Toutes les fois que des forces appliquées à un corps libre font accélérer ou retarder son mouvement, l'inertie de ce corps se développe, et en vertu du principe de l'action égale à la réaction, elle doit être en

équilibre avec les forces qui sollicitent le corps ; ou bien sa quantité de travail sera égale à la somme des quantités de travail simultanées des forces qui poussent le corps dans un sens, diminuée des quantités de travail qui poussent ce corps dans un sens opposé. Mais on a vu (1re partie, 85) que quand un corps prend deux vitesses à deux instants quelconques, le travail de l'inertie est encore mesuré par la moitié de la différence des forces vives que le corps possède au premier et deuxième instant, ou par la force vive qu'il gagne ou qu'il perd selon que le mouvement s'accélère ou se ralentit. Donc *le travail total de plusieurs forces sur un corps dans un temps quelconque est toujours égal à la moitié de la force vive gagnée ou perdue par ce corps au bout du même temps.*

Soit, par exemple, une bombe dont P est le poids et qui part du point A (fig. 71) avec une vitesse initiale V. Si la pesanteur n'agissait pas sur ce projectile, il suivrait la direction primitive AT. Mais, en vertu de cette force verticale qui est unique dans le cas où le mouvement a lieu dans le vide, la bombe est continuellement détournée de sa direction, et décrit en définitif une ligne courbe ABD, et nous savons (2e partie, 12) que pour un corps qui décrit un espace quelconque de courbe et qui n'est soumis qu'à l'action de la gravité le travail est égal au produit de son poids et de la projection verticale de cette portion de courbe. Ainsi, à l'égard de la bombe, pendant qu'elle sera transportée de A en B, le travail dépensé par la gravité sera $P \times BC$, ou $P \times H$ en faisant $H = BC$. Enfin, appelant V' la vitesse que possède la bombe en B, $\frac{P}{g} \times V^2$ sera sa force vive en A, $\frac{P}{g} \times V'^2$ sa force vive en B, et $\overline{\frac{P}{g} \times V^2} - \overline{\frac{P}{g} \times V'^2}$ la force vive qu'il aura perdu pendant son passage de A en B, dont la moitié doit être la quantité de travail développée dans le même intervalle par la force extérieure qui est ici celle de gravité. On aura donc

$$\frac{1}{2}\left(\overline{\frac{P}{g} \times V^2} - \overline{\frac{P}{g} \times V'^2}\right) = P \times H.$$

Divisant les deux membres de cette égalité par le facteur commun P et les multipliant par $2g$, on trouve

$$V^2 - V'^2 = 2gH.$$

Donc la différence des carrés des vitesses dans deux positions quelconques de la bombe qui se meut dans le vide est égale à la différence de niveau des deux positions multipliée par le double de la vitesse g que la pesanteur imprime au bout de la première seconde. Supposez que la bombe arrive à terre en D, alors sa hauteur H sera nulle. D'où $V^2 - V'^2 = 0$, ou $V = V'$. Donc, une bombe dans le vide, tombe à terre avec une vitesse précisément égale à celle qu'elle a reçue au commencement du mouvement. On remarquera encore que tant que le projectile monte la pesanteur ralentit de plus en plus la vitesse, et que quand le projectile descend elle restitue à la vitesse ce qu'elle lui avait d'abord enlevé, de sorte qu'à des points également élevés sur les branches ascendantes et descendantes, la vitesse redevient la même. La description de la trajectoire dans le vide s'obtient par des considérations fort simples et fondées sur l'indépendance des mouvements divers d'un même corps et des actions dues aux forces qui le sollicitent dans les directions de ces mouvements (2e partie, 5 et 8). En effet, on peut regarder le corps comme animé de deux mouvements, l'un horizontal selon l'axe Ax, et l'autre vertical selon l'axe Ay. Les vitesses initiales dans le sens de ces mouvements seront les composantes de la vitesse initiale, estimée d'après le principe du parallélogramme des vitesses. Comme dans le sens horizontal il n'y a aucune force motrice, le corps décrira dans cette direction de petits espaces égaux pendant une suite de petits temps égaux élémentaires. Mais dans le sens vertical la pesanteur pendant ces mêmes petits temps égaux diminue la composante de la vitesse initiale, de petits degrés égaux de vitesse, de sorte que la loi des vitesses verticales acquises par le corps au bout de ces petits temps égaux est facile à connaître, ainsi que les espaces décrits. Quant aux véritables positions de la bombe qui ne sont que des points de la courbe, elles seront données par l'intersection des parallèles aux deux axes, menées à des distances de l'origine A égales aux espaces décrits simultanément dans le sens horizontal et dans le sens vertical. Si la trajectoire est décrite dans l'air, la résistance de ce fluide diminue considérablement les vitesses des mobiles. La description de la courbe peut encore se faire, pourvu que l'on ait des tables indiquant en poids les résistances qui correspondent à telle ou telle vitesse et au calibre du projectile. Ainsi, connaissant la vitesse initiale et deux composantes, on aura en poids la valeur de la ré-

sistance initiale, et par suite les composantes horizontale et verticale de cette force au commencement du mouvement. De ces composantes, l'une est la force motrice de la bombe dans le sens horizontal, et elle diminue la vitesse horizontale primitive, d'un petit degré facile à évaluer pour un petit temps, ce qui donne ainsi la vitesse horizontale acquise au bout de ce même petit temps. L'autre composante de la résistance ajoutée au poids de la bombe donne la force motrice dans le sens vertical ; on déduit de cette dernière le plus petit degré de vitesse dont la vitesse verticale primitive est diminuée pendant le même petit temps que nous avons choisi, ainsi que la vitesse verticale acquise au bout du dit petit temps. La résultante des deux nouvelles vitesses acquises horizontalement et verticalement donnera lieu à une nouvelle résistance que l'on trouvera dans les Tables et que l'on décomposera en deux autres forces horizontale et verticale. Les intensités de ces deux forces s'obtiendront, d'ailleurs, en les considérant, ainsi que leur résultante, comme proportionnelles aux vitesses acquises déjà déterminées. Puis on cherchera le petit degré de vitesse dont la vitesse horizontale s'est accrue ou diminuée au bout d'un temps petit, égal au premier, par la nouvelle composante horizontale à la résistance ; on en fera de même dans le sens vertical, en prenant pour force motrice le poids de la bombe augmenté de la composante verticale de la nouvelle résistance. On voit que de cette manière on parviendra aux vitesses acquises au bout du deuxième petit temps, tant dans le sens horizontal que dans le sens vertical. En continuant ainsi on déterminera la loi de toutes les vitesses acquises, ainsi que tous les espaces parcourus. Au moyen des espaces parcourus simultanément suivant les directions horizontales et verticales, on construira la trajectoire de la même manière qu'il a été procédé dans le vide. Quant aux espaces réels décrits, ils servent à faire connaître le développement de la trajectoire.

VI.

MOUVEMENT D'UN CORPS AUTOUR D'UN AXE.

56. *Le travail de forces quelconques faisant tourner un corps autour d'un axe est réduit à celui de leurs composantes dans un plan perpendiculaire à cet axe.* — Le principe démontré (2e partie, 13) du travail des forces sur un corps peut s'étendre à des cas quelconques. Nous allons l'appliquer à celui où un corps tourne autour d'un axe fixé et lié invariablement à ce corps. Imaginons une force R s'exerçant en un point A (fig. 72) d'un corps qui tourne autour de LM, et décomposons cette force en deux autres, l'une Q parallèle à LM, et l'autre P dans un plan perpendiculaire à cette même droite et passant par son point d'application A. On remarquera que P est la projection de la force R dans ce plan, et que les composantes de cette dernière peuvent s'obtenir par le procédé indiqué (2e partie, 10). En agissant de la même manière à l'égard des autres forces appliquées au corps, on les réduira à deux groupes dont l'un se composera de forces parallèles à l'axe et l'autre de forces situées dans des plans qui lui sont perpendiculaires; et de plus la somme des quantités de travail de ces deux groupes sera précisément égale au travail total des forces données. Or, le travail du premier groupe est égal au produit de la résultante des forces parallèles qui le composent multiplié par le chemin que parcourt le corps selon leur direction, c'est-à-dire dans le sens de l'axe; et comme le corps ne peut cheminer sur cet axe auquel par hypothèse il est lié invariablement, on voit que le chemin décrit par les points d'application des forces parallèles est nul, et qu'il en est de même à l'égard de leur travail. Ainsi, le travail total des forces données se réduit, en définitif, à celui de leurs composantes, ou de leurs projections dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation et qui passent par leurs points respectifs d'application.

57. *Travail des forces qui font tourner un corps autour d'un axe.* — La quantité de travail des forces appliquées à un corps qui peut prendre un mouvement de rotation se réduisant à celle de leurs projections sur des plans perpendiculaires à l'axe, il reste encore à déterminer le travail de ces dernières. Soient P (fig. 73) l'une

de ces composantes, A son point d'application sur le corps, et C le point où l'axe coupe le plan perpendiculaire qui contient la composante P. Abaissez du point C la perpendiculaire CD à AP, et observez que l'on a démontré (2e partie, 17) que la quantité de travail d'une force est toujours la même, quel que soit le point sur sa direction, dont on considère le chemin parcouru. Ainsi, la quantité de travail de la force P, estimée d'après le chemin du point D, est la même que pour le point A. Or, le point D décrit dans un très-petit temps t un arc S dont CD est le rayon. Ainsi, la quantité de travail de P sera $P \times S$. Mais on n'a pas besoin de mesurer immédiatement pour chaque composante le petit arc que décrit le pied de la perpendiculaire abaissée de l'axe sur sa direction, parce que quand un corps tourne, tous les points qui lui sont attachés invariablement, décrivent simultanément des angles égaux, et par suite des arcs proportionnels à leurs distances de l'axe. En appelant, par exemple, S' l'arc décrit par le point D' autour de C, on aura

$$S : S' :: CD : CD';$$

d'où

$$S = \frac{S' \times CD}{CD'};$$

en sorte que connaissant S' on connaîtra aussi S. Au lieu de prendre l'arc décrit par un point arbitraire, on prend ordinairement celui qui est décrit par un rayon égal à l'unité ; si CD' est cette unité on aura

$$S = S' \times CD;$$

en appelant r la grandeur de la perpendiculaire CD, et désignant l'arc de CD' par S_1, afin de se souvenir que cet arc a pour rayon l'unité, on aura enfin

$$S = rS_1.$$

Pour une autre composante P' dont la perpendiculaire abaissée de l'arc a pour longueur r', on trouverait de même

$$S' = r'S_1.$$

Ainsi, les quantités de travail des composantes perpendiculaires à l'axe sont $P \times rS_1$ et $P \times r'S_1$, et l'on remarquera que les produits

$P.r$ et $P.r'$ ne sont que les moments de ces composantes. Donc, le travail des composantes, et par suite celui de la force donnée qui lui correspond, est égal à l'arc commun S_1 multiplié par le moment de la composante. Sachant en outre que le travail total des forces données est égal à la somme des travaux de celles qui agissent dans un sens, diminuée de la somme des travaux de celles qui agissent en sens contraire ; on en conclut que leur travail total pour faire tourner un corps est égal à l'unité de distance de l'axe, multipliée par la différence de la somme des moments de leurs perpendiculaires à l'axe et qui font tourner le corps dans un sens, et de la somme des moments de ces mêmes composantes qui font tourner le corps dans l'autre sens.

58. *Équilibre d'un corps autour d'un axe.* — Si les forces données se font équilibre autour de l'axe, leur travail total est nul, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la somme des moments des composantes perpendiculaires à l'axe qui agissent dans un sens, est égal à celle des moments des composantes qui font tourner le corps dans un sens opposé.

59. *Extension du principe des forces vives au mouvement de rotation.* — Lorsque des forces sont appliquées à un corps qui tourne autour d'un axe de rotation, le mouvement qu'il prend ne peut être que perpendiculaire à cet axe ; si les forces ne se font pas équilibre, le mouvement s'accélère ou se retarde, et il naît, sur chaque partie du corps, des forces d'inertie qui agissent dans la direction du mouvement, et dont les quantités de travail forment une même somme que celles qui sont développées dans le même temps par les forces motrices. Quand tous les points du corps sont animés de vitesses simultanées qui sont égales, rien n'est plus facile que d'évaluer le travail total de l'inertie pendant un intervalle de temps quelconque : il est égal à la moitié du produit de la masse totale du corps, multipliée par la différence entre les carrés de la vitesse commune qui a lieu au commencement de l'intervalle et de celle qui a lieu à la fin. Mais, lorsque toutes ces parties sont animées de vitesses différentes en même temps (et c'est ce qui arrive dans un moment de rotation), il faut estimer, au commencement et à la fin de l'intervalle, la force vive de chaque partie du corps, faire la somme de toutes celles que possèdent ces parties au commencement de l'in-

tervalle, et la somme de toutes celles que ces parties possèdent à la fin; puis retrancher ces deux sommes l'une de l'autre pour avoir l'accroissement total des forces vives. La moitié de ce résultat étant le travail de l'inertie, et ce dernier devant être égal au travail développé par les forces données, ou plutôt (2e partie, 57) par leurs composantes perpendiculaires à l'axe, on peut dire que dans tout mouvement de rotation d'un corps, le travail des composantes perpendiculaires à l'axe de rotation est égal à la moitié de l'accroissement des forces vives du corps. Afin de tirer parti de cette relation, il faut une méthode pour obtenir la somme de toutes les forces vives que possèdent au même instant les parties d'un corps qui tourne autour d'un axe de rotation.

60. *Méthode pour estimer la force vive totale d'un corps qui tourne autour d'un axe.* — Considérons, par exemple, une petite partie m (fig. 74) située à une distance r de l'axe de rotation LM. Soient V la vitesse qu'elle possède à un instant quelconque, p son poids; m sa masse, ou $\frac{p}{g}$; la force vive de cette partie sera $\frac{p}{g} \times V^2$, ou $m \times V^2$. Si l'on en fait autant pour toutes les autres parties et qu'on ajoute toutes les forces vives qui ont lieu dans un même instant, on observera que la vitesse V de chaque partie différera selon sa distance r à l'axe. Elle lui sera d'ailleurs proportionnelle, attendu que toutes les parties du corps tournent simultanément; en un mot on pourra trouver les vitesses comme les petits chemins simultanés décrits. Or, on a vu que S étant le chemin décrit par la partie m, on a

$$S = r \times S_1.$$

Divisant cette égalité par t, ou par le petit temps employé à décrire S, on tire

$$\frac{S}{t} = r \times \frac{S_1}{t}.$$

On sait que la vitesse, dans un mouvement quelconque, est égale à un très-petit chemin du mobile, divisé par le temps employé à le décrire. Ainsi, $V = \frac{S}{t}$. On aura de même $\frac{S_1}{t} = V_1$. La vitesse V^1, qui n'est autre chose que la vitesse relative au chemin S_1, ou à celui qui est à l'unité de distance, est ce qu'on nomme *vitesse angulaire*

du corps. Enfin, de la relation $\frac{S}{t} = r \times \frac{S_1}{t}$ on tire cette autre, $V = rV$, qui indique que la vitesse d'un point quelconque possédant un mouvement de rotation, est égale au produit de sa distance à l'axe par la vitesse angulaire du corps. Par conséquent, la force vive de la partie m du corps sera $mr^2V_1^2$. La force vive simultanée de la masse m' serait de même $m'r'^2V_1^2$. Enfin, la somme de toutes ces forces vives, c'est-à-dire la force vive totale, sera, à cause que V_1^2 est facteur commun, $V_1^2(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \ldots)$. Remarquons que si le mouvement vient à changer, il n'y a que la vitesse angulaire V_1 qui varie, tandis que le facteur . . . . . $mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \ldots$ se reproduit encore dans l'évaluation de la nouvelle force vive. Cette quantité, que les géomètres ont désignée par *moment d'inertie*, je l'appellerai I, en sorte que la force vive du corps devient $V_1^2 \times I$. Donc, *la force vive d'un corps qui tourne autour d'un axe, est égale au carré du produit de sa vitesse angulaire, multiplié par son moment d'inertie.* Supposez maintenant que par suite d'une accélération causée dans le mouvement, la vitesse angulaire V_1 soit, au bout d'un certain intervalle de temps, devenue V_1', la force vive à ce dernier instant sera $V_1'^2 \times I$, parce que I ne dépend nullement de la vitesse. On aura donc . . . . . $\overline{I \times V_1'^2} - \overline{I \times V_1^2}$ pour l'accroissement de force vive produite pendant cet intervalle, lequel doit être égal au double des quantités de travail des forces données, ou même au double de celles que produisent leurs composantes selon des plans perpendiculaires à l'axe. Supposons encore que ces composantes soient réduites à une seule force F, et que le chemin estimé dans sa direction, et parcouru pendant l'intervalle de temps que l'on considère, soit B, on aura

$$\overline{I \times V_1'^2} - \overline{I \times V_1^2} = 2FE.$$

61. *Détermination du mouvement d'un corps qui tourne et qui est sollicité par une force.* — A l'aide du principe précédent on est à même de trouver l'intensité de la force motrice qui fait tourner un corps, quand on connaît la vitesse angulaire de ce corps à deux instants, et le chemin décrit par le point d'application de la force pendant l'intervalle qui sépare ces instants. Réciproquement, si une force analogue à la précédente est donnée, ainsi que le chemin donné

par son point d'application, on peut conclure l'accélération de la vitesse angulaire du corps. Supposons, par exemple, une roue montée sur un arbre horizontal et qui tourne autour de son centre (fig. 75); un poids P est suspendu à une corde enroulée autour de l'arbre. On demande la vitesse que la roue prendra, lorsqu'à partir du repos, la corde ou le poids sera descendu de la hauteur H, et par I le moment d'inertie de la roue; $I \times V_1^2$ sera la force vive acquise

et on aura $$I \times V_1^2 = 2P \times H,$$

d'où $$V_1^2 = \frac{2P \times H}{I},$$

et, par suite, $$V_1 = \sqrt{\frac{2PH}{I}}.$$

62. *Application aux volants.* — Un volant consiste dans une roue ou pièce qui tourne autour d'un arbre horizontal et dont les jantes en fonte, tenues à une assez grande distance de l'axe de rotation, sont liées par des bras à ce dernier. Imaginons que des forces soient appliquées à cette roue entre deux instants pour lesquels la vitesse angulaire du mouvement soit successivement V_1 et V_1' : il faudra que l'accroissement de la force vive de la masse du volant soit égal au double du travail total des deux forces, ou que l'on ait

$$I\,(V_1'^2 - V_1^2) = 2FE,$$

ou $$V_1'^2 - V_1^2 = \frac{2FE}{I};$$

ce qui donne la différence des carrés des vitesses. Si la quantité de travail développée par les forces demeure la même pour l'intervalle de temps compris entre les instants où la vitesse angulaire du volant devient V_1 et V_1' et que l'on augmente son moment d'inertie I, la fraction $\frac{2FE}{I}$ diminuera, et par conséquent ces vitesses angulaires différeront d'autant moins. Et, comme le moment d'inertie est en raison composée et de la masse du volant et de la distance à laquelle cette masse est rejetée loin de cet axe, on voit qu'il est toujours possible de disposer ce volant de manière que le mouve-

ment soit très-peu irrégulier, lors même que la quantité totale de travail développée par les puissances serait très-grande. Remarquons encore que si les puissances agissent entre elles de manière qu'elles accélèrent le mouvement, cet excédant de quantité de travail devient une force vive qu'emmagasine le volant. Si, au contraire, de nouvelles résistances surviennent et que le mouvement se ralentisse, l'inertie du volant s'ajoutera au travail des forces qui favorisent le mouvement pour vaincre ces résistances. Ainsi, l'utilité du volant consiste à absorber l'excès du travail de la puissance sur la résistance pour le restituer ensuite à la puissance, quand le travail de celle-ci devient inférieur. Aussi y a-t-il certaines machines où sans un volant le moteur ne saurait faire marcher l'outil. Si, par exemple, un moteur est destiné à faire marcher une scie, il est évident que le travail de cette dernière n'est pas le même pendant sa montée et pendant sa descente, parce que la scie ne mord dans le bois que quand elle descend. Ainsi le travail du moteur, supérieur à celui de l'outil pendant une demi-oscillation, doit lui devenir inférieur pendant la demi-oscillation contraire. Dans le premier cas le volant s'accélère et absorbe de la force vive; dans l'autre cas, au contraire, cette force vive est restituée et ajoutée à celle du moteur, pour vaincre le travail de la résistance devenu alors plus grand.

63. *Distance de l'inertie d'un corps qui tourne autour d'un axe.* — On sait que si une masse m reçoit dans un très-petit temps t le degré de vitesse v, la mesure de la force d'inertie f est $\frac{m \times v}{t}$. Pour une autre masse m' on aurait $f' = \frac{m' \times v'}{t}$, et $f'' = \frac{m'' \times v''}{t}$.

Si de plus les masses m, m', m'', font partie d'un même corps qui tourne autour d'un axe, leurs petits degrés de vitesses respectifs sont évidemment proportionnels à leurs distances r, r', r''. Donc, en désignant par v_1 le petit degré de vitesse imprimé à l'unité de distance de cet axe, on a

$$v = rv_1, \quad v' = r'v_1, \quad v'' = r''v_1,$$

d'où

$$f = mr \times \frac{v_1}{t}, \quad f' = m'r' \times \frac{v_1}{t}, \quad \text{et} \quad f'' = m''r'' \times \frac{v_1}{t}, \ldots.$$

Mais si cet accroissement de vitesse angulaire v_1 a été produit sur le corps par la force motrice F perpendiculaire à l'axe et appliquée à une distance R de cet axe, cette force est la mesure de l'inertie du corps et doit faire équilibre à toutes les forces d'inertie partielles $f, f', f'', \ldots$ en sorte que le moment FR sera égal à la somme des moments $fr, f'r', f''r'' + \ldots$ Substituant à $f, f', f'', \ldots$ leurs valeurs $mr \times \frac{v_1}{t}$, $m'r' \times \frac{v_1}{t}$, $m''r'' \times \frac{v_1}{t}, \ldots$ on aura

enfin $$FR = \frac{v_1}{t}(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2),$$

ou $$FR = \frac{v_1}{t} \times I.$$

Donc, le moment de l'inertie totale du corps qui a un mouvement de rotation est égal au *moment d'inertie* de ce même corps par rapport à l'axe, multiplié par le quotient du petit degré de vitesse angulaire imprimé et du petit temps pendant lequel ce petit degré a été communiqué. Malgré l'analogie qui existe entre le moment de l'inertie d'un corps, et ce que nous avons nommé son moment d'inertie, on reconnaît qu'il ne faut pas les confondre l'un avec l'autre. La même équation

$$F \times R = \frac{v_1}{t} \times I, \quad \text{ou} \quad v_1 = \frac{FR \times t}{I}$$

nous apprend que quand on connaît la force motrice F qui imprime à un corps un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire à sa direction, on trouvera à chaque instant le petit degré de vitesse angulaire v_1 communiqué, pourvu que l'on calcule le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe. De là, il est possible, au moyen d'une courbe qui a pour abscisses une suite de petits temps t égaux, et dont les ordonnées sont les vitesses acquises, de déterminer la loi de ce mouvement.

64. *Théorème sur le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque.* — Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque, moment que, dans tout ce qui précède, nous avons représenté par la lettre I, n'est autre chose que la somme des produits des diverses masses qui composent le corps, multipliée

par le carré de leurs distances respectives à l'axe. De tous les moments d'inertie d'un même corps, les plus faciles à obtenir sont ceux que l'on prend par rapport à un axe qui passe par son centre de gravité. Il est donc important de trouver le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque, au moyen de celui qu'on détermine par rapport à un axe parallèle passant par le centre de gravité. Soient GH (fig. 76) ce dernier axe, LM un axe quelconque parallèle à GH, m une petite masse du corps GKH par lequel nous imaginerons un plan perpendiculaire à ces deux axes qui les coupe en a et en b. Formons le triangle amb, et abaissons du point m la perpendiculaire md à ab, on aura, d'après la propriété connue du triangle,

$$(mb)^2 = (ma)^2 + ab^2 + (2ab \times ad).$$

Désignant par r la distance mb du point m à l'axe quelconque LM, par r_1 celle ma du même point à l'axe GH du centre de gravité, par K la distance constante ab des deux axes qui est encore celle du centre de gravité à l'axe LM, et par d la distance ad du point M au plan mené par GH perpendiculairement à celui qui contient les deux axes : l'équation précédente devient

$$r^2 = r_1^2 + K^2 + 2K \cdot d,$$

et multipliant par la masse m,

$$m \cdot r^2 = m \cdot r_1^2 + m \cdot K^2 + 2K \cdot m \cdot d.$$

Pour d'autres masses m', m'' on trouvera

$$m' \cdot r'^2 = m' \cdot r_1'^2 + m' \cdot K^2 + 2K \cdot m' \cdot d',$$

$$m'' \cdot r''^2 = m'' r_1''^2 + m'' \cdot K^2 + 2K \cdot m'' \cdot d''.$$

Ajoutant toutes ces équations terme à terme, et appelant I le moment d'inertie $mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2$ par rapport à l'axe quelque LM, et I_1 le moment d'inertie $mr_1^2 + m'r_1'^2 + m''r_1''^2 \ldots$. par rapport à l'axe GH qui passe par le centre de gravité, on arrive à cette dernière relation,

$$I = I_1 + K^2 (m + m' + m'' \ldots) + 2K (m \cdot d + m' \cdot d' + m'' \cdot d'').$$

Or, $m + m' + m'' + \ldots$ est la masse totale du corps ; . . . . . $m \cdot d + m' \cdot d' + m'' \cdot d'' + \ldots$ est la somme des produits de chaque

masse partielle par sa distance à un même plan perpendiculaire à celui des deux axes, ou bien celle des moments de ces masses par rapport à ce plan, ou bien encore le moment de la masse totale M par la distance du centre de gravité au plan. Mais le centre de gravité du corps est situé sur l'axe GH et par conséquent aussi dans le plan de ces moments : donc, la distance à ce plan est nulle, et il en est de même de la somme $m \cdot d + m' \cdot d' + m'' \cdot d'' + \ldots$. Donc la relation précédente se réduit à cette autre,

$$I = I_1 + MK^2.$$

Ainsi, *le moment d'inertie d'un corps pris par rapport à un axe quelconque est égal au moment de ce corps pris par rapport à un axe parallèle qui passe par son centre de gravité, augmenté du produit de la masse de ce corps, multipliée par le carré de la distance de son centre de gravité au premier axe.* Il résulte de ce théorème que si les distances des diverses molécules d'un corps à son centre de gravité sont petites comparativement à celles qui séparent ce centre de l'axe de rotation, on pourra tout simplement prendre pour le moment d'inertie le produit de la masse du corps par le carré de la distance de son centre de gravité à l'axe. Enfin, si l'on multiplie les deux termes de l'égalité $I = I_1 + MK^2$ par le carré de la vitesse angulaire V_1 avec laquelle le corps tourne autour de l'axe extérieur LM, on aura

$$V_1^2 \times I = V_1^2 \times I_1 + M \cdot K^2 V^2.$$

Or, $V_1^2 \times I$ est la force vive possédée par le corps; V_1^2 est celle qu'il posséderait s'il tournait autour de l'axe parallèle passant par le centre de gravité avec la même vitesse angulaire V_1; $MK^2V_1^2$ est la force vive du même corps en le supposant concentré à son centre de gravité. Donc la force vive d'un corps qui tourne autour d'un axe est égale à la force vive de ce même corps concentré à son centre de gravité, augmentée de celle qu'il posséderait s'il tournait avec la vitesse angulaire qui lui est propre autour d'un axe parallèle passant par ce centre. Enfin, quand les dimensions du corps sont très-petites par rapport au centre de rotation, ou que $I_1 \times V^2$ est négligeable par rapport à $I \times V_1^2$, on a simplement $I \times V_1^2 = MK^2V_1^2$, c'est-à-dire que la force vive d'un corps est égale au produit de sa masse et du carré $K^2V_1^2$ de la vitesse de son centre de gravité.

65. *Moment d'inertie d'un corps par rapport à ses volumes partiels.* — Les moments d'inertie dont il a été jusqu'ici question sont relatives aux masses partielles m, m', m'' .... d'un corps. Or si le corps est homogène et que l'on désigne par D sa densité ou le poids d'un mètre cube de la matière de ce corps, par a, a', a'' le volume des masses m, m', m'', ... ces dernières sont égales à $\frac{D \times a}{g}$, $\frac{D \times a'}{g}$, $\frac{D \times a''}{g}$, parce que les poids de ces masses ne sont que le produit de D multiplié par leurs volumes respectifs. Ainsi, le moment d'inertie $mr^2 + m'r'^2 + ...$ pourra être mis sous cette autre forme

$$\frac{D}{g}(ar^2 + a'r'^2 + a''r''^2 + ...),$$

le moment d'inertie du corps par rapport à son volume étant $ar^2 + a'r'^2 + a''r''^2 ....$ Il suffira de le multiplier par la densité du corps divisée par la gravité g pour en conclure le moment d'inertie par rapport à la masse.

66. *Moment d'inertie de divers corps par rapport à leurs volumes.* — Nous allons maintenant indiquer divers moments d'inertie de volumes tout calculés.

1° Le moment d'inertie d'une barre (fig. 77) dont la longueur est a, pris par rapport à un axe passant par son milieu et qui lui est perpendiculaire, est $\frac{1}{12}a^3$.

2° Le moment d'inertie d'un cylindre droit à base circulaire (fig. 78) dont le rayon est r, et c la longueur parallèle à son axe, est, en nommant π le rapport 3,142, ou $\frac{22}{7}$, de la circonférence au diamètre, $\frac{\pi}{2}cr^4$.

3° Celui d'une jante ou d'un anneau rectangulaire concentrique à l'axe (fig. 79) et dont a est l'épaisseur parallèle à cet axe, b la longueur dans le sens du rayon, enfin r le rayon moyen, est $2\pi rab\left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right)$, ou simplement $2\pi r.ab.r^2$, à $\frac{1}{100}$ près, quand b est moindre que $\frac{1}{7}r$.

4° Celui d'un segment sphérique pris par rapport au diamètre

passant par le milieu de ce segment (fig. 80), r étant le rayon de la sphère, et f la flèche du segment, est . . . . . $\pi f^2 \left(\frac{2}{3} r^2 - \frac{1}{2} fr + \frac{1}{10} f^2 \right)$. Le moment d'inertie de la sphère entière par rapport à un de ses diamètres est $\frac{8}{15} \pi . r^5$.

5° Celui d'un cône droit à base circulaire (fig. 81) dont r est le rayon de la base et a la hauteur, pris par rapport à cette hauteur comme axe, est $\frac{\pi}{10} ar^4$. Par conséquent celui d'un tronc de cône droit dont a est la hauteur, r et r' les rayons de la grande et petite base, pris par rapport à l'axe, sera $\frac{\pi}{10} . \frac{r^5 - r'^5}{r - r'}$.

6° Le moment d'inertie d'un ellipsoïde, en nommant a, b, c (fig. 82) ses trois axes, et E son volume $= \frac{4}{3} \pi abc$, pris par rapport au diamètre a, est $\frac{E}{5} (b^2 + c^2)$.

7° Celui d'un parallélipipède rectangle dont les trois côtés sont a, b, c (fig. 83), pris par rapport à un axe passant par son centre et parallèle à l'arête a, est $\frac{1}{12} abc (b^2 + c^2)$; le moment d'inertie étant pris par rapport à une droite parallèle à a et passant par le milieu de la face qui a b et a pour côtés, est $\frac{1}{12} abc (b^2 + 4c^2)$.

8° Celui d'un prisme droit à base de trapèze ayant b, b' (fig. 84) pour le plus grand et le plus petit côté parallèles, c pour hauteur perpendiculaire à la fois sur les milieux de ces côtés ; ce moment, pris par rapport à un axe passant par les milieux des grandes bases b des trapèzes et parallèle aux arêtes a, est

$$ac \left(\frac{b + b'}{2} \right) \left(\frac{b'^2 + b'^2}{24} + \frac{c^2}{6} \frac{b + 3b'}{b + b'} \right).$$

Quand b et b' sont moindres que $\frac{1}{3} c$, on peut négliger $\frac{b'^2 + b'^2}{24}$, en sorte que le moment d'inertie devient

$$\frac{ac^3}{12} (b - 3b'), \text{ à } \frac{1}{36} \text{ près.}$$

9° Si l'on remplace les trapèzes du prisme ci-dessus par des segments de paraboles, dont c (fig. 85) est la longueur du grand axe, b la corde perpendiculaire à cet axe qui termine la parabole, le moment d'inertie par rapport à une droite parallèle aux arêtes a du prisme et passant par le milieu de b est $\frac{2}{3}abc\left(\frac{3.5.b^2+16c^2}{70}\right)$.

Quand b sera moindre que $\frac{1}{3}c$ l'on prendra

$$\frac{2}{3}abc\ \frac{16}{70}c^2 = a.b.c^3,\ \text{à}\ \frac{1}{14}\ \text{près.}$$

Ce dernier article est en partie relatif aux bras des balanciers, etc., dont la forme doit approcher de celle de la parabole, pour offrir une égale résistance dans tous les points.

67. *Application des moments d'inertie.* — Par exemple, dans le cas d'un marteau qui tourne autour d'un axe O (fig. 86), et dont P serait le poids de la tête, R la distance à l'axe O de son centre de gravité, on pourra (2° partie, 64), attendu que les dimensions de cette tête sont ordinairement assez faibles à l'égard de la distance R, prendre $\frac{P}{g}.R^2$ pour la valeur approchée du moment d'inertie. Quant à celui du manche, on l'obtiendra immédiatement d'après le résultat (7°) ci-dessus, puisque sa forme est à peu près celle d'un parallélipipède rectangulaire, tournant autour d'un axe parallèle à l'une a de ces arêtes et passant par le milieu b de son épaisseur. En prenant donc c pour sa longueur et nommant P son poids, R' la distance de son centre de gravité à l'axe, D sa densité, son moment d'inertie à cause de $D' \times abc = P'$ sera

$$\frac{D}{g}.\frac{ab}{12}(b^2+c^2)+\frac{D}{g}abcR'^2 = \frac{P'}{g}\left(R'^2+\frac{b^2\times c^2}{12}\right).$$

La recherche du moment d'inertie se simplifie pour le volant, en remarquant que toutes ses parties sont rejetées à une distance de l'axe qui est sensiblement constante. Ainsi, en appelant R le rayon moyen du volant, les distances r, r', r'' .... des masses m, m', m'' à cet axe seront égales à R, d'où $I = \frac{P}{g} \times R^2$. Quant à la force

rive du volant dont V est la vitesse angulaire, elle est exprimée par le produit $I \times V_1^2$ ou par $\frac{P}{g} \times R^2 \times V_1^2$. Pour avoir la vitesse angulaire du volant, on comptera le nombre de tours qu'il fait dans un temps déterminé; on multipliera ce nombre par 2π, ou par $\frac{44}{7}$; enfin, le quotient de ce produit, divisé par le nombre de secondes contenues dans la durée de l'observation, ne sera autre chose que la vitesse angulaire. Supposons que V_1 soit de 3^m pour un volant dont le poids P est 200 kilogr. et le rayon moyen R est 2^m, on aura, en remplaçant g par $9^m,81$ pour l'expression du moment d'inertie $\frac{2000}{9,81} \times 4 = 720$, et pour celle de la force vive, $720 \times 9^m = 6480$, dont la moitié représente une quantité de travail de 3240 kilogr. absorbée par l'inertie du volant et restituée ensuite lorsque la puissance cessera entièrement d'agir.

VII.

FORCE CENTRIFUGE.

93. *Idée de la force centrifuge; sa mesure pour un corps de petites dimensions qui tourne avec une vitesse constante.* — Représentons-nous un corps de poids P (fig. 87) attaché à un point fixe C par une barre rigide AC, et imaginons qu'on lui imprime une vitesse quelconque dans une direction AT, perpendiculaire à la barre. Si ce corps était libre, il continuerait, en vertu de son inertie, son mouvement dans cette direction AT et avec la même intensité de vitesse. Mais il n'en est point ainsi; la rigidité de la barre le ramène sans cesse à la même distance du point fixe C et le force à décrire un cercle autour de ce centre. Il y a donc, pendant ce mouvement obligé du corps, deux sections centrales exercées le long de la barre, l'une de la part de celle-ci contre le corps pour le retenir au centre C, et l'autre de la part du corps contre la barre qui tend à éloigner le corps de ce centre. Les deux forces sont visiblement

égales et contraires à cause du principe de l'action égale et contraire à la réaction. La première est dite *force centripède* et la deuxième *force centrifuge*. Nous supposerons d'abord que les dimensions du corps, à l'égard de sa distance au centre fixe, soient assez petites pour que ce corps soit regardé comme un point matériel animé d'une vitesse V; quant au cercle qu'il parcourt dans son mouvement, on peut lui substituer un polygone régulier $ABCDE\ldots$. (fig. 88) d'un très-grand nombre de côtés égaux et dont les sommets sont appuyés à la circonférence. Cela posé, je dis d'abord que le point matériel décrira chacun des côtés de ce polygone avec la même vitesse, ou que la vitesse primitive V se maintiendra lorsque le point passera d'un côté à l'autre.

A cet effet on observera que si le corps possède la vitesse V au moment où il arrive à l'extrémité B du côté AB, il est ensuite animé de deux vitesses simultanées en parcourant le côté adjacent BC. L'une de ces vitesses est la vitesse primitive $BV = V$, suivant le prolongement de AB. L'autre BU est le petit degré de vitesse communiqué par la force centrifuge dans la direction de BO, au bout du petit temps employé par le corps à parcourir chaque côté élémentaire du polygone. Or, on a vu (2e partie, 7) que quand un corps reçoit deux vitesses simultanées, sa vitesse résultante est la même que s'il les possédait successivement, et qu'elles fussent portées à la suite l'une de l'autre dans les directions qui leur sont propres. Ainsi, la résultante BU, avec laquelle le côté BC est décrit, a lieu sur la direction de ce côté, et de plus elle est telle que VU', égale et parallèle à BU, appartient au parallélogramme $UBVU'$ dont BV ou V est la diagonale. D'ailleurs le rayon OB partage l'angle ABC en deux parties ABO et OBC qui sont égales. $ABO = BVU'$ comme angle correspondant. $OBC = BUV$ comme angles alternes-internes. Donc $BVU' = BU'V$. Par conséquent le triangle VBU' est isocèle, et ses deux côtés BV et BU' sont égaux; ce qui indique que la vitesse conservée sur BC est la même que celle possédée par le corps sur le côté antérieur AB. D'où il résulte que *la vitesse communiquée au point matériel ne s'altère pas dans son mouvement circulaire*. La chose était facile à prévoir, parce que la force centrifuge est toujours dirigée perpendiculairement au mouvement, et qu'elle ne travaille pas; elle ne peut donc détruire ni la force vive ni la vitesse du point matériel. Remarquons que UB, ou VU', est précisément le petit degré de vitesse imprimé

par la force centrifuge F pendant le temps t employé à décrire chaque côté élémentaire du polygone, et que si on appelle M la masse du point matériel, la mesure de cette force (1re partie, 74) sera $F = \frac{M \times VU'}{t}$. Tirons le rayon CO; le triangle BOC est semblable au triangle VBU' parce qu'ils sont isocèles, que l'angle $OBC = BUV$, et que l'angle BVU' étant égal à BUV, on a visiblement $BCO = BVU$. Donc on aura la proportion

$$BO : BC :: BU' : VU',$$

d'où

$$VU' = \frac{BC \times BU'}{BO} = \frac{BC \times V}{R},$$

en désignant par R le rayon BO du cercle et en se rappelant que BU' vient d'être reconnu égal à la vitesse primitive V. D'ailleurs, le côté BC du polygone sera décrit par le corps pendant le petit temps t, et avec la vitesse V, et sa longueur doit être $V \times t$: donc, on aura $VU' = \frac{V^2 \times t}{R}$, et, par suite,

$$F = \frac{M \times V^2 \times t}{t \times R} = \frac{M \times V^2}{R}.$$

Telle est l'expression de la force centrifuge. Son numérateur $M \times V^2$ étant le produit de la masse du corps et du carré de sa vitesse, c'est-à-dire sa force vive, on voit que *la force centrifuge d'un corps de petites dimensions comparativement à sa distance au centre autour duquel il tourne, est égale à la force vive imprimée à ce corps divisée par le rayon du cercle que décrit son centre de gravité.* Supposons que le poids du corps soit de 100 kilogr. et qu'il décrive un cercle de 1^m de rayon avec une vitesse de 4^m comptée sur cette circonférence, on posera $R = 1^m$, $P = 100$ kilogr.,

$M = \frac{P}{g} = \frac{100}{9{,}81}$, $V = 4^m$, $V^2 = 16$, et l'on conclura

$$F = \frac{100}{9{,}81} \times 16 = 160 \text{ kilogr. environ.}$$

Donc, le corps tend à tirer avec un effort de 160 kilogr. la barre rigide qui le retient dans son mouvement circulaire.

69. *Force centrifuge des corps à grandes dimensions.* — Considérons maintenant une tranche fort mince $ABCD$ (fig. 89), tournant autour d'un poids O situé dans son plan, ou autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, avec une vitesse angulaire V_1, la vitesse angulaire d'une petite masse m de cette tranche sera $r\,V_1$ (2e partie, 60), r étant sa distance au point O. La force vive de cette même masse sera $mr^2 . V_1^2$. Quant à sa force centrifuge, elle sera égale à $\frac{mr^2V_1^2}{r}$, ou mrV_1^2, et de plus elle sera dirigée selon le rayon Om du cercle que cette masse décrit autour du centre commun de rotation. Tirons par ce dernier point deux droites arbitraires et rectangulaires Ox et Oy; puis décomposant la formule centrifuge mrV_1^2 en deux autres X et Y, dirigées suivant ces deux droites; ces composantes et leur résultante étant proportionnelles aux côtés, et la diagonale du rectangle $Oqmp$, on aura la proportion

$$Om : Op :: MrV_1^2 : X;$$

ou $$X = \frac{mrV_1^2 \times Op}{Om} = V_1^2 . mOp,$$ à cause de $Om = r$.

On aura également

$$Om : Oq :: mrV_1^2 : Y = V_1^2 m . oq.$$

Pour une autre petite masse m', sa force centrifuge, et les composantes X' et Y' de cette force selon les droites Ox et Oy, seraient $m'r'V_1^2$, $V_1^2 . m' . Op$, et $V_1^2 . m' . Oq'$, etc..... De cette manière toutes les forces centrifuges sont réduites à deux groupes de forces respectivement situés sur les droites Ox et Oy et qui ont chacune pour résultante $V_1^2 (\overline{m \times Op} + \overline{m' \times Op'} + ...)$, et $V_1^2 (\overline{m \times Oq} + \overline{m' \times Oq'} ....)$. Remarquons que ..... $\overline{m \times Op} + \overline{m' \times Op'} + ...$ est la somme des moments de chaque masse par rapport à l'axe Oy, et que cette somme est égale au produit de la masse totale M multipliée par la distance Op ou x_1 du centre de gravité G à cet axe. Il en est de même à l'égard de $\overline{m \times O} + \overline{m' \times Oq'} + ...$, somme qui est égale à $M \times y_1$, y_1 représentant la distance QO du centre de gravité à l'axe Ox. Ainsi les forces centrifuges se réduisent aux deux forces $V_1^2 M x_1$ et $V_1^2 M y_1$, perpendiculaires entre elles et dont la résultante unique

est égale à

$$\sqrt{V_1^4 M^2 x_1^2 + V_1^4 M^2 y_1^2} = MV_1^2 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$= MV_1^2 \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2} = MV_1^2 \sqrt{\overline{OG}^2} = MV_1^2 \times OG.$$

Donc *la force centrifuge d'une tranche très-mince tournant autour d'un point situé dans son plan est égale au carré de la vitesse angulaire multiplié par le produit de sa masse et de la distance de son centre de gravité au point de rotation.*

On voit également que cette force est appliquée au centre de gravité de la tranche, car elle agit suivant la direction OG.

Supposons encore un corps quelconque ABC (fig. 90), tournant autour de l'axe LM. Décomposons ce corps en tranches très-minces perpendiculaires à cette ligne. Elles donneront lieu à autant de forces centrifuges appliquées aux centres de gravité $G, G', G'', \ldots$ de chaque tranche, et égales au carré de la vitesse angulaire du corps, multiplié par le produit de chaque masse et de la distance de son centre de gravité à l'axe. Toutes ces forces seront perpendiculaires à LM, sans être généralement parallèles entre elles. Tantôt elles auront une résultante unique ; tantôt elles se réduiront à deux forces ; tantôt enfin leur résultante sera nulle, et dans ce dernier cas ces forces n'exerceraient aucun effort, aucune pression sur l'axe de rotation.

Si tous les centres de gravité $G, G', G'', \ldots$ sont sur une même droite AB (fig. 91), parallèle à l'axe de rotation, les distances de ces centres à l'axe LM sont les mêmes et égales à R. Les forces centrifuges deviennent parallèles et sont toutes situées dans un même plan passant par AB et par LM ; leur résultante passe par le centre de gravité de la masse entière et est égale à la somme . . . . . $V_1^2 R(M + M' + M'' + \ldots)$. Or, $M + M' + M'' + \ldots$ est précisément cette masse totale : donc *pour un corps dont toutes les tranches perpendiculaires à l'axe de rotation ont leur centre de gravité sur une même parallèle à cet axe, la force centrifuge est la même que si toute la masse du corps était concentrée à son centre de gravité.* Cette simplification est particulièrement applicable à la sphère, au cylindre, aux surfaces de révolution dont les axes sont parallèles a celui de rotation. Leur force centrifuge se réduit à celle de leur centre de gravité, en y concentrant leurs masses respectives.

70. *Exemple de la force centrifuge.* — La considération de la force centrifuge explique une foule de faits rapportés dans le *Cours de Mécanique* de M. Dupin. Quand on fait faire le manége à un cheval, l'instructeur, placé au centre C (fig. 92) du cercle décrit par l'animal, retient ce dernier au moyen d'une longe attachée au bridon, afin de détruire autant que possible l'action de la force centrifuge. Elle est, comme on l'a vu (2e partie, 68), proportionnelle au poids du cheval et au carré de sa vitesse. L'effort du cheval sur sa longe devient ainsi quatre fois, neuf fois plus grand pour une vitesse double, triple. Cette même force exerce sur le cheval un effort horizontal qui tend à le renverser en dehors du cercle. C'est afin de résister à cette action qu'il incline son corps en dedans. Cette inclinaison est telle que sa direction doit se confondre avec la résultante du poids du cheval et de la force centrifuge et passer au milieu de l'intervalle de ses pieds. Si donc, sur la verticale et l'horizontale du centre de gravité G du cheval, on prend des parties GF et GP proportionnelles à la force centrifuge et au poids du cheval, et que l'on construise le rectangle $FGPR$, la diagonale GR donnera l'inclinaison cherchée. V et R exprimant la vitesse du cheval et le rayon du cercle, la force centrifuge

$$GF = \frac{P}{g} \times \frac{V^2}{R}.$$

Par conséquent, la pression GR ou

$$\sqrt{GP^2 + FG^2} = P\sqrt{1 + \frac{V^4}{g^2R^2}}.$$

Enfin, pour que le cheval ne puisse glisser en travers du chemin qu'il parcourt, il faut que l'inclinaison AB de ce dernier soit perpendiculaire à la direction GO de la pression totale.

Les écuyers qui se tiennent debout sur un cheval courant au galop penchent leur corps de manière que la résultante de leur poids et de leur force centrifuge passe entre les points où leurs pieds sont appuyés sur le cheval.

Quand une voiture tourne sur une route (fig. 93), son mouvement circulaire produit une force qui tend à la renverser du dedans au dehors; et le risque qu'elle ne soit renversée croît avec son poids et avec le carré de sa vitesse, tandis qu'il diminue à mesure que le

rayon du tournant devient plus considérable. Voilà pourquoi il y a de l'avantage à faire des raccordements dont les rayons soient très-grands, et il convient pour que les vitesses de la voiture ne prennent pas trop d'accélération, que les pentes longitudinales soient très-douces. On déterminera comme précédemment, la pression totale ou la résultante du poids de la voiture et de la force centrifuge déduite de la vitesse moyenne que l'on peut supposer. Quant à la pente à donner du dehors au dedans à l'inclinaison transversale du tournant, elle doit être perpendiculaire à cette résultante. En France on a coutume de terminer les chaussées de route par une surface bombée. Cette forme est éminemment dangereuse dans les raccordements pour une voiture qui en rencontre une autre et qui est obligée de circuler sur le versant extérieur. La fronde, la hache et la masse d'armes, exercent sur la main quand on les fait mouvoir circulairement un effort de traction égal à la force centrifuge. Il s'obtient en divisant la force vive due à la vitesse imprimée, par le rayon du cercle que décrit la fronde, ou par la longueur du manche, soit de la hache, soit de la masse d'armes. Une grande roue de volant se compose de plusieurs jantes partielles réunies par des bras à un moyeu commun (fig. 94). L'effort avec lequel la force centrifuge agit pour tirer les bras hors du moyeu et pour détacher chaque jante partielle se calcule au moyen de la masse de la jante, de son rayon et de la vitesse que possède le volant. Cette même force arrache encore les clous qui fixent les bandes de fer contre les roues de voitures lorsque celles-ci prennent une grande vitesse. Et c'est afin d'éviter un pareil inconvénient, qu'on a le soin de traverser les extrémités de chaque bande et la jante par un boulon qu'un écrou arrête contre la face intérieure de cette dernière.

71. *Variations de la force centrifuge à la surface de la terre. Explication de l'aplatissement de cette dernière.* — On sait que la terre tourne autour de son axe en vingt-quatre heures et que tous les parallèles, c'est-à-dire les cercles perpendiculaires à cet axe, ont des vitesses qui vont en diminuant depuis l'équateur jusqu'aux pôles. Imaginons que cet axe soit perpendiculaire au plan du tableau, de façon que ces cercles s'y projettent de grandeur naturelle selon des circonférences concentriques.

Soit un corps A (fig. 95) de masse quelconque M, placé à la

surface de la terre et dans un plan parallèle quelconque dont R est le rayon. Ce corps, emporté dans le mouvement terrestre, éprouvera une force centrifuge mesurée par $MR \cdot V_1^2$, V_1 étant la vitesse angulaire de la terre ; ce qui nous apprend que cette force varie à la surface de cette dernière proportionnellement à la grandeur des rayons des parallèles. Elle est la plus grande possible à l'équateur, et nulle vers les pôles. Enfin, comme elle tend à diminuer l'action de la gravité, celle-ci est par conséquent la plus grande possible aux pôles et diminue dans les parallèles qui se rapprochent de l'équateur, où elle est réduite à son minimum. La terre n'est point tout à fait sphérique, et les observations s'accordent à démontrer qu'elle est renflée à l'équateur et aplatie vers ses pôles. On conçoit en effet que si elle a été primitivement couverte d'eau, les parties du liquide comprises sous l'équateur et cédant à l'action centrifuge se sont élevées au-dessus de l'axe de rotation, et qu'au contraire les parties du liquide voisines des pôles ont dû abandonner les pôles pour remplacer les premières vers l'équateur. C'est au reste ce que confirme le mouvement de rotation qu'on imprime à un vase contenant de l'eau à une certaine hauteur, et composé de quatre tubes fermés en croix qui se communiquent (fig. 96). Le mouvement ayant lieu autour de deux de ces tubes maintenus horizontalement, on aperçoit l'eau gagner les parties les plus éloignées de l'axe dans les deux tubes verticaux, et s'écarter des tourillons dans les deux autres.

72. *Mouvement d'un corps dans un canal circulaire.* — Il peut arriver qu'un corps, au lieu d'être retenu autour d'un point fixe par une verge rigide, soit forcé de marcher dans un canal circulaire. Mais il n'en a pas moins une force centrifuge égale à $M \times \frac{V^2}{R}$, M et R étant la masse du corps et le rayon du cercle qu'il décrit, et V la vitesse de ce corps, parce que dans le mouvement qu'on lui imprime, il est contraint par la résistance du canal, de rester toujours à la même distance du centre C (fig. 97). Si ce canal est horizontal, la vitesse demeure constante, et la pression du corps contre les parois est uniquement égale à la force centrifuge. Mais si le canal occupe une position verticale, la pesanteur exerce alors de l'influence ; non-seulement elle altère la vitesse du corps, mais encore le poids P du corps se décompose en deux autres forces, l'une tangentielle, et l'autre perpendiculaire au mouvement. Celle-

ci a lieu tantôt dans le même sens que la force centrifuge, tantôt en sens contraire; de sorte que la pression totale devient plus grande ou moindre que la force centrifuge, selon ces deux circonstances. Il est facile de trouver toutes les vitesses du corps quand on connaît l'une d'entre elles, et cela au moyen du principe des forces vives. Si, par exemple, cette dernière est la vitesse V' qui correspond au point le plus bas, et que l'on veuille avoir la vitesse V qui a lieu dans une position élevée de la hauteur H, au-dessus de ce point, $M \cdot V'^2 - M \cdot V^2$ sera ici la perte de force vive, et cette perte sera égale au double de la quantité de travail que la pesanteur absorbe, dans l'intervalle dont il s'agit, c'est-à-dire à $2PH$. On aura, par conséquent,

$$M(V'^2 - V^2) = 2PH,$$

ou $$V'^2 - V^2 = 2gH, \quad \text{et} \quad V = \sqrt{V'^2 - 2gH}.$$

Ainsi, la vitesse est diminuée par la gravité pendant l'ascension du corps; mais comme, pendant sa descente, cette force restitue ensuite les quantités de travail qu'elle avait d'abord absorbées, on voit que la vitesse redevient la même dans les points situés à même hauteur; qu'elle est la plus petite ou la plus grande possible au point le plus haut et au point le plus bas, et qu'enfin à chaque révolution, les variations de cette vitesse sont périodiques.

73. *Force centrifuge d'un corps qui décrit une courbe quelconque. Application à la trajectoire de la bombe.* — Quand un corps, en vertu des forces motrices qui le sollicitent, décrit une certaine courbe dans l'espace, c'est comme s'il parcourait successivement les petits arcs *osculateurs* dont celle-ci est composée, ou ceux qui appartiennent à des cercles dont la courbure se rapproche le plus possible de celle de la courbe en chaque point. Si l'on connaissait les centres c, c', c'' (fig. 98) de ces arcs successifs, ainsi que leurs rayons respectifs $Ac, A'c', A''c''$, la courbe serait immédiatement donnée par la suite des arcs $AA', A'A'', A''A'''$, décrits de ces centres et terminés de part et d'autre aux extrémités des rayons. Cela posé, il est facile de voir que la considération de la force centrifuge, jointe à celle des forces motrices, suffit pour obtenir la position des centres et la grandeur des rayons des arcs osculateurs, et par conséquent pour en déduire le tracé et la forme de la trajectoire que le mobile

doit parcourir. En effet, appelons P la résultante AP des forces motrices qui agissent sur le corps au point A, M la masse de ce corps, V la vitesse qu'il possède en ce point et qui est dirigée suivant la tangente AT. Puisque le corps est censé parcourir l'arc de cercle AA' très-petit, non-seulement il conservera sur cet arc la même vitesse V, mais encore la force centrifuge F, qui tendrait à l'éloigner du centre C, sera égale à

$$\frac{M \times V^2}{Ac} = \frac{M \times V^2}{r}.$$

Mais comme le mobile, en décrivant la courbe, n'abandonne pas le petit arc AA', il faut qu'il y soit retenu par une force égale et immédiatement opposée à F, ou que la force motrice AP étant décomposée en deux autres, l'une Aq tangentielle à l'arc, et l'autre Ap perpendiculaire à la tangente AT, cette dernière composante soit précisément égale à F. On aura donc

$$Ap \quad \text{ou} \quad p = \frac{M \times V^2}{T},$$

d'où

$$r = \frac{M \times V^2}{p}.$$

Telle sera la grandeur du rayon Ac de l'arc initial AA'. Son centre sera sur la perpendiculaire à la tangente AT. L'arc AA' étant décrit pour un petit temps donné t, ou pour un dixième de seconde, par exemple, on cherchera la quantité de travail produite dans cet intervalle par la force motrice Ap supposée constante, de A en A'. Appelant K' cette quantité de travail, et V' la vitesse que le corps possède en A' et sur la tangente $A'T'$, on aura, en vertu du principe des forces vives,

$$M \times (V'^2 - V^2) = 2K';$$

d'où

$$V'^2 = V^2 + \frac{2K'}{M}.$$

La loi de la force motrice étant donnée, on connaîtra la force motrice P' en A', et sa composante perpendiculaire à la tangente $A'T'$ devra être égale à la force centrifuge F' ou à $\frac{M \times V'^2}{r'}$. Égalant enfin ces deux dernières entre elles, on tirera la valeur de r', c'est-

à-dire le rayon $A'c'$ du deuxième arc $A'A''$. Du point c' comme centre, on décrira $A'A''$ égal au produit de V' et de t; puis, au moyen de l'équation

$$(V''^2 - V'^2)\, M = 2K',$$

ou

$$V''^2 = V'^2 + \frac{2K''}{M},$$

on aura V'' ou la vitesse en A''; ici K'' représente la quantité de travail produite par la force P' supposée constante, depuis A' jusqu'à A''. Soit P'' la valeur de la force motrice en A', déduite d'après la loi de cette force; elle donnera la valeur de sa composante perpendiculaire à la tangente $A''T''$. Mais cette dernière composante est égale à la force centrifuge $\frac{M \times V''^2}{r''}$. Donc on aura r'', c'est-à-dire le rayon $A''C''$ du troisième arc $A''A'''$....

Nous reproduirons ici pour exemple, la trajectoire de la bombe, en supposant que l'on tienne compte de la résistance de l'air. Il faut, dans cette courbe, distinguer, 1° la partie la plus voisine de l'origine du mouvement, qui se confond sensiblement avec la tangente initiale; 2° les parties ascendantes et descendantes voisines du sommet; 3° le reste de la branche descendante. Soit AB (fig. 99) la direction de la vitesse initiale V de la bombe, P et M le poids et la masse de cette bombe. Puisque celle-ci se meut d'abord pendant quelque temps sur cette tangente, la résistance de l'air sera la seule force motrice qui d'abord la sollicitera selon cette direction AB. Au moyen des tables qui donnent les résistances correspondantes à une vitesse quelconque et au calibre du projectile, on obtiendra la valeur de cette force motrice en A; on en calculera le petit degré de vitesse enlevé par cette force au mobile au bout d'un petit temps t, et par conséquent aussi la valeur de la vitesse qu'il conserve au bout de ce temps et toujours sur la direction de AB. On cherchera dans la table la résistance qui correspond à cette nouvelle vitesse; puis on déduira le petit degré de vitesse que cette deuxième résistance enlève au bout d'un deuxième petit temps t égal au premier, ainsi que la vitesse conservée par la bombe au bout de cet instant. Cette nouvelle vitesse conservée donnera lieu à une nouvelle résistance, de sorte que sur la direction AB, on aura toutes les vitesses acquises, et par conséquent les espaces par-

courus au bout d'un temps quelconque. Mais remarquons que jusqu'alors on a fait abstraction de la pesanteur. Si le temps écoulé T pendant le passage du mobile, de A en B', par exemple, devient assez long pour que l'espace $B'A'$ qu'il décrirait pendant ce même temps en vertu de la pesanteur devienne sensible, on abaissera du point B' une verticale $B'A'$ égale à cet espace calculé $\frac{gT^2}{2}$, et le point A' sera un point de la courbe qui n'appartiendra plus à la tangente initiale AB. Maintenant, à partir du point A', on se servira de la considération de la force centrifuge. A cet effet on supposera que la vitesse en A' est la même que celle qui avait été acquise en B' par la bombe sur la direction de AB, parce que cette dernière est beaucoup plus grande que celle qui est imprimée par la pesanteur dans le sens de $B'A'$ au bout du temps T. Soit V' cette vitesse en B' ou en A'; la force centrifuge en A' sera donc $\frac{M \times V'^2}{r'}$.

Pour avoir le rayon osculateur r' ou $A'C'$, on portera sur la verticale $A'B'$ une partie $A'P$ proportionnelle au poids de la bombe, et on décomposera cette force en deux autres, $A'p$ et $A'q$, perpendiculaires et tangentielles à la courbe, au moyen du rectangle $PqA'p$, dont la diagonale est $A'P$ ou P; et le côté $A'p$ sera proportionnel à la composante p du poids, normale ou perpendiculaire à la courbe : comme d'ailleurs cette dernière doit être égale et directement opposée à la force centrifuge pour que le mobile soit retenu sur la courbe, on aura

$$p = \frac{M \times V'^2}{r'},$$

et, par suite,

$$r' = \frac{M \times V'^2}{p} = A'c'.$$

On décrira l'arc $A'A''$ avec ce rayon et on le prendra égal à $V' \times t$, t étant le petit temps élémentaire que l'on choisit et qui sera un dixième de seconde. Veut-on avoir la vitesse en A''? appelons f la résistance de l'air en kilogrammes qui correspond à la vitesse V'. Désignons par u la vitesse que conserverait la bombe en arrivant en A'', si la résistance de l'air demeurait constante pendant que $A'A''$ est parcouru. Remarquons, d'ailleurs, que la composante tangen-

tielle q du poids est la seule force qui travaille, et qu'elle s'ajoute à la résistance de l'air pour détruire la vitesse. On aura donc, en vertu du principe des forces vives,

$$\overline{M \times V'^2} - \overline{M \times u^2} = 2AA'(f+q),$$

$$\text{ou } u^2 = V'^2 - \frac{2AA'}{M}(f+q).$$

Si la nouvelle vitesse u est beaucoup plus petite que V', il est évident que la résistance de l'air aura diminué pendant l'intervalle dont il s'agit, et qu'ainsi la vitesse u est elle-même trop faible. Cherchant dans les tables la résistance f' qui correspond à u, on supposera que la résistance de l'air a une action égale à cette résistance pendant l'intervalle AA'', et au moyen de l'équation

$$u'^2 = V'^2 - \frac{2AA''}{M}(f'+q),$$

on aura alors pour A'' une vitesse u' qui sera au contraire trop forte. Donc la vitesse véritable V'' sera comprise entre u et u', et pourra être considérée comme leur moyenne $\frac{u+u'}{2}$. Connaissant de cette manière V'', on se servira de cette vitesse pour la faire entrer dans la force centrifuge qui se développe en A''; on déterminera en ce point la composante du poids normal à la courbe, et on l'égalera à la force centrifuge $\frac{M \times V''^2}{r''}$; ce qui donnera le rayon r''.

Quant à la composante tangentielle du poids, elle sera ajoutée à la résistance de l'air qui correspond à V'', pour établir l'équation des forces vives à l'aide de laquelle on aura, comme précédemment, la vitesse conservée à l'extrémité supérieure du nouvel arc qui a r'' pour rayon, etc. En continuant de proche en proche, on arrivera au point L le plus élevé, où la composante tangentielle du poids est nulle, puis ensuite à la branche descendante où cette composante devient favorable au mouvement : il y a donc entre les deux branches cette différence, que dans la branche ascendante, la force motrice qui retarde le mouvement est la somme de la résistance de l'air, et de la composante tangentielle de la pesanteur, et que c'est au contraire leur différence dans la branche descendante

qui y produit une accélération. Cette accélération finit même par être si grande, que le mobile tend de plus en plus en une direction verticale.

VIII.

PENDULE.

74. *Définition du pendule. Idée générale de son mouvement.* — Un pendule est en général un fil à plomb attaché par une de ses extrémités à un point fixe, et dont l'extrémité inférieure supporte un corps pesant. Lorsque le pendule se trouve dans la position où son centre de gravité G et son point de suspension A (fig. 100) sont dans la même verticale, le pendule est à l'état d'équilibre stable (2e partie, 51); mais aussitôt qu'il en est dérangé et abandonné ensuite à lui-même, il prend autour de la position verticale un mouvement oscillatoire que la résistance de l'air affaiblit continuellement. C'est afin de diminuer l'influence de cette résistance, que l'on donne au corps pesant la forme d'une lentille dont l'arête circulaire est tout entière dans le plan du mouvement du centre de gravité. Nous réduirons d'abord le pendule à l'état d'un point matériel pesant suspendu à l'extrémité d'un fil sans pesanteur ; et nous ferons voir, plus loin, comment on ramène à ce cas tous les pendules ordinaires. Ainsi AC (fig. 101) étant la longueur du fil fixé en A et qui supporte le point matériel, on conçoit que ce point décrira un cercle de rayon AC autour de A, et que si, après avoir amené ce point pesant en C, on le lâche ensuite, il descendra vers la position B d'équilibre. Appelant H la hauteur BD du point de départ C au-dessus du point le plus bas B, et U la vitesse acquise en ce dernier point, on aura, d'après le principe des forces vives, $U^2 = 2gH$. Mais, en vertu de la vitesse U que le point pesant a acquise, au lieu de s'arrêter en B, il continuera sa marche de l'autre côté et remontera jusqu'au point C' du cercle où cette vitesse U aura été éteinte et qui sera à même hauteur que C. Puis le mouvement recommencera en sens contraire à partir de C'. La

pesanteur aura restitué en B la vitesse perdue en C, et cette même vitesse s'éteindra de nouveau en C; de telle sorte que les mêmes oscillations se continueraient indéfiniment, si, comme nous l'avons dit, la résistance ne diminuait par elle-même les petits degrés de vitesses éteints ou communiqués à chaque instant.

75. *Lois de mouvement du pendule simple.* — Il est indispensable de connaître la durée des oscillations du pendule; nous verrons en effet qu'à l'aide de cette détermination, le pendule devient un instrument commode pour mesurer le temps ainsi que la valeur g de la vitesse que dans les divers lieux de la terre la pesanteur imprime au bout de la première seconde. Considérons l'instant où le pendule est arrivé en M après être parti du point C (fig. 102); appelons V la vitesse acquise au point M, et y la hauteur PM dont le mobile est descendu; on aura toujours $V^2 = 2g \cdot y$. Si l'on suppose qu'à partir de l'instant de la position M, le pendule décrive l'arc MN ou s dans un temps très-petit t, on pourra regarder le mouvement comme uniforme, pendant cette courte durée, et cet arc MN comme ayant été parcouru avec la même vitesse V. Donc on aura

$$MN = V \times t, \quad \text{et} \quad V = \frac{MN}{t} = \frac{s}{t},$$

et, par suite,

$$t = \frac{s}{V}.$$

Élevée au carré, cette égalité devient $t^2 = \frac{s^2}{V^2}$, ou, à cause de $V^2 = 2gy$,

$$t^2 = \frac{s^2}{2gy}.$$

Représentons-nous un deuxième pendule d'une longueur différente du premier, mais semblablement écarté et tel que l'angle $B'A'C'$ soit égal à BAC. Soit d'ailleurs sur ce nouveau pendule une position intermédiaire M' semblable à celle de M, et pour laquelle l'angle $M'A'C'$ est égal à l'angle MAC. Appelons V' la vitesse du deuxième pendule à l'instant de la position M', et t' le petit temps employé à parcourir l'arc $M'N'$ ou s' semblable à l'arc MN. Enfin, nous supposerons que les deux pendules ne soient pas dans le même

lieu de la terre, ou que la gravité étant g pour l'un, elle soit g' pour l'autre. On aura visiblement

$$V'^2 = 2g' \cdot y' \quad \text{et} \quad t'^2 = \frac{s'^2}{2g'y'}.$$

Si maintenant on compare entre eux les temps t et t' employés à décrire les petits arcs semblables s et s', on aura

$$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{g'}{g} \times \frac{\frac{s^2}{y}}{\frac{s'^2}{y'}}.$$

Or, ces arcs sont proportionnels à leurs rayons AC et $A'C$, ou r et r', et ils donnent la proportion

$$s^2 : s'^2 :: r^2 : r'^2.$$

Tout étant semblable dans l'une et l'autre figure, on a

$$PM : P'M' :: AC : A'C, \quad \text{ou} \quad y : y' :: r : r'.$$

Divisons ces deux proportions terme à terme, on trouvera

$$\frac{s^2}{y} : \frac{s'^2}{y'} :: r : r', \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{s^2}{y}}{\frac{s'^2}{y'}} = \frac{r}{r'}.$$

On aura donc enfin

$$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{g'}{g} \times \frac{r}{r'},$$

et, par suite,

$$\frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{g'}{g}} \times \sqrt{\frac{r}{r'}},$$

ou

$$t = t' \sqrt{\frac{g'}{g}} \times \sqrt{\frac{r}{r'}}.$$

Ainsi, lorsque deux pendules ont été dérangés de leur verticale dans une position semblable et qu'ensuite on les abandonne à eux-mêmes, les temps élémentaires employés par chacun d'eux pour décrire des petits arcs semblables sont toujours dans un rapport constant. Or, les arcs CB et $C'B'$, décrits dans les descentes totales,

se composent d'un même nombre de petits arcs semblables, et les temps respectifs $\frac{T}{2}$ et $\frac{T'}{2}$, qui expriment les durées de ces descentes, se composent en pareil nombre, des petits temps élémentaires qui correspondent aux petits arcs semblables, et dont le rapport ne cesse pas d'être $\sqrt{\frac{g'}{g}} \times \sqrt{\frac{r}{r'}}$. Donc ce dernier rapport est aussi commun aux temps $\frac{T}{2}$ et $\frac{T'}{2}$ des demi-oscillations complètes, et l'on aura

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{g'}{g}} \times \sqrt{\frac{r}{r'}}.$$

Cette dernière relation apprend que, pour deux pendules semblables ou dont l'étendue des oscillations mesure des angles égaux, les temps de ces oscillations en deux endroits différents de la terre sont entre eux comme les produits des racines carrées du rapport de leurs longueurs et du rapport inverse des valeurs de la gravité à ces deux endroits.

Si les deux pendules sont au même lieu, on a

$$g = g', \quad \text{et} \quad \frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{r}{r'}}.$$

Donc, dans un même lieu, les durées des oscillations sont entre elles comme les racines carrées de leurs longueurs.

Si les longueurs des deux pendules sont les mêmes et qu'ils soient placés en deux lieux différents, on fera $r = r'$; d'où

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{g'}{g}},$$

c'est-à-dire que, dans deux endroits quelconques de la terre, les durées de l'oscillation de deux pendules égaux et d'une même amplitude sont réciproquement entre elles comme les racines carrées des valeurs de la gravité dans ces deux lieux.

76. *Durée de l'oscillation d'un pendule dont l'écart est fort petit.* — A l'aide des conséquences précédentes, il serait possible de déduire, de la longueur d'un pendule qui bat les secondes, celle du pendule

qui oscillerait dans un quart de seconde ou dans une minute au même lieu, ou de trouver, avec deux pendules égaux en longueur et d'égale amplitude, la valeur de la gravité d'un endroit, quand on connaîtrait celle qui correspond à un autre lieu de la terre. Toutefois cela suppose dans l'une et l'autre circonstance que les deux pendules s'écartent de la même quantité à partir de la verticale, au bout de leur oscillation. Mais on arrive plus directement à ces deux solutions en ne faisant faire à ces deux pendules que de très-petites oscillations, parce que leur durée est indépendante de leur amplitude : c'est ce qu'il est facile de démontrer. Rappelons-nous que M (fig. 103) étant un point quelconque de l'arc parcouru par un pendule, nous avons représenté par y la hauteur PM dont il est descendu à partir de C, par H la hauteur de chute BD au bout d'une demi-oscillation BC, et par V la vitesse acquise au point M. Soit MN un petit arc décrit pendant un temps t à partir de l'instant où le pendule a acquis la vitesse V en M, on a à la fois $V^2 = 2gy$, $t = \frac{s}{V} = \frac{s}{\sqrt{2gy}}$, et, par suite, $t^2 = \frac{s^2}{2gy}$. Les deux triangles semblables MQN et MEA donnent la proportion

$$QN : EM :: MN : AM,$$

d'où

$$MN = \frac{QN \times AM}{EM}.$$

Remarquons que EM est moyen proportionnel aux deux segments du diamètre du cercle décrit par le pendule ou à EB, et $2AB - EB$ ou $2r - EB$, et qu'il est égal à $\sqrt{2r \cdot EB - \overline{EB}^2} = \sqrt{2r \cdot EB}$, à cause que EB est négligeable ou l'hypothèse de la petite amplitude de l'oscillation. Donc, on aura

$$MN = \frac{QN \times AM}{\sqrt{2r \times EB}} = \frac{QN \times r}{\sqrt{2r \times EB}} = \frac{QN\sqrt{r}}{\sqrt{2 \cdot BE}} = s,$$

et

$$t^2 = \frac{s^2}{2g \cdot y} = \frac{\overline{QN}^2 \cdot r}{4g \cdot y \cdot BE}.$$

Sur BD comme diamètre, décrivons la demi-circonférence DmB,

et par les points M, N, extrémités de MN ou s, tirez les horizontales Mm et Nn, coupant cette demi-circonférence aux points m et n. Joignons le point m au centre O de la demi-circonférence ; enfin, menons la verticale nq. On remarquera d'abord que mE, moyen proportionnel entre les deux segments du diamètre BD, est tel que l'on a

$$\overline{mE}^2 = BE \times DE = BE \times PM = BE \times y.$$

Remplaçant ce dernier produit par cette nouvelle valeur dans celle de t^2, celle-ci deviendrait

$$t^2 = \frac{\overline{QN}^2 \times r}{4g \cdot mE^2} = \frac{r}{4g} \times \left(\frac{QN}{mE}\right)^2.$$

Les deux triangles semblables MOE et mqn donnant

$$\frac{QN}{mE} = \frac{qm}{mE} = \frac{mn}{mO},$$

on aura enfin

$$t^2 = \frac{r}{4g} \times \left(\frac{mn}{mO}\right)^2,$$

et, par suite, $$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \times \frac{mn}{mO}.$$

Telle est la valeur du petit temps employé à parcourir le petit arc MN, et elle est proportionnelle au petit élément mn de la demi-circonférence DmB, à même hauteur que le premier MN. Si l'on déterminait tous les petits temps employés à décrire les petits arcs élémentaires de l'arc BC et qu'on en prît la somme, on aurait le temps $\frac{T}{2}$ d'une demi-oscillation entière, et ce temps sera visiblement égal au facteur commun $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \times \frac{1}{mO}$ multiplié par la somme de tous les éléments tels que mn de la demi-circonférence BmD, ou par cette demi-circonférence, ou enfin par πmO (π étant le rapport 3,1416 de la circonférence au diamètre. Donc, on aura

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \times \frac{\pi \cdot mO}{mO} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}},$$

et, par suite, $$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

pour la durée d'une oscillation complète.

D'après la formule ci-dessus on voit que cette durée est indépendante de l'amplitude de l'oscillation, pourvu que celle-ci n'excède pas une certaine limite. Ainsi, en abandonnant à lui-même un pendule dévié d'une faible quantité hors de la verticale, les oscillations qu'il fera seront de même durée ou *isochrones*, et si on compte le nombre de celles qui auront eu lieu pendant un temps mesuré avec une bonne montre, pendant 10′ ou 20′, par exemple, on obtiendra la durée de chacune d'elles en divisant le temps de l'observation par le nombre des battements.

L'expérience ayant appris que le pendule qui à Paris bat les secondes a une longueur de $0^m,994$; veut-on connaître celle du pendule qui indique dans cette même ville une demi-seconde? on posera la proportion

$$1'' : (\tfrac{1}{2})'' :: \sqrt{0^m,994} : \sqrt{x},$$

ou, en élevant au carré,

$$1'' : (\tfrac{1}{4})'' :: 0^m,994 : x;$$

d'où $$x = \frac{0^m,994}{4} = 0^m,2485.$$

Sachant qu'à Paris la valeur de la gravité g est $9^m,808795$, on trouvera celle de Metz en y faisant osciller le pendule qui, à Paris, bat les secondes, et en estimant le temps de chaque oscillation ainsi qu'on vient de l'indiquer. Soient T' ce temps évalué en secondes et g' la valeur de la gravité à Metz ; on aura

$$1 : T'^2 :: g' : g;$$

d'où $$g' = \frac{g}{T'^2} = \frac{9^m,808795}{T'^2}.$$

Enfin, connaissant la longueur r du pendule qui bat les secondes à Metz, sur les bords de la Moselle, on trouvera encore la valeur de la gravité à la hauteur de cette rivière, au moyen de la relation

ci-dessus, $l'' = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, ou, en élevant au carré,

$$g = \pi^2 r.$$

Supposez qu'on s'élève sur le mont Saint-Quentin avec le même pendule et qu'on y estime par l'observation le temps T' de chaque oscillation, la relation

$$g' = \frac{\pi^2 r}{T'^2}$$

donnera la valeur de la gravité sur le sommet de cette montagne.

77. *Pendule composé.* — Les pendules ordinaires dont on se sert dans la pratique consistent, comme nous l'avons dit, en une tige et un corps pesant dont le système oscille autour d'un axe horizontal A; et comme ce cas est le même que celui d'un corps solide quelconque MNQ (fig. 104) qui a un mouvement oscillatoire autour d'un axe horizontal A, nous allons chercher comment la question, pour ce dernier mouvement plus général, est ramenée à celle d'un pendule simple. Appelons P et M le poids et la masse de ce corps, V_1 la vitesse angulaire acquise par ce corps dans l'intervalle où son centre de gravité passe de la position initiale G où il était en repos, à la position quelconque G', D la distance AG de ce point à l'axe A, et y la hauteur PG' dont il est descendu quand il est arrivé à la position que l'on considère. Soit enfin I le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe horizontal A : il est évident (2e partie, 60) que $I \times V_1^2$ sera la force vive acquise par le corps au bout de l'intervalle GG', et que $P \times y$, ou $Mg \times y$, mesurera la quantité de travail de la pesanteur pendant ce même intervalle. On aura donc

$$I \times V_1^2 = 2Mg \cdot y.$$

Remarquons que, pendant que le centre de gravité G décrit l'arc GG', il s'en décrit un autre semblable par le point situé à l'unité de distance de A sur AG, et que la hauteur y_1 dont ce nouveau point descend par rapport à sa position initiale est telle que l'on a

$$y = y_1 \times D.$$

Substituons à y sa valeur dans la relation précédente de la force

vive ; nous aurons

$$I \times V_1^2 = 2Mg \cdot D \cdot y_1,$$

d'où

$$V_1^2 = \frac{M \cdot D}{I} \times 2gy_1.$$

Désignant par s_1 le petit arc décrit à l'unité de distance pendant le très-petit temps t à partir de l'instant où la vitesse angulaire est devenue V_1, on reconnaît sans peine que l'on peut raisonner sur les arcs décrits à cette distance comme sur ceux qui sont décrits à une distance quelconque, et que l'on aura

$$V_1 = \frac{s_1}{t},$$

d'où

$$t = \frac{s_1}{V_1}, \quad \text{et} \quad t^2 = \frac{s_1^2}{V_1^2}.$$

Il faut d'ailleurs faire attention que le temps t est aussi celui pendant lequel le corps passe d'une position quelconque à une position très-voisine.

Remplaçant V_1^2 par sa valeur trouvée plus haut $\frac{M \cdot D}{I} \times 2gy_1$,

on trouve

$$t^2 = \frac{s_1^2}{\frac{MD}{I} \times 2gy_1},$$

et, par suite,

$$\frac{M \cdot D}{I} \times t^2 = \frac{s_1^2}{2gy_1}.$$

Si, comme dans le numéro précédent, nous considérons ce qui se passe à l'unité de distance de A, que C (fig. 105) soit la position initiale de l'arc décrit CNB dont $AM = r_1$ est le rayon ou l'unité, et que MN soit le petit arc s_1, on démontrera encore que, PM n'étant autre chose que y_1, $\frac{s_1^2}{2gy_1}$ sera égal à $\frac{r_1}{4g} \times \left(\frac{mn}{mO}\right)^2$. On aura donc

$$\frac{M \times D}{I} \times t^2 = \frac{r_1}{4g} \times \left(\frac{mn}{mO}\right)^2;$$

ou bien, à cause de $r_1 = 1$,

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{I}{M \times D \times g}} \times \frac{mn}{mO}.$$

Enfin, en prenant la somme de tous les petits temps t employés à parcourir tout l'arc compris depuis la position initiale jusqu'à la position verticale, on trouvera, pour cette somme,

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{I}{M \times D \times g}} \times \pi.$$

Or, cette somme est la moitié de la durée T d'une oscillation entière; donc, on aura enfin

$$T = \pi\sqrt{\frac{I}{M \times D \times g}}.$$

Telle sera la durée d'une oscillation complète du corps autour de A, pourvu toutefois qu'elle soit très-petite.

78. *Comparaison du pendule composé et du pendule simple. Centre d'oscillation.* — Soit r la longueur du pendule simple dont la durée des oscillations est la même que celle des oscillations du corps MNQ; on aura (2e partie, 76), pour le pendule simple,

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}},$$

et, par suite,

$$\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{I}{M \times D \times g}},$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{I}{M \times D}.$$

Observons que le moment d'inertie I du corps MNQ (fig. 104), en appelant I_1 le moment d'inertie de ce même corps par rapport à l'axe parallèle à l'axe A et qui passe par le centre de gravité G, est, d'après ce qui a été démontré (2e partie, 64), égal à $M \times \overline{D^2 + I_1}$.

Par conséquent, on aura

$$r = \frac{M \times \overline{D^2 + I_1}}{M \times D} = D + \frac{I_1}{M \times D}.$$

Prenant sur la ligne AG qui joint le centre de gravité G du corps à l'axe A, une partie AO égale à r ou à $D + \frac{I_1}{M \times D}$, on obtiendra le point O qu'on nomme *centre d'oscillation* du corps par rapport à l'axe A. Si, à son tour, le point O devenait le point de suspension, je dis que le point A deviendra au contraire le centre d'oscillation. En effet, r' (fig. 105) étant la distance du nouveau centre d'oscillation par rapport à O, et D' la distance OG du centre de gravité à ce dernier point, on aura alors

$$r' = D' + \frac{I_1}{M \times D'}.$$

D'ailleurs D' ou

$$OG = AO - AG = r - D = \frac{I_1}{M \times D};$$

ce qui donne lieu aux deux valeurs

$$D' = r - D, \quad \text{et} \quad \frac{I_1}{M \times D'} = D.$$

Si on les substitue à D' et à $\frac{I_1}{M \times D}$ dans celle de r', on trouvera

$$r' = r - D + D = r.$$

Donc le centre d'oscillation se confond avec le point A.

CENTRE DE PERCUSSION. CHOC D'UN CORPS QUI TOURNE AUTOUR D'UN AXE.

79. *Centre de percussion.* — Lorsqu'un corps MNQ (fig. 106) reçoit un mouvement de rotation autour de l'axe A, que nous supposons ici perpendiculaire au plan du tableau, chaque petite masse m de ce corps développe des forces d'inertie partielles perpendiculaires aux distances respectives de chacune d'elles à leur axe, et

dont l'intensité est mesurée par $m \cdot r \times \frac{v_1}{t}$, r étant la distance de cette partie quelconque à l'axe, et v_1 le petit degré de vitesse angulaire imprimé au corps pendant le temps élémentaire t. On a vu de plus (2e partie, 63) que la somme des moments de toutes ces forces par rapport à l'axe, était égale au produit du moment d'inertie I du corps multiplié par le quotient $\frac{v_1}{t}$, ou à $I \times \frac{v_1}{t}$. En admettant que la résultante F de toutes ces forces (*) est égale au produit de la masse totale M du corps multiplié par la distance D ou AG du centre de gravité à l'axe, et par le même quotient $\frac{v_1}{t}$, et que de plus la direction de cette résultante $M \times D \times \frac{v_1}{t}$ est perpendi-

---

(*) Si l'on décompose chaque force d'inertie partielle $m \cdot r \frac{v_1}{t}$ en deux, l'une horizontale et l'autre verticale, et qu'on nomme x et y l'abscisse et l'ordonnée de m par rapport à un plan vertical et un plan horizontal passant par l'axe A; la première composante sera évidemment

$$mr \frac{v_1}{t} \cdot \frac{y}{r} = \frac{mv_1 y}{t},$$

et la deuxième,

$$mr \frac{v_1}{t} \cdot \frac{x}{r} = \frac{mv_1 x}{t}.$$

En appelant x_1 et y_1 les coordonnées du centre de gravité, la somme des composantes horizontales sera

$$\frac{v_1}{t}(my + m'y' + \ldots.), \quad \text{ou} \quad \frac{v_1}{t} My_1,$$

et celle des composantes verticales

$$\frac{v_1}{t}(mx + m'x' + \ldots.), \quad \text{ou} \quad \frac{v_1}{t} Mx_1.$$

D'où il suit que la résultante générale a pour valeur

$$\frac{v_1}{t} M\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{v_1}{t} M \times D_1$$

et qu'elle fait avec l'axe horizontal et l'axe vertical des angles dont les cosinus sont respectivement $\frac{y_1}{D}$ et $\frac{x_1}{D}$, en sorte qu'elle est perpendiculaire à la distance D du centre de gravité à l'axe.

culaire à cette dernière distance AG, on reconnaîtra que, si O est son point d'application sur AG, $F \times AO$ ou $M \times D \times \frac{v_1}{t} \times AO$ n'est autre chose que le moment de cette résultante, lequel doit être égal à la somme des moments des forces d'inertie partielles ou à $I \times \frac{v_1}{t}$. Donc, on aura

$$AO \times M \times D \times \frac{v_1}{t} = I \times \frac{v_1}{t},$$

ou

$$AO = \frac{I}{M \times D}.$$

Le point O, ainsi déterminé, est ce qu'on nomme *le centre de percussion;* il est situé dans le plan perpendiculaire à l'axe qui passe par le centre de gravité du corps, et sur la plus courte distance de ce dernier point à l'axe. Le centre de percussion jouit de la propriété que quand une force lui est appliquée dans une direction immédiatement contraire et opposée à la force d'inertie du corps, celui-ci se mouvra en quelque sorte comme s'il était libre, et sans qu'il en résulte aucun choc, ou aucune pression sur l'axe. En effet, si une force quelconque F (fig. 107) était appliquée en un point a différent du centre de percussion O, la ligne AO serait pliée, et il en résulterait un véritable contre-coup ou un choc sur l'axe de rotation A. — Une barre à laquelle j'imprime un mouvement de rotation et que je choque par l'un de ses points, exerce généralement une réaction qui se fait sentir dans la main. Mais elle possède un point tel que, quand il est choqué, cette sensation est nulle, ce point est précisément le centre de percussion de la barre. — Il importe qu'un marteau frappe par son point de percussion, et c'est toujours ce qui arrive, parce que la tête étant beaucoup plus dense que le manche, le centre de percussion est nécessairement très-rapproché du centre de gravité de la tête.

Le centre de percussion d'un corps peut se trouver par l'expérience : il suffit de poser le point de rotation de ce corps sur un appui fixe A (fig. 108), et de laisser tomber le corps sur une pointe B mobile le long d'un plan horizontal; lorsque cette pointe atteint une position telle que le corps au moment de sa chute ne bascule point autour de A, on sera assuré que le point par lequel

le corps est choqué contre la pointe B est précisément son centre de percussion.

Puisque la distance du point de percussion à l'axe est $\frac{1}{M \times D}$, et que cette distance est aussi celle du centre d'oscillation (2e partie, 78), on voit que ces deux points sont absolument la même chose, et qu'un pendule qu'on veut faire mouvoir sans qu'il en résulte aucune pression ou aucun choc sur son axe de suspension, doit être poussé par un effort dirigé vers son centre ou axe d'oscillation.

80. *Choc d'un corps qui a un mouvement de rotation.* — Soit un corps Q (fig. 109) suspendu à un axe A perpendiculaire au plan du tableau. Ce corps étant d'abord au repos, supposons qu'il soit choqué au point T par un autre corps P dans une direction TL perpendiculaire aux surfaces en contact, et comprise dans un plan perpendiculaire à l'axe A. Appelons m et p la masse et le poids du corps choquant, V sa vitesse avant le choc. Au moment où les corps se rencontreront, il se développera sur chacun d'eux et dans la direction normale TL deux forces de compression égales et contraires que nous désignerons par F. Cette pression sur chaque corps, d'abord nulle quand les corps commencent à se toucher, augmente successivement au fur et à mesure qu'ils se compriment; de sorte que F, quoique représentant des kilogrammes, n'est cependant pas une quantité fixe. Si l'on fait abstraction de l'un des deux corps, du corps Q par exemple, on pourra regarder la force F comme appliquée au corps P considéré comme libre, et cette force lui enlèvera une suite de petits degrés égaux v de vitesse dans le temps t, en sorte que sa mesure sera représentée par

$$F = \frac{m \times v}{t}.$$

Si maintenant nous observons l'action de F sur le corps Q, elle va tendre à le faire tourner autour de son axe A, et lui imprimera dans le même petit temps élémentaire t un petit degré de vitesse angulaire v_1, les forces d'inertie partielles qui naîtront sur ce corps devront faire équilibre à la force F: autrement dit, la somme des moments des premières sera égale au moment de la force F, ou au produit de cette force par la longueur de la perpendiculaire AC,

abaissée de l'axe A, sur sa direction TL. On aura, par conséquent,

$$F \times AC = I \times \frac{v_1}{t};$$

car I est le moment d'inertie du corps Q, et $I \times \frac{v_1}{t}$ est (2e partie, 63) la somme des moments de l'inertie de ses diverses parties : d'où l'on tire

$$F = \frac{I \times v_1}{AC \times t}.$$

Égalant entre elles les valeurs de F que nous obtenons sur l'un et l'autre corps, on trouvera

$$\frac{m \times v}{t} = \frac{I \times v_1}{AC \times t},$$

ou bien encore $$m \times v = \frac{I \times v_1}{AC},$$

ou enfin $$AC \times m \times v = I \times v_1.$$

Appelons v', v'', v''', ... les petits degrés de vitesse perdue par le corps P pendant un deuxième, un troisième, un quatrième petit temps constant t, et v_1', v_1'', v_1''', ... les petits degrés de vitesse imprimée au corps Q pendant la même suite de petits instants égaux à t, on aurait

$$AC \times m \times v' = I \times v_1',$$
$$AC \times m \times v'' = I \times v_1'' \ldots.$$

Ajoutant toutes ces égalités, on trouve

$$AC \times m\,(v + v' + v'' + \ldots.) = I \times (v_1 + v_1' + v_1'' + \ldots.).$$

Or, les sommes $v + v' + v'' + \ldots.$ et $v_1 + v_1' + v_1'' + \ldots.$ sont celles des petits degrés de vitesse perdue ou gagnée, respectivement par les deux corps, c'est-à-dire les vitesses totales perdues ou gagnées pendant le temps plus ou moins long écoulé depuis l'instant où les corps se sont trouvés en contact. Appelant u la vitesse perdue par le corps P, et V_1 la vitesse angulaire gagnée par le corps Q, on aura enfin

$$AC \times m \times u = I \times V_1.$$

Mais il convient de considérer les effets du choc depuis l'instant où les corps se sont mis en contact jusqu'à celui où le corps P a perdu son excès de vitesse sur Q. Car une fois que le corps P aura pris la vitesse angulaire de l'autre autour de l'axe A, les deux corps ne réagiront plus, et tourneront autour de A comme s'ils ne faisaient qu'un même corps. Cette circonstance est évidemment celle où les deux corps sont mous et non élastiques. Or, la vitesse angulaire de Q autour de A étant supposée V_1 après le choc, celle du corps P deviendra alors $AC \times V_1$, en sorte que la vitesse u que celui-ci aura perdue sera égale à $V - \overline{AC \times V_1}$. Substituons à u cette valeur dans l'égalité précédente, nous aurons

$$AC \times m\,(V - \overline{AC \times V_1}) = I \times V_1,$$

ou

$$V_1 = \frac{AC \times mV}{m(AC)^2 + I},$$

formule qui donne la vitesse angulaire du corps choqué après le choc au moyen de son moment d'inertie et de la vitesse que possédait avant le choc le corps choquant.

81. *Application au pendule balistique.* — On a déterminé dans l'artillerie les vitesses initiales des projectiles en ayant recours à l'emploi du pendule balistique, ou d'un bloc de bois suspendu à un axe qui porte sur des couteaux (fig. 110). Ce bloc est garni de frettes perpendiculaires au plan de son mouvement ; quant à la face contre laquelle le canon est dirigé, et qui est aussi perpendiculaire au plan du mouvement, elle est garnie de plomb afin qu'elle soit tout à fait dénuée d'élasticité. De cette manière le boulet lancé par la pièce contre le pendule peut s'y loger, sans que le bloc soit fendu et sans qu'il y ait rejaillissement dans le sens opposé au mouvement du bloc. Soient donc V la vitesse initiale du boulet, m sa masse, V_1 la vitesse du pendule balistique après le choc, et I et M son moment d'inertie et sa masse. Soit d'ailleurs r la distance du centre d'oscillation O du pendule à l'axe de rotation A, il conviendra que le boulet soit dirigé vers ce centre, et perpendiculairement à AO, afin (2e partie, 79) qu'il n'y ait aucun choc sur l'axe A. De la relation donnée ci-dessus (2e partie, 80), on déduit

$$V_1 = \frac{r \cdot m \cdot V}{mr^2 + I},$$

ou $$V = \frac{V_1 (mr^2 + I)}{r \cdot m}.$$

On connaîtra donc la vitesse V quand la vitesse angulaire V_1 du pendule sera déterminée. — Appelons H la hauteur à laquelle le centre de gravité du pendule a été élevé en vertu de la vitesse V_1 ; on aura, en vertu du principe des forces vives et en remarquant que le moment d'inertie du boulet est mr^2,

$$(I + mr^2)\, V_1^2 = 2\,(M + m)\, g \cdot H,$$

ou $$\frac{I + mr^2}{(M + m)\, g}\, V_1^2 = 2H.$$

Il est à remarquer que cette dernière égalité ne donnera la valeur de la vitesse angulaire V_1 et par suite celle de la vitesse V initiale du boulet, qu'autant que le moment d'inertie I du pendule aura été préalablement calculé. Mais on peut éviter ce calcul en faisant entrer dans ces vitesses la considération de la durée d'une oscillation complète de ce pendule. A cet effet rappelons que si on nomme T cette durée (2e partie, 77), on a

$$T = \pi \sqrt{\frac{I}{M \times D \times g}},$$

relation dans laquelle on devra substituer $I + mr^2$ à I, et $M + m$ à M, parce que le boulet fait corps avec le pendule. Cette relation devient donc

$$T = \pi \sqrt{\frac{I + mr^2}{(M + m)\, D \cdot g}}.$$

Élevant au carré, on trouve

$$T^2 = \frac{\pi^2 (I + mr^2)}{(M + m)\, D \cdot g},$$

et, par suite, $$\frac{I + mr^2}{(M + m)\, g} = \frac{DT^2}{\pi^2}.$$

Si, dans l'équation des forces vives, on met $\frac{DT^2}{\pi^2}$ à la place de

$\frac{I + mr^2}{(M+m)g}$, on a

$$\frac{D \cdot T^2}{\pi^2} V_1^2 = 2H,$$

ou

$$V_1 = \frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{2H}{D}}.$$

Enfin, on a encore

$$I + mr^2 = \frac{(M+m)\,gDT^2}{\pi^2},$$

et, en vertu de ce qui a été dit (2e partie, 78),

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}},$$

ou

$$r = \frac{T^2 g}{\pi^2}.$$

Remplaçons dans la valeur de V ou de la vitesse initiale du boulet, V_1, $I + mr^2$ et r par leurs expressions ainsi données au moyen de la durée T d'une oscillation complète du pendule, nous trouverons, en définitive,

$$V = \frac{\pi}{T}\sqrt{2HD} \times \frac{M+m}{m},$$

ou

$$V = \frac{\pi}{T}\sqrt{2HD} \times \frac{P+p}{p};$$

parce qu'ici on peut mettre les poids P et p du pendule et du boulet à la place de leurs masses. Remarquons encore que H est la hauteur dont le centre de gravité du pendule monte en décrivant un cercle avec un rayon égal à D ou à sa distance à l'axe de rotation A. Soient $GG'K$ (fig. 111) ce cercle, G et G' les positions initiale et finale de ce centre de gravité ; RG', moyen proportionnel entre les deux segments RG et KR du diamètre vertical KG ou $2D$, est égal à

$$\sqrt{RG \times KR} = \sqrt{RG\,(2D - RG)} = \sqrt{H\,(2D - H)} = \sqrt{2DH},$$

à cause que l'oscillation du pendule est supposée fort petite. Ainsi, $\sqrt{2DH}$ est la moitié de la corde C qui sous-tend l'amplitude de l'arc total décrit par le centre de gravité dans une oscillation complète. Donc, enfin, on a

$$V = \frac{1}{2}\frac{\pi}{T} \cdot C\frac{P+p}{p}.$$

A l'aide de cette formule, on voit qu'il suffira de compter le nombre des oscillations du pendule dans un temps déterminé, ou d'avoir (2e partie, 76) la durée T d'une oscillation complète, ainsi que l'amplitude de l'arc décrit par le centre de gravité, pour trouver la vitesse du boulet qui aura mis en mouvement le pendule balistique. J'observerai, d'ailleurs, que cet arc est facile à évaluer d'après celui qu'une aiguille fixée à l'extrémité du pendule trace sur une auge circulaire FK (fig. 110), concentrique au mouvement et remplie d'une matière molle.

IX.

MACHINES SIMPLES. — ASSEMBLAGES DE BARRES OU CORDAGES.

82. *Équilibre d'une corde ou barre tirée par ses deux extrémités ; sa tension.* — Nous allons passer à l'examen des *machines simples*, appelées ainsi parce que toute machine quelconque se compose du système de l'une ou de plusieurs d'entre elles. Nous commencerons par la *machine funiculaire*, ou assemblage de cordes ou de barres, et nous supposerons généralement les cordes ou les barres parfaitement rigides, inextensibles; nous ferons même abstraction de leur pesanteur et de leur inertie. L'inertie est, en effet, peu de chose comparativement aux forces appliquées si le mouvement venait à varier. Lorsque d'ailleurs il deviendra utile d'en tenir compte, on le pourra au moyen des principes déjà posés. Il en est de même du poids des cordes ou des barres, lorsque ce poids est comparable aux forces extérieures, mais ce cas est fort rare dans la pratique. Enfin, l'hypothèse qu'elles sont inextensibles est fondée sur ce que, dès qu'une corde a été étendue sous l'action d'une ou de plusieurs forces,

celles-ci restant les mêmes, elle se comporte ensuite comme si elle était inextensible.

Soit donc une corde AB (fig. 112), tirée à ses deux bouts A et B par des forces quelconques; imaginons à chaque bout des plans tels que MN, $M'N'$, perpendiculaires à la direction de la corde, et décomposons les forces chacune en deux autres, l'une dans le plan perpendiculaire placé au bout de la corde qui lui correspond, et l'autre dans la direction AB de cette corde. Comme cette corde n'est pas destinée à cheminer perpendiculairement à son mouvement, il est évident que les composantes perpendiculaires à sa direction devront se faire équilibre d'elles-mêmes. Il ne restera plus qu'à considérer celles qui agissent dans la direction AB. Il conviendra évidemment pour l'équilibre que cette corde soit continuellement tendue, et qu'en vertu du principe de l'action égale et contraire à la réaction, la somme ou la différence des composantes qui agissent selon la direction AB à l'extrémité A soit égale et contraire à la somme ou à la différence des composantes qui agissent au point B : autrement dit, toutes les forces données devront se réduire pour l'équilibre à deux forces égales et contraires. Il sera de plus nécessaire que ces deux forces exercent leur action en tirant en sens contraire sur la corde, car si elles poussaient contre cette dernière, elle se plierait et ne pourrait transmettre intégralement leur action réciproque. Si, au lieu d'une corde, il s'agissait d'une barre, les conditions d'équilibre seront encore les mêmes; seulement alors, la barre étant susceptible de résister aux refoulements, les deux forces appliquées à ses extrémités pourront aussi bien la pousser que la tirer. Quoi qu'il en soit, en se rappelant ce qui a été dit sur la composition des corps, on peut supposer que les petits ressorts placés entre chaque point de la barre ou de la corde sont tendus ou comprimés par deux forces égales et contraires et de même intensité que les forces qui agissent aux extrémités. Ces forces égales qui s'entre-détruisent à chaque point C sont ce qu'on nomme la *tension* de la corde ou de la barre. La tension est la même en chaque point, sauf le cas où une barre est tirée verticalement, parce que, outre les forces des extrémités, il y a ici d'autres forces qui font varier la tension d'un point à un autre.

Quand on tire sur une barre ou sur une corde, elle s'allonge et même elle peut se rompre. Si elle était également résistante, cette rupture devrait avoir lieu simultanément dans tous ses points, et

cependant il n'en est pas ainsi dans les arts; les barres ou cordes ne sont point homogènes, et on les voit se rompre là où la résistance est la plus faible. — Quand deux morceaux de ficelle ont des longueurs égales, il n'y a pas de raison pour que l'une se rompe plutôt que l'autre sous une même résistance ; mais lorsque les longueurs sont inégales, il y a plus de chance pour la rupture de la ficelle qui est la plus longue. Voilà pourquoi une grande corde ou ficelle se rompt plus facilement qu'une plus courte. Nous reviendrons plus tard sur ces résistances ; nous nous bornerons pour le moment à observer que leur force se mesure soit avec des poids, soit avec des dynamomètres.

88. *Quantité de travail exercée sur une corde.*—On vient de voir que, pour que des forces se fassent équilibre aux extrémités d'une corde, il faut que la résultante des forces qui agissent à un bout soit égale et immédiatement contraire à celle des forces de l'autre bout, et que les directions de ces résultantes se confondent avec celle de la corde. Le travail de ces résultantes devant être le même, on en conclut que la quantité de travail des forces qui agissent à un bout est égale à celle des forces qui agissent sur le bout opposé. Enfin, le travail de ces résultantes est aussi égal à celui de la tension de la corde en un point quelconque C; et pour l'évaluer il suffit de multiplier cette tension par le petit chemin décrit par ce point dans la direction de cette tension ou de la corde. Ainsi, le travail de plusieurs forces appliquées à une même corde est encore égal à la quantité de travail de la tension de la corde. Dans la sonnerie des cloches on fixe ordinairement au bout de la corde principale AB (fig. 113) un certain nombre de cordelles sur lesquelles un même nombre d'hommes tire séparément, chacun pour son compte. Il serait difficile d'évaluer le travail partiel de chaque sonneur, parce que la direction de son effort varie à chaque instant. Mais il y a une tension générale exercée sur le câble AB, et la quantité de travail de cette tension est précisément égale à la somme des quantités de travail développée par les hommes. Remarquons que leurs efforts se décomposent en efforts horizontaux et en efforts verticaux ; que les uns doivent se faire équilibre par eux-mêmes et s'entre-détruire; et que les derniers seuls travaillent, et sont égaux en somme à la tension du câble. Les efforts horizontaux sont donc exercés en pure perte et fatiguent inutilement les hommes. Ainsi, quoique

toute la quantité de travail des hommes soit transmise au câble, la disposition des cordelles inclinées est une cause de fatigue d'autant plus grande qu'elles sont plus inclinées. C'est pour cette raison qu'on a imaginé de les relier à un cercle commun horizontal dont le centre est à l'aplomb du câble, et dont la circonférence supporte d'autres cordelles ou *tirandes* verticales auxquelles les hommes sont appliqués.

84. *Équilibre sur des cordes qui concourent en un même point.*— Lorsque plusieurs forces agissent sur des cordes qui concourent en un même point, la tension de l'une étant égale à la résultante des efforts qui ont lieu sur toutes les autres, on voit que, pour qu'il y ait équilibre, cette même tension devra être égale et directement opposée à la force qui sollicite la corde que l'on considère. Donc, si des forces sont appliquées à des cordes concourantes, la condition de leur équilibre exige que l'effort de l'une d'elles soit égal et directement contraire à la résultante des forces qui tirent toutes les autres. — On sait qu'un réverbère est suspendu par une poulie mobile C (fig. 114), dont la gorge peut glisser sur une corde ACB, attachée à deux points fixes A et B. S'il y a équilibre, il est évident que le poids P du réverbère doit être égal à la résultante des tensions t et t' qui ont lieu sur les deux branches AC et CB de la corde de suspension, ou que, sur la verticale CE on prenne CD proportionnelle à ce poids, et que l'on construise le parallélogramme $CtDt'$; les côtés Ct et Ct' devront représenter ces tensions respectives. Or, la longueur de la corde ACB étant constante, le point C appartient en outre à une ellipse dont A et B sont les foyers; et sa position sur cette ellipse, comme pour tout système pesant en équilibre, doit être telle que l'équilibre soit stable; ce qui n'aura lieu qu'autant que le point C sera le plus bas possible. Ce point est d'ailleurs celui où la tangente à la courbe est horizontale. Or, les angles que la tangente à l'ellipse fait avec les rayons vecteurs AC et CB sont égaux : donc, pareillement, la verticale CD partagera en deux parties égales l'angle ACB de ces rayons vecteurs. Par conséquent, la figure $CtDt'$ est un losange, et l'on a $t = t'$. Cela résulte immédiatement du principe de la réaction égale et contraire à l'action, attendu que les cordons se tirent entre eux immédiatement au travers de la gorge de la poulie C, comme au travers d'un anneau. — Si le point C d'application d'un fardeau ne peut glisser, il n'y a plus à

rechercher sa position, il est le sommet du triangle ABC. En faisant la décomposition du parallélogramme, on trouve que les deux tensions ne sont plus égales et que la plus grande a lieu du côté où la verticale du fardeau est la plus rapprochée de celle de chaque point fixe. En effet, si le fardeau était placé dans la verticale de A ou que la ligne AC fût verticale, la tension serait la plus grande possible du côté de ce point, puisque alors elle serait égale au poids du fardeau ; de plus, la tension exercée sur la branche BC serait zéro. On voit encore qu'il serait impossible que le point de suspension C laissât du même côté les verticales des points fixes A et B. Si, par exemple, le cordon a une longueur ACB (fig. 115) et que le point donné de suspension soit C', ce dernier prendra la position C'' sur la verticale de A, et la branche de corde du côté B sera détendue.

85. *Équilibre du polygone funiculaire.* — Considérons un polygone funiculaire $ABCD\ldots.$ (fig. 116), composé d'un assemblage de cordes ou de barres, et tiré à ses sommets A, B, C, D par des forces quelconques P, Q, R, S. Soient, en outre, N et N' deux forces de tirage agissant aux deux sommets A et D, suivant les directions AA' et DD', et qui représentent les efforts exercés aux deux extrémités par lesquelles ce polygone est attaché. Les conditions d'équilibre sont analogues aux précédentes, et la figure que formeront entre eux les côtés en tournant autour de leurs articulations pour satisfaire à cet équilibre est dite *polygone funiculaire*. Elle sera telle que l'équilibre subsistera sur chaque sommet en particulier. Ainsi, en décomposant chaque force R en deux autres forces dirigées sur les côtés BC et CD adjacents à son sommet d'application C, ces deux forces seront égales et directement contraires aux tensions t_2 et t_3 de ces côtés. Observez que cet équilibre est indépendant de la longueur des côtés, et qu'il aura lieu lors même que ces côtés seront devenus nuls. Dans ce dernier cas, toutes les forces extérieures auront été transportées parallèlement à elles-mêmes autour d'un même point, aussi bien que les tensions des côtés ; mais, comme chaque côté est tiré par deux tensions égales et contraires, celles-ci se détruiront entre elles, et il ne restera que les forces étrangères aux tensions. Ces forces se faisant encore équilibre autour du point sur lequel elles auront été transportées, on voit que la condition de l'équilibre d'un polygone

funiculaire est *que toutes les forces qui lui sont appliquées se fassent équilibre, lorsqu'elles sont transportées en un même point parallèlement à elles-mêmes.*

86. *Équilibre d'un polygone supportant un poids.* — Si toutes les forces P, Q, R, S (fig. 117) sont parallèles, la force R est dans le plan des côtés BC et CD adjacents à son sommet d'application C; la force Q est également dans le plan des côtés AB et BC : donc les trois côtés AB, BC et CD sont dans le même plan qui passe par les directions des forces parallèles Q et R. On démontrerait de la même manière que tout le polygone est dans un seul et même plan, ainsi que les forces parallèles qui lui sont appliquées. Si le polygone est, par exemple, un assemblage de barres pesantes, les forces qui sollicitent chaque côté sont précisément leurs poids respectifs. Soit p le poids de la barre AB. Ce poids devant passer par le milieu de AB, ou par son centre de gravité, se décomposera en deux autres forces, égales à $\frac{1}{2}p$, appliquées en A et B; de même, le poids q de BC donnera lieu à deux composantes $\frac{1}{2}q$, appliquées en B et C; et le poids r de CD à deux autres composantes $\frac{1}{2}r$, appliquées en C et D. Ainsi, chaque sommet B et C sera soumis à l'action des forces $\frac{1}{2}(p+q)$, $\frac{1}{2}(q+r)$, qui seront égales à la demi-somme des poids des côtés adjacents : il n'y aura que les sommets extrêmes qui supporteront le demi-poids du côté qui leur aboutit respectivement. On n'aura plus ainsi à s'occuper que d'un polygone sans pesanteur chargé à ses sommets. Dans tous les cas, puisque toutes les forces verticales P, Q, R, S doivent être en équilibre avec les forces N et N' qui supportent le polygone, ou qui sont exercées à ses deux points de suspension A' et D', il faudra que la résultante des premières soit égale et directement opposée à celle de ces dernières. D'ailleurs, la résultante de tous les poids P, Q, R, S a sa direction selon la verticale qui passe par leur centre de gravité G. Par conséquent, les directions AA' et DD' des efforts N et N', ou tensions extrêmes, se coupent en un même point O de cette verticale. Si donc OM représente la somme de tous les points P, Q, R, S, ou leur résultante, les côtés OV, OU du parallélogramme construit sur les prolongements de ces tensions extrêmes et dont OM est la diagonale donneront, l'un la tension N exercée au point A', et l'autre la tension N' exercée au point D'.

87. *Moyen général de trouver les tensions.* — Il est utile de connai-

tre la tension de chaque côté intermédiaire du polygone funiculaire pesant, afin de proportionner convenablement les grosseurs de ses côtés. Soit $ABCDE\ldots$ (fig. 118) un polygone pesant en équilibre, en vertu des poids P, Q, R, S, T qui agissent à ses sommets, et des forces extrêmes N et N' dont les directions sont AA' et EE'. Je remarquerai que, puisque l'équilibre subsiste autour de chaque sommet A, la force N dont l'action a lieu suivant AA' est égale à la résultante des deux forces P et t_1, et que si l'on prend $An = N$ sur le prolongement de $A'A$ et que l'on construise le parallélogramme At_1np sur An comme diagonale, les côtés du triangle Apn représenteront, l'un Ap la force P, et l'autre pn la tension t_1 du côté AB. Cela posé, menons une horizontale $a'e$ sur laquelle, à partir du point arbitraire a', nous porterons des parties $a'a$, ab, bc, cd, de, proportionnelles aux forces P, Q, R, S et T. Si, par le point a' je mène $a'S$ perpendiculaire à la direction $A'A$ de la force N et dont la longueur soit proportionnelle à la force N ou An, et que je joigne aS, il est évident que le triangle $a'Sa$ sera semblable à Apn. Car les côtés du premier $a'a$ et $a'S$ sont proportionnels aux côtés Ap et An du deuxième. De plus, ces côtés étant perpendiculaires entre eux, les angles qu'ils comprennent sont respectivement égaux. Ainsi, le troisième côté aS du triangle $a'Sa$ sera proportionnel à pn ou à la tension t_1 de AB. Par la même raison ab étant proportionnel à Q, le troisième côté bS du triangle aSb sera proportionnel à la tension t_2 du côté BC, puisque les trois forces t_1, Q et t_2 se font équilibre autour du sommet AB. Enfin, puisque $a'a$ et aS sont perpendiculaires aux directions An et Ap des forces N et P, aS sera perpendiculaire au côté AB dont cette grandeur mesure la tension t_1. Il en sera de même par rapport au côté BC, de bS qui mesure sa tension t_2. Donc, si les poids se font équilibre sur un polygone funiculaire, et si l'on prend sur une horizontale une suite de divisions proportionnelles à ces poids, les perpendiculaires menées par chaque point de division à chaque côté du polygone concourront en un même point, et leurs grandeurs, comprises entre l'horizontale et ce point de concours, seront proportionnelles aux tensions des côtés du polygone, auxquels ces lignes convergentes sont perpendiculaires.

88. *Chaînette, son utilité dans les arts.* — Les côtés du polygone peuvent être très-petits et n'être soumis qu'à l'action de leur propre

poids ; ce cas est précisément celui d'une chaîne suspendue par ses extrémités A et B (fig. 119), et le polygone d'équilibre devient une courbe qu'on nomme *chaînette*. Cette courbe est employée avec avantage pour la forme à donner aux voûtes, et l'on en voit un exemple au dôme du Panthéon de Paris, dont une des voûtes est tracée en chaînette renversée. Il faut concevoir que, pour une telle position de la chaînette, des boules égales et juxtaposées sur sa courbure y resteront en équilibre, parce qu'il n'y a aucun changement ni dans l'action de la pesanteur sur ces boules, ni dans l'action réciproque en vertu de laquelle elles se foulent l'une contre l'autre. Ces refoulements remplacent ici les tractions qui auraient lieu sur les éléments de la chaînette si cette dernière était pendue naturellement, et qu'elle soutint toutes les boules enfilées. C'est donc pour cette raison que les voussoirs d'une voûte qui aurait pour *cintre* une chaînette renversée, s'y maintiendront en équilibre. La chaînette est encore employée dans les ponts établis sur une ou plusieurs chaînes tendues parallèlement et également d'une rive à l'autre, et qui sont chargées de madriers. Mais, dans leur construction, il importe de connaître les tensions extrêmes de ces cordes, afin de s'assurer que les points fixes qui leur servent d'attache sont suffisamment résistants.

89. *Propriétés générales de la chaînette.* — Une chaînette ACB (fig. 121), suspendue à deux points fixes A et B, n'est autre chose, avons-nous dit, qu'un polygone pesant en équilibre et dont les côtés sont infiniment petits; en sorte que si, sur une ligne horizontale $A'B'$, on prend une longueur $A'B'$ proportionnelle à son poids, et qu'on divise cette longueur et la chaînette en un même nombre de parties égales, il existe un point de concours S jouissant de cette propriété, que toutes les droites menées de ce point à toutes les divisions de $A'B'$ sont perpendiculaires aux petits côtés ou éléments de la chaînette correspondant à ces divisions, et que les grandeurs SA, SF, ... de ces mêmes lignes sont proportionnelles aux tensions qui ont lieu dans les éléments de la courbe perpendiculaires à ces directions. De toutes ces tensions, la plus petite est donnée par la perpendiculaire SC à l'horizontale $A'B'$. Or, l'élément de la chaînette auquel cette tension correspond étant lui-même horizontal, ce sera le point le plus bas C de la chaînette. Les tensions devenant plus grandes à mesure que les obliques SF ....

s'éloignent plus de la perpendiculaire SC', on voit que les tensions des éléments d'une chaînette augmentent à mesure que ces éléments s'écartent du point le plus bas. Il suit de là que les tensions les plus grandes possibles sont aux points d'attache A et B. Deux tensions égales SF' et SG' appartiennent à deux éléments de la courbe situés à égale distance du point le plus bas C; de plus, ces éléments forment des angles égaux avec la verticale LC passant par ce point : donc ces éléments M et N sont situés sur une même horizontale NM, et cette corde NM, ainsi que toutes ses semblables, seront partagées en parties égales par cette verticale. Ainsi, la chaînette est une courbe symétrique par rapport à la verticale passant par son point le plus bas. Il résulte encore que si les points d'attache d'une chaînette sont sur une même horizontale, les deux tensions extrêmes sont égales, et que le point de concours qui détermine toutes les tensions est sur la perpendiculaire menée par le milieu de l'horizontale proportionnelle au poids de la chaîne. A et D étant, par exemple, les deux points de suspension, et $A'D'$ étant une longueur proportionnelle au poids de la chaînette ACD, SC' perpendiculaire à $A'D'$ et passant par le point de concours S, coupera $A'D'$ en deux parties égales $A'C'$ et $C'D'$.

90. *Chaînettes semblables.* — Deux chaînettes ACB et acb (fig. 121) sont semblables lorsque leurs points de suspension A et B d'une part et a et b de l'autre sont situés sur des droites AB et ab parallèles, et lorsque leurs longueurs ACB et acb sont dans le même rapport que les distances AB et ab. Remarquons, en effet, que si l'équilibre subsiste sur la chaînette ACB, cet équilibre ne sera pas troublé (2e partie, 85) en diminuant proportionnellement les longueurs de ses éléments ou de ses diverses dimensions. Ainsi, lorsque ACB est réduit à la forme acb, non-seulement l'équilibre aura lieu pour cette dernière, mais encore il n'y aura pas une seule de ses parties qui ne soit parallèle et proportionnelle à une des parties de la première. Mais, puisque les éléments de la petite chaînette acb sont parallèles à ceux de la grande ACB, toutes les tensions de cette dernière pourront être comprises dans l'angle $A'SB'$ qui intercepte les diverses tensions de la grande; on pourra alors trouver dans cet angle la position d'une droite $a'b'$ parallèle à $A'B'$ et qui représente le poids de la petite chaîne, comme $A'B'$ représente le poids de la grande. Avec un peu

d'attention, on reconnaît que les deux tensions Sf' et SF', situées sur une même droite convergente en S, appartiennent aux éléments parallèles des deux courbes, et sont ce que j'appelle des *tensions homologues*. Or, à cause des parallèles $A'B'$ et $a'b'$, on a la proportion

$$Sf' : SF' :: a'b' : A'B',$$

qui nous apprend que, *pour deux chaînettes semblables, les tensions aux points semblablement placés sur chacune d'elles sont entre elles dans le rapport des poids de ces chaînettes.*

91. *Construction de la chaînette en se donnant son poids, sa longueur et le point de concours des tensions.*—Soit $A'B'$ (fig. 122) une droite horizontale proportionnelle au poids de la chaînette, S le point de concours des tensions qui ont lieu dans ses divers éléments. Partageons la droite $A'B'$ et la longueur de la chaînette en un même grand nombre de parties ; joignons les droites SA, $S1$, $S2$, $S3$....; ces droites seront autant de perpendiculaires aux directions des divers éléments de la chaînette. D'un point A quelconque, abaissons une perpendiculaire $A1'$ à la première direction SA', égale à une division de la longueur de la chaînette; du même point $1'$ une droite $1'2'$ égale à la première $A1'$ et perpendiculaire à $S1$, etc. ; chacune de ces petites perpendiculaires se terminant où sa consécutive commence, et cette construction étant continuée un nombre de fois égal à celui des points de division, on formera un polygone dont les côtés donneront la chaînette avec d'autant plus d'exactitude que le nombre des divisions aura été plus grand.

Le même point de concours S donne encore le moyen de mener une tangente à une chaînette quand celle-ci est tracée. En effet, si E (fig. 123) est le point par lequel on veut mener cette tangente, et que l'horizontale As représente le poids de la portion AE; joignez Se, et du point E abaissez à cette droite la perpendiculaire EG; ce sera la tangente en ce point de la chaînette.

92. *Détermination du point de concours de toutes les tensions de la chaînette.* — La connaissance du point de concours dépend de celle des tensions qui s'exercent aux extrémités de la chaînette. Car $A'B'$ (fig. 124) étant le côté horizontal proportionnel au poids total, si des extrémités A', B' comme centres on décrit des arcs dont

les rayons AS et BS sont proportionnels aux deux tensions extrêmes, leur intersection S sera le point de concours cherché. Supposons d'abord que le tracé de la chaînette soit donné, il est évident que, d'après les conditions de l'équilibre, les deux tangentes AO, BO (fig. 125) aux deux points extrêmes se couperont en un même point O de la verticale OL passant par le centre de gravité de la chaînette, ou par son point le plus bas. Si donc on prend sur cette verticale, à partir du point de concours O de ces tangentes, une partie OG proportionnelle au poids total, et que l'on construise sur ces tangentes un parallélogramme dont OG est la diagonale, les côtés $A'O$ et OB' donneront l'un la tension extrême en A et l'autre la tension en B. Mais, si l'on a seulement les deux points de suspension A et B (fig. 126) , ainsi que la longueur et le poids total d'une chaînette, voici comment on procédera pour avoir les deux tensions extrêmes. On prendra une chaîne beaucoup plus courte, et on la suspendra sur un tableau vertical, à deux points a et b situés sur une droite parallèle à AB et distants entre eux d'une quantité ab qui soit avec AB dans le même rapport que celui des longueurs des deux chaînes. Cette petite chaîne étant ainsi suspendue, on mesurera avec un dynamomètre les efforts exercés par elle aux deux points a et b; et il est évident que les tensions qui auront lieu sur la grande chaîne aux points A et B seront respectivement égales aux produits des efforts précédents multipliés par le rapport, non plus ici des longueurs, mais des poids des deux chaînes.

Au lieu de mesurer avec le dynamomètre les tensions aux extrémités de la petite chaînette, on pourra mener par le point a de suspension le plus bas, l'horizontale ad qui coupe en d la petite chaînette, et réduire ainsi le problème au cas où les deux tensions extrêmes seraient égales, car alors la portion de chaîne acd est en équilibre aussi bien que la chaînette totale acb. Cela posé, connaissant la longueur et le poids de acd, et portant sur une horizontale quelconque une partie $a'b'$ (fig. 127) proportionnelle au poids total de acb, on sera sûr que le point de concours des tensions sera sur la perpendiculaire $C'K'$ qui partage également en C' la grandeur $a'd'$ proportionnelle au poids acd (fig. 126) de la portion de chaînette située au-dessous de l'horizontale ad. Prenons sur $C'K'$ un point O arbitraire, et construisons par ce point de concours, et à partir de a, la chaînette dont tous les éléments soient perpendiculaires à toutes les tensions $a'O$ qui concourent de $a'b'$ au point O;

on portera perpendiculairement à $C'K'$ une ordonnée Og égale à la différence de ab (fig. 128), véritable distance des points de suspension, et de la corde ae qui termine la chaînette obtenue. Cette ordonnée Og sera portée à droite ou à gauche de $C'K'$, selon que ae sera plus petit ou plus grand que la vraie distance ab. Recommençant pour un nouveau point O^1 (fig. 127), on aura une nouvelle chaînette ac' et une nouvelle perpendiculaire $O'g'$. La courbe passant par les extrémités g, g' de ces perpendiculaires coupera $C'K'$ en un point S qui sera le point cherché; et dès lors les distances Sa' et Sb' seront les tensions aux points extrêmes.

93. *Plus petite et plus grande tension sur une chaîne verticale.*— Nous avons vu que dans toute chaînette les tensions sont inégales d'un point à un autre, et que la plus petite a lieu au point le plus bas. Cette loi se maintient, lors même que la chaîne est verticale. En effet, le maillon le plus bas C (fig. 129) de cette dernière est seulement chargé du poids Q suspendu à la chaîne ; le maillon D supporte à la fois le poids Q et le maillon C; le maillon D' est chargé du poids Q et des deux maillons C et D, etc., en sorte que le premier A supporte le poids Q et le poids total de la chaîne. Par conséquent, une telle chaîne devrait être plus forte au haut qu'au bas de sa longueur.

94. *Mesure directe de la tension en un point quelconque de la chaînette.* — Considérons encore une chaînette dont A et B (fig. 130) sont les points de suspension, et dont D est un point quelconque. Il est évident que si la chaînette entière est en équilibre, cet équilibre ne sera pas troublé en supposant que ce point quelconque D soit fixe et que l'on supprime la partie AD. Mais alors si la partie DCB est en équilibre, il en sera de même à l'égard de la portion de chaînette comprise entre le point D et le point le plus bas C, parce que, par un raisonnement analogue, nous pourrons encore supprimer la partie CB. Or, il est à observer que la partie DC étant en équilibre par rapport aux points D et C considérés comme ses points de suspension, il faudra, pour les conditions de cet équilibre, que le point de cette portion de chaîne fasse équilibre aux tensions en D et C; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les deux tangentes OD et OC coupent en un même point O la verticale PM passant par le centre de gravité de la chaînette CD. Donc,

alors, en désignant par P le poids de cette dernière, P est égal et opposé à la résultante des tensions en D et C. L'une, suivant la tangente en D, sera désignée par T; et l'autre, agissant suivant la tangente horizontale OC, sera désignée par T'. A partir de l'intersection O des tangentes, prenons sur la verticale OM une partie OM égale au poids de la portion DC de chaînette, et construisons sur ces deux tangentes un parallélogramme dont OM soit la diagonale : l'un des côtés, ON ou DM, représentera la tension horizontale qui s'exerce au point le plus bas; et l'autre, DO, la tension T au point D. Mais, par la raison que les trois forces T, T' et P, ou les lignes DO, ON et OM qui les représentent respectivement, sont en équilibre, on pourra regarder l'une d'elles T comme égale et immédiatement opposée à la résultante des deux autres, ou ces dernières comme les composantes de la première. L'une de ces composantes T' étant, comme nous l'avons déjà dit, une force horizontale égale à la tension qui a lieu au point le plus bas C, et l'autre P étant le poids de la chaînette comprise entre le point D et le point C, on en conclut que *la tension en un point quelconque d'une chaînette a deux composantes, composante horizontale et composante verticale, dont l'une est la tension au point le plus bas de la chaînette, et dont l'autre est le poids même de la portion de chaîne comprise entre le point le plus bas et celui que l'on considère.*

Cette même conséquence se déduit aussi de la considération du point de concours d'où partent une suite de lignes qui, aboutissant aux diverses divisions d'une droite horizontale et proportionnelles au poids de la chaînette, représentent elles-mêmes les tensions de la chaînette. Car on sait que la perpendiculaire SK à l'horizontale (fig. 131) représente la tension au point le plus bas, et que KG est proportionnel au poids de la portion de chaîne comprise entre le point le plus bas et celui qui correspond à G sur la chaînette, et pour lequel l'élément de la courbe est perpendiculaire à SG. Ainsi, cette tension SG est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté est constamment égal à la tension du point le plus bas, et dont l'autre côté est égal au poids de la portion de chaîne interceptée entre ce point et celui pour lequel la tension SG a lieu.

Puisque la tension à un point quelconque de la chaînette a pour composante horizontale la tension au point le plus bas, et pour composante verticale le poids de chaîne comprise entre ce dernier et le premier point, il est évident que si celui-ci est un point de suspen-

sion fixé à un pilier (fig. 132), il pourra être considéré comme sollicité par ces deux composantes. Or, celle qui provient du poids de la chaîne est détruite par la résistance du pilier, et tend elle-même à appuyer ce pilier sur sa base; tandis que la composante ou *poussée horizontale*, qui tend à le renverser, est constante et égale à la tension horizontale du point le plus bas de la chaîne. D'où l'on conclut que, dans toute chaîne suspendue à deux points fixes également ou inégalement élevés, ces derniers sont soumis à des efforts horizontaux, constants, et égaux à la moindre tension de la chaîne.

95. *Tensions extrêmes d'une chaînette dont la flèche est fort petite.* —Il est facile de calculer les tensions d'une chaîne à ses deux points de suspension, lorsque sa flèche est peu considérable. Soit, en effet, *ACB* (fig. 133) une chaîne dont *C* est le point le plus bas, et *CD* la flèche, c'est-à-dire l'abaissement de ce dernier au-dessous de l'horizontale passant par l'un des points de suspension. D'après ce qui a été dit plus haut, l'équilibre peut être regardé comme ayant lieu séparément sur les parties *CB* et *AC*. Or, à cause de la petitesse de la flèche *CD*, la branche *BC* a peu de courbure, et son centre de gravité *G* est à peu près placé à son milieu comme si elle était une ligne droite; les tangentes *BG'* et *CG'* couperont d'ailleurs en un même point *G'* la verticale *GG'*. Désignant par *T* la tension au point *B* suivant la première, par T_0 la tension horizontale au point le plus bas *C*, et par *p* le poids de la portion de chaîne *BC*, on aura, à cause de l'équilibre des trois forces *P*, *T* et T_0, les deux proportions

$$p : T :: BH : HG', \quad \text{et} \quad p : T :: BH : BG'.$$

La première donne $$T_0 = p \cdot \frac{HG'}{BH},$$

et la dernière, $$T = p \cdot \frac{BG'}{BH};$$

sur quoi on observera que *BH* est égal à la flèche *CD* que nous appellerons *f*, que *HG'* est la moitié de *CH* ou de *BD* que nous nommerons *l*, parce que *G* est le milieu de la ligne *BC* regardée comme droite, et que *BH* est verticale et parallèle à *GG'*. Enfin, à cause du

triangle rectangle BGH, on a

$$BG' = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{G'H}^2} = \sqrt{f^2 + \frac{l^2}{4}}.$$

Faisant ces substitutions dans les expressions de T_0 et de T, on trouvera

$$T_0 = \frac{p \cdot l}{2f},$$

et

$$T = \frac{p}{f}\sqrt{f^2 + \frac{l^2}{4}} = p\sqrt{1 + \frac{l^2}{4f^2}}.$$

La première exprime la tension au point le plus bas, qui est, comme on l'a vu, la même chose que la poussée horizontale exercée sur le point d'appui ou de suspension. La deuxième donne la valeur de la tension totale exercée sur ce même point d'appui et tangentiellement à la courbe. Cette dernière tension, essentielle pour en déduire les dimensions convenables à donner à la chaînette, peut se mettre sous une forme plus commode pour la pratique. En effet, on démontre qu'un radical de la forme $\sqrt{a^2 + b^2}$, et pour lequel on sait que a est plus grand que b, est équivalent, à $\frac{1}{55}$ près, à cette autre valeur rationnelle

$$\overline{0{,}96 \times a} + \overline{0{,}04 \times b};$$

et, comme dans le radical de l'expression de T, on a

$$a = \frac{l}{2f} \quad \text{et} \quad b = 1,$$

on pourra donner à cette expression cette autre forme

$$T = p\left(0{,}96\,\frac{l}{2f} + 0{,}04\right).$$

96. *Application aux ponts établis sur des chaînes tendues d'une rive à l'autre.* — Nous avons déjà donné une idée de la manière simple d'établir un pont sur une rivière, en la traversant de deux ou plusieurs chaînes tendues également et parallèlement, et en chargeant ces dernières d'un ou de deux rangs de madriers. Supposons que le poids total de ces madriers soit de 2000^k, ou que le demi-poids $p = 1000^k$; que la largeur de la rivière, dont l est la moitié, soit

de 16^m, ou que $l = 8^m$; et qu'enfin la flèche soit de 1^m, ou $f = 1$; on aura $\frac{l}{2f} = 4^m$, et, par suite,

$$T = 1000^k (\overline{0{,}96 \times 4} + 0{,}04) = 3880^k.$$

Ce sera l'effort qui devra tendre l'ensemble de toutes les chaînes; et, si elles sont au nombre de cinq, l'effort sur chacune d'elles sera réduit à $\frac{3880}{5} = 776^k$. Portons à 10^k l'effort qu'une chaîne peut supporter par millimètre carré de section : la section sera égale à $\frac{776}{10}$ millimètres carrés, ou à 78 millimètres carrés environ; en sorte que la section sera un carré ayant pour côté de 8 à 9 millimètres. Telle serait du moins la dimension nécessaire à un barreau de fer, pour qu'il supportât le pont. Mais si, au lieu d'un barreau, on se sert d'une série de trousseaux de fils de fer réunis entre eux par d'autres fils en spirales, on déterminera le nombre de fils de fer convenable, pour que la section de la trousse, tant pleine que vide, soit la même que celle du barreau; je dis *tant pleine que vide*, parce que le fil de fer a une force beaucoup plus grande qu'un barreau.

L'inconvénient des ponts posés sur des chaînes est que celles-ci ne peuvent être tendues en ligne droite, et que ces ponts ont ainsi peu de stabilité. Nous venons de démontrer en effet que la tension horizontale d'une chaîne était égale à $\frac{p \cdot l}{2f}$, expression qui prouve que si f est rendu dix fois, cent fois, etc., plus petit, la tension horizontale devient dix fois, cent fois plus grande, et qu'ainsi, malgré ces efforts énormes, la flèche ne sera jamais nulle. La même remarque s'applique à la tension extrême, puisqu'elle est la résultante du poids de la demi-chaîne et de la tension horizontale $p \frac{l}{2f}$.

97. *Ponts suspendus au-dessous des chaînes, par des suspensoires équidistantes et verticales.* — Afin d'obvier aux inconvénients des ponts posés sur des chaînes tendues, on les suspend au contraire à deux chaînes supérieures $UABC \ldots V$, portant des suspensoires verticales en fer AA', BB', CC', ... qui se correspondent sur les deux chaînes. Chaque couple de suspensoires est réuni par des tra-

verses horizontales dans lesquelles ces suspensoires sont boulonnées par le bas, et qui reçoivent des poutrelles qu'on recouvre de madriers. Soient alors U et V les points de suspension du polygone funiculaire $UABCD\ldots.V$. Chaque couple de suspensoires peut être regardé comme chargé de la moitié de la travée du pont qui le précède, et de la moitié de celle qui le suit; en sorte que, si toutes les travées sont égales ou si les couples de suspensoires sont équidistants, on pourra regarder le poids supporté par chaque suspensoire comme connu, et déduire la force du fer qui convient à cet effort vertical. D'ailleurs, ces poids étant très-considérables comparativement à ceux des suspensoires elles-mêmes, il est permis de faire abstraction de ces derniers, et de ne tenir compte dans l'équilibre du polygone funiculaire, que des poids du pont répartis sur chacune d'elles. — Soit uv (fig. 135) une droite horizontale, et S un point tel que uS soit perpendiculaire au côté extrême UA, et proportionnel à la tension de ce côté. Supposons d'abord que le polygone $UABC\ldots.V$ soit disposé de telle sorte que l'un de ses côtés DE soit horizontal, et prenons sur l'horizontale uv des parties ua, ab, bc, cd, etc., proportionnelles aux parties du poids du pont supportées par les angles $A, B, C, D, \ldots$. On sait que les lignes convergentes $Su, Sa, Sb, Sc, \ldots$. représenteront les tensions qui ont lieu sur les côtés $UA, AB, BC, CD, \ldots$. auxquels elles sont perpendiculaires, et que la perpendiculaire Sd représentera la tension du côté horizontal DE. Cela posé, veut-on trouver la différence de hauteur d'un angle A au-dessus de son consécutif B? en menant l'horizontale BA'', on observera que le triangle $AA''B$ a ses côtés perpendiculaires à ceux du triangle Sud, et que ces deux triangles semblables donnent la proportion

$$AA'' : A''B :: ud : Sd,$$

et, par suite,

$$AA'' = \frac{A''B}{Sd} \times ud.$$

Supposons d'ailleurs que les suspensoires soient équidistantes, en sorte que $A''B$ sera une partie constante égale à la longueur d'une travée. Observons, en outre, que ud est le poids de la portion du pont $A'D'$ ou $\pi \times A'D'$, π étant le poids du pont sur une unité de longueur; que Sd est la tension t_0 qui a lieu sur le côté le plus

bas de la chaîne; on aura alors

$$AA'' = \frac{A''B \times \pi \times A'D'}{t_o}.$$

Mais $A''B \times \pi$ n'est autre chose que le poids p d'une travée, on aura donc enfin

$$AA'' = \frac{p}{t_o} \times A'D';$$

et si l'on appelle K le rapport du poids d'une travée à la tension t_o qui a lieu sur le côté horizontal du polygone, on aura enfin

$$AA'' = K \times A'D';$$

formule qui nous apprend que la hauteur d'un angle du polygone au-dessus de son consécutif est égal au rapport K multiplié par l'intervalle compris entre la suspensoire attachée au premier angle, et l'extrémité du côté horizontal. Représentant par l la longueur d'une travée, cet intervalle sera l, $2l$, $3l$, ... nl pour la 1re, 2e, 3e, ... ne suspensoire à la suite de celle qui supporte une extrémité du côté horizontal. Ainsi, la hauteur du sommet C au-dessus de D sera Kl; celle de B au-dessus de C, $2Kl$; celle de A au-dessus de C, $3Kl$: donc, enfin, les hauteurs des points $C, B, A, U, \ldots$ au-dessus de l'horizontale $MDEN$, seront Kl, $Kl + 2Kl$, $Kl + 2Kl + 3Kl$, $Kl + 2Kl + 3Kl + 4Kl$, et, en général, s'il y a n travées entre l'extrémité du côté horizontal, et le sommet que l'on considère, la hauteur de ce sommet au-dessus de l'horizontale donnée par le côté le plus bas sera

$$Kl \cdot 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = Kl \cdot n \frac{(n+1)}{2}.$$

Cette expression $n \cdot \frac{(n+1)}{2} Kl$, en y faisant successivement $n = 1 = 2 = 3 = 4 = 5$, donne Kl, $3Kl$, $6Kl$, $10Kl$, $15Kl$, ... pour les hauteurs des 1er, 2e, 3e, 4e, 5e sommets à la suite du côté le plus bas du polygone. Ces nombres sont connus sous la dénomination de nombres triangulaires, parce qu'avec un nombre de boules égal à l'un d'eux (fig. 136) on peut former un triangle équilatéral qui a pour côté le plus élevé des nombres naturels dont la somme donne le nombre triangulaire que l'on consi-

les rayons AS et BS sont proportionnels aux deux tensions extrêmes, leur intersection S sera le point de concours cherché. Supposons d'abord que le tracé de la chaînette soit donné, il est évident que, d'après les conditions de l'équilibre, les deux tangentes AO, BO (fig. 125) aux deux points extrêmes se couperont en un même point O de la verticale OL passant par le centre de gravité de la chaînette, ou par son point le plus bas. Si donc on prend sur cette verticale, à partir du point de concours O de ces tangentes, une partie OG proportionnelle au poids total, et que l'on construise sur ces tangentes un parallélogramme dont OG est la diagonale, les côtés $A'O$ et OB' donneront l'un la tension extrême en A et l'autre la tension en B. Mais, si l'on a seulement les deux points de suspension A et B (fig. 126) , ainsi que la longueur et le poids total d'une chaînette, voici comment on procédera pour avoir les deux tensions extrêmes. On prendra une chaîne beaucoup plus courte, et on la suspendra sur un tableau vertical, à deux points a et b situés sur une droite parallèle à AB et distants entre eux d'une quantité ab qui soit avec AB dans le même rapport que celui des longueurs des deux chaînes. Cette petite chaîne étant ainsi suspendue, on mesurera avec un dynamomètre les efforts exercés par elle aux deux points a et b; et il est évident que les tensions qui auront lieu sur la grande chaîne aux points A et B seront respectivement égales aux produits des efforts précédents multipliés par le rapport, non plus ici des longueurs, mais des poids des deux chaînes.

Au lieu de mesurer avec le dynamomètre les tensions aux extrémités de la petite chaînette, on pourra mener par le point a de suspension le plus bas, l'horizontale ad qui coupe en d la petite chaînette, et réduire ainsi le problème au cas où les deux tensions extrêmes seraient égales, car alors la portion de chaîne acd est en équilibre aussi bien que la chaînette totale acb. Cela posé, connaissant la longueur et le poids de acd, et portant sur une horizontale quelconque une partie $a'b'$ (fig. 127) proportionnelle au poids total de acb, on sera sûr que le point de concours des tensions sera sur la perpendiculaire $C'K'$ qui partage également en C' la grandeur $a'd'$ proportionnelle au poids acd (fig. 126) de la portion de chaînette située au-dessous de l'horizontale ad. Prenons sur $C'K'$ un point O arbitraire, et construisons par ce point de concours, et à partir de a, la chaînette dont tous les éléments soient perpendiculaires à toutes les tensions $a'O$ qui concourent de $a'b'$ au point O;

suite le point K, portez UM de N en P'; décrivez sur $P'V$ comme diamètre la demi-circonférence $P'TV$; menez par le point N, à cette circonférence, la tangente NT qui sera la moyenne proportionnelle cherchée; portez enfin par un arc de cercle la distance NT de N en T'; et par le point T' menez à MN la parallèle OT' qui coupe la corde UV au point O. La verticale OK rencontrera l'horizontale MN en un point K que l'on pourra regarder comme une extrémité du côté horizontal du polygone, à partir de laquelle on portera les intervalles égaux de chaque suspensoire. A ces intervalles correspondront les ordonnées successives Kl, $3Kl$, $5Kl$, ... $n\frac{(n+1)}{2}Kl$. En supposant que cette dernière appartienne au point de suspension U, il est évident qu'elle doit être la même que la hauteur connue h de ce point au-dessus de MN; ce qui donne le moyen de trouver le rapport K. Car on a

$$\frac{n \cdot n+1}{2} Kl = h,$$

d'où

$$K = \frac{2h}{n(n+1)l}.$$

Ainsi, les longueurs successives des suspensoires Kl, $3Kl$, $5Kl$, seront elles-mêmes déterminées.—Nous avons vu que le rapport K est égal à $\frac{p}{t_o}$, c'est-à-dire au poids d'une travée divisé par la plus petite tension. Donc on aura

$$t_o = \frac{p}{K} = \frac{n(n+1)lp}{2h}.$$

Partant on aura obtenu la tension t_o. Celle du premier côté à la suite du côté horizontal sera égal à $\sqrt{t_o^2+p^2}$, celle du deuxième à $\sqrt{t_o^2+(2p)^2}$, du troisième à $\sqrt{t_o^2+(3p)^2}$, du n^e à $\sqrt{t_o^2+(np)^2}$. Si les points U et V de suspension sont à même hauteur, il est évident que la courbe devient symétrique par rapport à la verticale OK; on n'a plus alors à chercher la hauteur du point O, et il ne reste qu'à calculer le rapport K d'après la hauteur des points de suspension au-dessus du côté le plus bas du polygone.

X.

CORPS POSÉS SUR D'AUTRES CORPS OU SUR DES PLANS OU SURFACES.

98. *Idée générale de la réaction des corps posés les uns sur les autres.* — Lorsque deux corps se touchent et se compriment en un certain point, il se forme à cet endroit une dépression dont l'enfoncement est perpendiculaire à leur petite surface de contact, et qui indique que la réaction des deux corps l'un contre l'autre est elle-même dirigée sur la perpendiculaire ou normale qui leur est commune. Supposons maintenant que l'un A des corps soit sollicité par des forces dont la résultante se confond avec cette perpendiculaire, et que l'autre corps A' demeure fixe, la réaction de ce dernier détruira alors cette résultante, et le corps A demeurera au repos. Mais il est évident que l'équilibre subsistera encore si l'on remplace le corps A' par une force égale à la réaction qu'il exerce contre le corps A, et si l'on considère ce dernier comme libre et comme sollicité par cette nouvelle force concurremment avec les autres forces données. Cette propriété que tout corps résiste à un autre selon la perpendiculaire commune qui passe par leur point de contact, s'étend au cas général où un corps est posé sur différents corps à la fois. Les réactions de ces derniers sont autant de forces véritables qu'il est permis de substituer aux divers points par lesquels le premier corps s'appuie sur les autres, et dès lors l'équilibre de ce corps est, en vertu de cette substitution, ramené à des conditions analogues à celles qui auraient lieu s'il était libre. Nous examinerons d'abord les simples circonstances d'un corps posé sur un plan par un point unique, ou par deux ou par trois, ou enfin par plusieurs points.

99. *Corps reposant par un point sur un plan.* — Considérons une sphère soumise à la seule action de son poids P, et poussée par un point m sur un plan de niveau AB (fig. 138). Puisque la réaction de ce plan a lieu selon la perpendiculaire ou la verticale du point de contact m, et qu'elle doit faire équilibre au poids P, nécessairement le centre de gravité G du corps sera compris dans cette

verticale, en sorte que l'effort P du corps sera tout à fait détruit par la résistance du plan. De même, encore, quand un corps pose par un seul point sur un plan quelconque, et qu'il est sollicité aussi par des forces quelconques, il faut que leur résultante soit perpendiculaire au plan, et qu'elle passe par le point d'appui. La condition de passer par le point d'appui ne suffirait pas à elle seule. Car, si l'on décompose cette résultante en deux forces, l'une perpendiculaire au plan, et l'autre située dans le plan, toutes deux passant d'ailleurs par le point m, la première sera à la vérité détruite par la résistance du plan ; mais l'autre composante fera cheminer le corps le long de ce plan, et il n'y aura plus équilibre. Donc, enfin, l'équilibre d'un corps qui s'appuie sur un plan par un seul point est soumis à deux conditions : 1° que la résultante des forces appliquées au corps passe par le point d'appui ; 2° que sa direction soit perpendiculaire au plan.

100. *Corps reposant par deux points sur un plan.* — Mais quand le corps repose par deux points A et B (fig. 139) sur un plan, la condition de passer par un des appuis n'est plus indispensable à la résultante des forces qui le sollicitent ; il suffit qu'elle rencontre la droite AB à l'un de ses points compris entre A et B, il faut de plus qu'elle soit perpendiculaire au plan. En effet, les réactions exercées par les points d'appui, étant l'une et l'autre perpendiculaires au plan, sont évidemment parallèles ; et, pour qu'elles fassent équilibre à la résultante des forces appliquées au corps, cette dernière devra pouvoir se décomposer en deux forces respectivement égales et immédiatement contraires aux résistances des appuis. Or, celles-ci sont dirigées dans le même sens ; ainsi, la résultante en question aura son point d'application sur la droite AB entre les points A et B d'application de ses composantes ; elle devra d'ailleurs leur être parallèle, et, par conséquent, être comme elles, perpendiculaire au plan. — S'il s'agit d'un corps de poids P posé sur un plan de niveau, il conviendra pour l'équilibre que la verticale abaissée de son centre de gravité rencontre la ligne des appuis dans un point de l'intervalle qui les sépare.

101. *Corps posés par trois ou par plusieurs points sur un plan.* — Arrivons enfin au cas où le corps repose par trois points sur un plan quelconque. Les résistances des points d'appui étant toujours per-

pendiculaires à ce plan, ne pourront faire équilibre à l'action des forces extérieures qui sollicitent le corps qu'autant que la résultante de ces forces pourra se décomposer en trois forces respectivement égales aux trois premières. Cette résultante sera donc, comme celles-ci, perpendiculaire au plan; et, comme elles sont dirigées dans le même sens, son point d'application devra se trouver dans l'intérieur du triangle qui réunit les trois appuis. Cela résulte immédiatement de la composition des forces parallèles. Ces conditions s'étendent au cas où le nombre des appuis sur un plan est quelconque. Il faut toujours pour l'équilibre du corps que la résultante des forces qui lui sont appliquées soit perpendiculaire au plan, et qu'elle coupe le plan dans l'intérieur du polygone convexe qui réunit deux à deux le plus grand nombre des points d'appui. Si la résultante coupe le plan en un point m extérieur au polygone (fig. 140) ou à la courbe (fig. 141) qui réunit les appuis, le corps tendra à tourner ou à se renverser autour de l'arête ab du polygone ou de la tangente à la courbe la plus voisine du point m. Quant à l'énergie qui sollicitera le corps à se renverser, elle sera mesurée par le produit de la résultante de toutes les forces, et de la plus courte distance de sa droite de direction à l'arête ou à la tangente autour de laquelle se fera le mouvement de rotation du corps.

102. *Exemples divers.* — Nous avons déjà examiné les conditions d'équilibre d'une sphère pesante sur un plan de niveau, appliquons ces mêmes principes à d'autres exemples, et commençons par celui d'un corps posé sur une table soutenue par trois pieds. Si les trois pieds d'appui sur un plan de niveau sont en ligne droite, et que la verticale du centre de gravité du corps passe en dehors du plan vertical de cette droite, la table s'inclinera et basculera du côté où ce centre de gravité est situé, avec une énergie égale au *moment de stabilité* du corps, c'est-à-dire au produit de son poids multiplié par la distance ag de la projection de son centre de gravité à l'arête de rotation Aa (fig. 142). Si cette distance est nulle, le centre de gravité passera par la droite des appuis, et il y aura équilibre : mais cet équilibre sera non stable, parce que le centre de gravité est alors le plus haut possible et qu'il tend à descendre.

Si les trois pieds ne sont pas en ligne droite et que le centre de gravité G du corps se projette dans l'intérieur du triangle, la table est évidemment en équilibre (fig. 143). Enfin, si ce même centre

se projette en dehors, la table tournera autour du côté *ab*, le plus voisin de cette projection. Dans le premier cas, l'équilibre est stable, parce que, pour déranger la table de sa position, il faut élever le centre de gravité du corps. Dans le deuxième cas, l'équilibre est instable, parce que ce centre tend à descendre. Généralement, pour l'équilibre stable, il faut que le centre de gravité du corps se projette dans l'intérieur du polygone qui réunit deux à deux ses appuis sur un plan de niveau. L'énergie avec laquelle le corps s'opposera à son renversement autour d'une arête sera égale au produit de son poids par la distance de la projection de ce centre à cette arête, et ce renversement sera d'autant plus facile que cette distance deviendra moindre. Voilà pourquoi on nomme *moment de stabilité* d'un corps pesant le plus petit des moments de son poids, par rapport aux divers côtés de sa base.

Les conditions sont les mêmes si le corps pose par une face plane tout entière et terminée par une courbe quelconque. L'équilibre a lieu quand la projection du centre de gravité du corps tombe dans l'intérieur de la base. Tel sera, par exemple, un cube posé sur un plan de niveau, parce que la projection du centre de gravité coïncide avec le centre de la base (fig. 144). Il en est de même pour un prisme droit quelconque, et quelle que soit sa hauteur, seulement sa stabilité diminue à mesure que la hauteur devient plus grande. On conçoit, en effet, que le centre de gravité s'élevant de plus en plus, l'angle BAG, que fait avec le plan vertical passant par l'arête A le plan qui passe par la même arête et par le centre de gravité G, est de plus en plus petit. Ainsi, le centre de gravité G se rapproche de plus en plus du cas de l'instabilité. Supposez d'ailleurs une force horizontale p tendant à renverser le corps autour de l'arête A et appliquée au sommet du corps. Son moment sera $p \times AB$. Mais le moment de stabilité en vertu duquel le corps résistera à son renversement est égal à $P \times ag$. D'où

$$p \times AB = P \times Ag,$$

et, par suite,

$$p = P \times \frac{Ag}{AB},$$

relation qui nous apprend que p sera d'autant moindre par rapport au poids P du corps que sa hauteur AB sera plus considérable. Un

cône sera difficile à renverser parce que son mouvement de stabilité est plus considérable.

Un prisme incliné conservera l'équilibre stable, tant que son centre de gravité tombera dans l'intérieur de sa face d'appui. La résistance qu'il opposera à son renversement autour de la tangente *ab* (fig. 145) la plus voisine de la projection *g* du centre de gravité, ou son moment de stabilité, sera égal à $P \times mg$. Dans le cas où le poids *g* tombe au dehors, le corps tend à tourner autour de la tangente la plus voisine de la projection du centre. La tour de Pise, quoique inclinée, se maintient toujours dans sa position, parce que son centre de gravité se projette dans l'intérieur de sa base sur le terrain. — Des dominos empilés les uns sur les autres et se dépassant l'un l'autre d'une même quantité, de manière à former une espèce de prisme incliné, demeurent en équilibre tant que le centre de gravité de tout le système des dominos se projette dans l'intérieur du domino le plus bas. Mais au fur et à mesure que le nombre des dominos ou que la hauteur de la pile augmente, ce centre se rapproche de l'arête *A* (fig. 146), le moment de stabilité diminue, et finit même par devenir négatif, ou par favoriser le renversement du système lorsque le centre de gravité tombe au dehors de l'arête *A*. On voit, d'après ce qui précède, que la stabilité naturelle d'un corps augmente quand sa hauteur diminue ou quand sa base augmente, et que, toutes choses égales d'ailleurs, elle est la plus grande possible lorsque le centre de gravité tombe au centre de figure même de la base. Cela explique pourquoi les soutiens isolés doivent se composer de corps élevés à l'aplomb et être établis sur des bases plus larges qu'on nomme *empatements*.

Si les corps pesants sont sollicités par d'autres forces conjointement avec l'action de leur poids, il faut que la résultante de toutes ces forces réunies, ainsi que nous l'avons dit (2e partie, 101), aille rencontrer la base de ces corps dans son intérieur. Il y a même telles forces qui, combinées avec le poids d'un corps, en augmentent la stabilité. C'est ainsi qu'un prisme incliné dont le centre de gravité tombe au dehors de sa base, serait renversé autour de *B* (fig. 147) si on l'abandonnait à lui-même. Mais si une force *F* horizontale tend à le faire tourner en sens contraire, cette force combinée avec le poids du corps aura une résultante *GO* qui rencontrera la base *AB* en un point *O* qui lui sera intérieur et l'équilibre sera stable. Réciproquement, le poids du prisme s'oppose à son

tour à ce que l'action de F ne le renverse autour de l'arête extérieure A et avec une énergie d'autant plus grande que le produit $P \times Ag$, c'est-à-dire son moment de stabilité naturelle, sera plus considérable.

Les murs de maison sont ordinairement poussés autour de leur pied extérieur par les combles, ou les poutres qui appuient contre eux du dedans au dehors; mais on augmente leur stabilité naturelle en éloignant de cette même arête leur centre de gravité (fig. 148). Voilà pourquoi on leur donne du fruit ou une épaisseur plus grande à la base qu'au sommet. Toutefois ces murs ne cessent pas d'être dressés verticalement. On cache l'effet de ce changement d'épaisseur par des cordons, des plinthes, etc.

Dans les murs destinés à soutenir les terres, afin de résister à la poussée de ces dernières, on cherche à éloigner l'arête extérieure de ces murs de leur centre de gravité, soit par des talus, soit encore par de larges empatements, et de manière à remplir la condition que la résultante du poids des murs et de la poussée des terres passe dans l'intérieur de la base. Le moment de stabilité naturelle de ces constructions est toujours égal à leur propre poids multiplié par la distance de leur centre de gravité à l'arête extérieure. On voit même que l'on pourrait supprimer les talus et conserver au mur un parement vertical, pourvu que sa nouvelle épaisseur donnât lieu au même moment de stabilité, parce que la stabilité naturelle de deux murs est la même, lorsque les moments de leurs poids sont égaux. La condition que la résultante de toutes les forces passe dans l'intérieur de la base est insuffisante pour des constructions qui reposent sur un terrain mou ou compressible; il faut encore que le point de rencontre coïncide avec le centre de figure de la base. S'il n'en était pas ainsi, la pression serait plus forte du côté où la résultante traverse la base : celle-ci tournera autour de son centre de figure, attendu que le terrain n'est plus résistant, mais à l'aide de la nouvelle condition, il n'y aura plus de raison pour que le corps s'enfonce plutôt d'un côté que de l'autre.

Si la charge d'une voiture à deux roues qui est traînée sur un plan de niveau, est telle que son centre de gravité soit en dehors de l'essieu (fig. 149), elle tendra à basculer dans un sens ou dans l'autre ; tantôt elle exercera une pression sur le cheval limonier, tantôt elle tendra à le soulever, et ces deux circonstances sont également des causes de fatigue pour le cheval. Mais, si le centre de

gravité est compris dans le plan vertical de l'essieu, l'action verticale du poids se décomposera en deux autres forces passant par les appuis des roues sur le terrain, et qui seront immédiatement détruites par la résistance de ces derniers. Nous verrons plus loin si cette dernière condition a encore lieu quand le terrain est incliné.

103. *Définition et équilibre du plan incliné.* — Représentons-nous un plan quelconque coupé perpendiculairement à ses horizontales et suivant sa ligne de plus grande pente AB (fig. 150). Quoique ce plan soit supposé indéfiniment prolongé, son inclinaison suffit pour définir sa base AC et sa hauteur BC, correspondantes à une même longueur donnée AB. Qu'on imagine un corps pesant posé sur ce plan, et dont G soit le centre de gravité. L'équilibre de ce corps sur ce plan exigerait, 1° que la résultante de son poids passât par un des points de la base d'appui de ce corps; 2° que cette résultante fût perpendiculaire au plan. Cette dernière condition ne peut être généralement satisfaite à l'égard d'un plan quelconque, parce que l'action de la pesanteur est toujours verticale. Dès lors cette action se décomposera en deux autres, l'une perpendiculaire au plan qui sera détruite par sa résistance, et l'autre parallèle au plan, qui fera mouvoir ou descendre le corps selon la longueur. On remarquera cependant que si la verticale du centre de gravité rencontre l'intérieur de la base d'appui du corps, ce dernier ne fera que glisser dans le sens du plan, au lieu qu'il y roulera si cette verticale tombe au dehors de cette même base. C'est ce qui arrivera à l'égard d'une boule, parce que la verticale passe toujours en dehors de son point d'appui m sur le plan. Supposons qu'une force p parallèle à ce plan s'oppose à ce que cette boule ne descende. Appelons P le poids de cette dernière. On sait que le corps devant rester en équilibre sous l'action des deux forces p et P, leur résultante GM sera perpendiculaire à AB (fig. 151), et passera par le point d'appui m. Cela posé, soit GM l'intensité de cette résultante : elle sera telle que les côtés du parallélogramme $GG'MN$ représenteront, l'un $GG' = MN$ la force verticale P, et l'autre GN la force p parallèle à AB. Or, le triangle GMN est semblable au triangle ABC. Car GM et MN sont perpendiculaires à AB et à AC; de plus ils sont rectangles l'un en G et l'autre en C. On aura la proportion

$$GN : MN :: BC : AB, \quad \text{ou} \quad p : P :: BC : AB.$$

Ainsi, la force parallèle au plan qui retient le corps est au poids de

ce corps comme la hauteur du plan est à sa longueur ; on a

$$p = P \times \frac{BC}{AB}.$$

Si, au lieu de tirer dans le sens du plan, la force p qui retient le corps sur le plan était horizontale, et agissait à la manière de la puissance qui empêche un écrou de descendre le long de sa vis, GM (fig. 152) résultante du poids du corps et de cette nouvelle force n'en sera pas moins toujours perpendiculaire à AB, et le triangle GMN qui représente les deux forces qui sollicitent le corps, ainsi que leur résultante, sera encore semblable au triangle ABC. Mais comme GN est perpendiculaire à BC, et que l'angle droit du premier triangle est en N, on aura la proportion

$$GN : MN :: BC : AC, \quad \text{ou} \quad p : P :: BC : AC;$$

ce qui apprend que la force horizontale qui retient le corps sur le plan est au poids du corps comme la hauteur du plan est à sa base, ou que p est égal à $P \times \frac{BC}{AC}$. On remarquera que, dans la valeur de p, le numérateur est le même pour les deux cas et proportionnel à la hauteur du plan, mais que le dénominateur n'est autre chose que le côté du plan parallèle à la force appliquée.

104. *Mouvement sur le plan incliné.* — Nous sommes maintenant à même de trouver la loi du mouvement d'un corps pesant abandonné à lui-même sur un plan incliné. En effet, nous pouvons en décomposer son poids GM en deux autres forces, l'une MN (fig. 153) perpendiculaire au plan et détruite par la résistance de celui-ci, l'autre GN parallèle au plan et qui produira seul le mouvement. Au moyen de la similitude des triangles semblables GNM et ABC, on reconnaîtra que la dernière composante p est égale à $P \times \frac{BC}{AB}$, P étant toujours le poids du corps. Remarquons que le rapport $\frac{BC}{AB}$ reste le même dans toute la longueur du plan, et qu'ainsi la force p qui tend à faire glisser le corps demeure constante comme la pesanteur. Or, quand une force motrice est constante, le corps conserve un mouvement uniformément accéléré

ainsi qu'on l'a vu dans la 1re partie. Les vitesses acquises croîtront proportionnellement au temps, et les espaces décrits comme les carrés des temps écoulés, etc. Seulement chaque degré de vitesse imprimée sera moindre que pour la pesanteur : car les vitesses imprimées au bout de la première unité de temps seront ici proportionnelles aux forces motrices. On aura donc

$$P : p :: g : g', \quad \text{d'où} \quad \frac{g'}{g} = \frac{p}{P} = \frac{BC}{AB},$$

et, par suite,

$$g' = g \times \frac{BC}{AB}.$$

Telle sera la valeur de l'intensité de la gravité dans le sens du plan. C'est par la considération du plan incliné que Galilée est parvenu à découvrir les lois de la chute des corps graves. Bien que ces lois soient les mêmes dans le sens vertical que le long d'un plan incliné, on conçoit que la rapidité de mouvement et la résistance de l'air rendent extrêmement difficiles l'estimation des temps écoulés et des espaces décrits par les corps graves, lorsqu'ils tombent verticalement. Il n'en est plus de même quand ils glissent sur un plan incliné, à pente très-douce. Galilée a d'ailleurs diminué autant que possible l'influence de la résistance du plan, en posant les corps sur un chariot dont les roues cheminaient sur des arêtes aiguës, ainsi que cela se pratique aujourd'hui dans les chemins de fer.

Considérons encore une voiture qui chemine sur un terrain incliné AB (fig. 154) et dont le brancard peut d'ailleurs être regardé comme sensiblement parallèle à ce terrain. Quoique le centre de gravité de la charge soit avec l'essieu dans un même plan perpendiculaire au terrain, cependant ici l'action verticale de cette charge passe au dehors et tend à faire tourner la voiture dans un sens opposé à celui de la montée. L'énergie de cette action, égale à $P \times mb$, sera d'autant plus grande que la verticale qui passe par le centre de gravité de la charge s'écarte plus de l'appui m des roues sur le terrain. Il conviendra, pour contre-balancer cet effet, que le conducteur se place sur le devant de sa voiture, quand elle monte, et sur l'arrière quand elle descend. A proprement parler, il n'y a point de remède contre un tel inconvénient. On le diminue, cependant, en rendant la charge la moins haute possible au-dessus de l'essieu, parce que le moment de stabilité $P \times mb$ augmente

avec la hauteur *Gn* du centre de gravité au-dessus des appuis de la voiture sur le terrain.

105. *Frottement des corps sur un plan.* — Le frottement est la résistance qu'un corps posé sur une surface oppose au mouvement. Cette force, qui n'est point le poids du corps, mais qui est en réalité la résistance du terrain, ne doit pas être confondue avec l'adhérence. Celle-ci se manifeste lorsque la surface par laquelle le corps pose sur le plan est enduite d'une espèce de colle. Si dans cette circonstance, on cherche à détacher le corps, la résistance qu'on éprouve ne dépend nullement ici du poids du corps, mais bien du nombre des parties en contact ou de la grandeur de la surface enduite. Ainsi, l'adhérence est double, triple, quadruple, si la surface est double, triple, quadruple : en un mot, elle croît proportionnellement aux surfaces en contact ; mais elle demeure la même quel que soit le poids du corps. Le frottement, au contraire, demeure le même quelle que soit la surface, et il augmente avec le poids du corps ou plutôt avec la pression qu'il exerce contre le plan sur lequel il est mis en mouvement. Les lois de la résistance du frottement ont été découvertes par Amontons et Coulomb. Avant de donner les principes établis à cet égard par ce dernier physicien, il convient d'expliquer les principes des méthodes qui peuvent y conduire.

106. *Mesure du frottement d'une substance quelconque contre un plan.* — A l'aide du peson à ressort, dont il a été parlé plusieurs fois, on peut mesurer immédiatement la résistance opposée par le frottement d'une substance sur un plan de niveau (fig. 155). Tirez, en effet, avec le peson, cette substance chargée d'un poids quelconque, en la faisant marcher sur le plan d'un mouvement uniforme. La division sur laquelle l'aiguille de l'instrument s'arrêtera, indiquera *en poids* la résistance occasionnée par le frottement de la substance sous la charge donnée contre le plan.

Ce même frottement peut encore s'obtenir au moyen du plan incliné (fig. 156). En effet, si l'on décompose le poids P du corps en deux forces, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle au plan de cette dernière, p est, comme l'on sait, égal à $P \times \frac{BC}{AB}$. De plus, tant que cette composante sera inférieure à la résistance ou au frottement, le corps demeurera au repos, et il ne prendra du mouvement qu'à l'instant où le plan aura reçu une inclinaison

telle que la composante p soit devenue égale à la résistance cherchée F. On aura donc

$$F = P \times \frac{BC}{AB}.$$

Sans entrer dans le détail des expériences de Coulomb, qui, au lieu de l'un des moyens précédents, s'est servi de traîneaux horizontaux, nous nous bornerons à dire, avec cet habile physicien, que le frottement est généralement proportionnel à la charge du corps qui glisse, ou plutôt à l'effort perpendiculaire à la surface contre laquelle il frotte. Nous verrons, en effet, que les forces autres que la pesanteur qui sollicitent un corps, peuvent avoir des composantes perpendiculaires au plan dont l'effet est d'augmenter ou de diminuer la pression du corps contre le plan; mais c'est toujours à la pression résultante de toutes les forces que le frottement est regardé comme proportionnel. Cela posé, lorsque, par les règles de la mécanique, la pression contre la surface en contact a été calculée, on en déduit immédiatement le frottement sur le plan en multipliant la première par son rapport avec cette résistance, et ce rapport, variable selon certaines circonstances, est indiqué sur des tableaux qui résultent des expériences de Coulomb. Remarquons, d'ailleurs, que la règle du frottement proportionnel à la pression n'est point générale, et que, pour des corps de substances différentes, les lois du mouvement ne sont pas toujours indépendantes de la vitesse du corps ni de l'instant où il a lieu. Lorsque du fer a reposé, par exemple, longtemps sur du bois, le frottement augmentera ensuite avec la durée du repos, parce que la compressibilité du bois permet au fer de s'y engraîner davantage; c'est environ au bout de cinq à six jours que le frottement arrive à sa plus grande limite; il devient triple ou quadruple de celui qui a lieu quand les corps sont en mouvement continuel.

Les vannes qui sont restées longtemps fermées, et que l'eau a pressées contre leurs feuillures, opposent, quand on les lève, un très-grand frottement qui diminue dès que le mouvement est établi.

Il faut donc distinguer les frottements selon deux circonstances principales. Voilà pourquoi nous présenterons ici deux tableaux différents. Dans le premier, les surfaces planes sont supposées être restées en contact assez longtemps pour que le frottement ait atteint toute sa valeur. Le deuxième est relatif au frottement de surfaces dans la supposition où le mouvement est établi depuis un certain temps.

PREMIER TABLEAU. *Frottement des surfaces planes quand elles auront été longtemps en contact.*

INDICATION DES SURFACES EN CONTACT.	RAPPORT DU FROTTEMENT A LA PRESSION.	OBSERVATIONS.
Fonte sur **chêne**, les fibres parallèles.	0,44	Le frottement parvient au *maximum* au bout de quelques secondes.
» » les fibres parallèles, et la surface réduite à des arêtes arrondies.	0,42	*Idem.*
» » les fibres croisées.	0,27	*Idem.*
» » les surfaces garnies d'un enduit de suif renouvelé à chaque expérience.	0,38	Le frottement atteint son *maximum* en quelques jours. L'adhérence produit une résistance d'environ 19 k. par mètre carré.
» » Les mêmes après un long user en mettant du vieux oing.	0,21	Le frottement atteint son *maximum* en quelques jours. L'adhérence produit une résistance d'environ 39 k. par mètre carré.
Fonte sur sapin, les fibres parallèles.	0,67	Le frottement atteint son *maximum* au bout de quelques secondes.
Fonte sur sapin, les fibres parallèles.	0,56	*Idem.*
Fonte sur orme, les fibres parallèles.	0,46	*Idem.*
Fer sur **chêne**.	0,20	Il n'est point certain que le frottement ait atteint son *maximum*.
Acier sur **chêne**.	0,18	*Idem.*
Fer sur fer.	0,28	Le *maximum* du frottement a lieu au bout de quelques secondes.
Acier sur fer.	0,26	*Idem.*
» » la surface réduite à des pointes émoussées.	0,17	
» » les surfaces garnies d'un enduit de suif neuf.	0,11	
» » » » d'un enduit d'huile.	0,17	Il a lieu au bout de quelques heures. La résistance de l'adhérence est d'environ 7 kilogr. par mètre carré.
» » » » d'un enduit de vieux oing.	0,14	
Fonte sur marbre poli à sec, le cuir non usé.	0,40	Le frottement est moindre pour des pressions au-dessous de 0k,10 par centimètre carré.
» » le cuir poli pour l'user.	0,25	
» » le cuir légèrement huilé et onctueux.	0,32	Pression de $\frac{0k,15}{2}$ à $\frac{0k,45}{2}$ par centimètre carré.
Fonte sur fonte non polie à sec.	0,25	
» » non polie huilé.	0,21	
Fonte sur fonte ou fer poli à sec, après user.	0,20	Le frottement augmente un peu avec la vitesse et diminue pour des pressions au-dessous de 0k,02 par centimètre carré.
Fonte sur **chêne**, les fibres en longueur, à sec non poli.	0,33	Le frottement varie peu avec la vitesse.
» » après user et poli.	0,30	*Idem.*
» » légèrement humecté d'eau.	0,85	
» » complétement mouillé.	0,75	
» » légèrement huilé ou onctueux.	0,38	
» » fortement huilé.	0,33	
La fonte, dans les mêmes circonstances que le cuir, donne le même frottement.		
Fonte sur marbre poli à sec.	0,33	
Pierre de liais (calcaire d'un grain très-fin) bien polie sur une pierre semblable (*Rondelet*, Tr. de l'art de bâtir, t. II, p. 242).	0,36	La valeur du frottement après que le mouvement est commencé ne peut pas différer sensiblement de celle qui a lieu à l'instant où le mouvement commence.
Pierre de Château-Landon (calcaire très-dure), dont la surface était piquée ou bouchardée, sur une pierre semblable (*Boistard*, Expériences sur la main-d'œuvre, etc. p. 56.)	0,78	*Idem.*
Traîneau en bois glissant sur du pavé (*Régnier*, Description du Dynamomètre, Journ. de l'école polytechnique, 5e cahier).	0,58	*Idem.*

DEUXIÈME TABLEAU. *Frottement des surfaces planes en mouvement les unes sur les autres.*

INDICATION DES SURFACES EN CONTACT.	RAPPORT DU FROTTEMENT A LA PRESSION.	OBSERVATIONS.
Chêne sur chêne, les fibres parallèles.	0,11	
» » la surface réduite à des arêtes arrondies.	0,08	
» » les fibres croisées.	0,10	
» » la surface réduite à des arêtes arrondies.	0,10	
» » les fibres parallèles et les surfaces enduites de suif ou de vieux oing, renouvelé à chaque essai.	0,035	L'adhérence des surfaces occasionne une résistance d'environ 3 kilogr. par mètre carré.
» » la surface réduite à des arêtes arrondies avec enduit, ou l'enduit essuyé et les surfaces étant onctueuses.	0,06	
Chêne sur sapin, les fibres parallèles.	0,16	
Sapin sur sapin.	0,17	
Orme sur orme.	0,10	
Chêne sur fer, les fibres étant parallèles et la vitesse très-petite.	0,08	Le frottement augmente avec la vitesse, à moins que les surfaces n'aient été usées pendant longtemps.
» » la vitesse étant de 0m,3 par seconde.	0,17	
» » les surfaces étant très-petites, sans enduit, mais restant onctueuses.	0,07	Le rapport du frottement à la pression est constant.
Fer sur fer.	0,28	Le frottement diminue quand les surfaces ont été usées pendant longtemps.
Cuivre sur fer.	0,24	Le frottement après un long user se réduit à 0,17.
Fer sur fer, avec un enduit de suif renouvelé.	0,10	L'adhérence produit une résistance d'environ 14 kilogr. par mètre carré.
Cuivre sur fer, » » »	0,10	*Idem.*
» » avec de l'huile sur un ancien enduit de suif.	0,12	
» » la surface réduite à des pointes émoussées, restant onctueuses, ou enduites de suif ou d'huile.	0,12	
Cuir sur marbre poli, à sec, le cuir non usé.	0,25	
» » poli, le cuir poli pour l'user.	0,18	
» » le cuir légèrement huilé ou onctueux.	0,20	
Cuir sur fonte non polie, à sec.	0,20	
» » non polie, huilé.	0,18	
» » ou fer poli à sec, après user.	0,20 0,22	Si le mouvement est lent. Si le mouvement est rapide ou de 1m par 1″.
» » ou fer poli, les surfaces étant huilées.	0,16	
» » ou fer poli, les surfaces frottées avec de la plombagine ou de l'huile.	0,12	
Cuir sur chêne, à sec non poli.	0,30	
» » après user et poli.	0,18	
» » légèrement humecté d'eau.	0,65	
» » complétement mouillé.	0,50	
» » légèrement huilé ou onctueux.	0,20	
» » fortement huilé.	0,12	
Chêne sur marbre poli à sec.	0,18	
» » huilé ou onctueux.	0,12	
Corde glissant sur du bois ou sur une surface quelconque. La filasse, dans les mêmes circonstances que le cuir, produit le même frottement.	0,33	

107. *Observations sur les tableaux du frottement de deux surfaces.* — Les tableaux précédents ont pour but de donner les rapports du frottement aux pressions correspondantes, et cela quelle que soit la grandeur des surfaces frottantes. Il n'y a que la nature de leurs substances qui puisse influer sur ces rapports, et l'on se tromperait en croyant que le frottement augmente avec l'étendue des surfaces. Cela n'a lieu qu'à l'égard de l'adhérence qui retient deux surfaces comme collées entre elles; encore arrive-t-il souvent qu'elle soit négligeable, attendu la petitesse des surfaces en contact, ou le peu de ténacité des matières molles dont on a coutume de les enduire. Au reste, les tableaux donnent la valeur de l'adhérence dans toutes les circonstances où il faut en tenir compte. Puisque, pour des substances données, le frottement est une fraction constante de la pression, il en résulte qu'un même corps traîné sur un plan donne lieu à la même résistance sous quelque face qu'il soit posé.

Passons à quelques applications pour faire apprécier l'importance des tableaux que nous avons relatés. On y voit, par exemple, que, pour du bois de chêne sur du bois de chêne en mouvement les fibres parallèles, le rapport du frottement à la pression est environ $\frac{1}{10}$ quand le mouvement est acquis, et qu'ainsi la résistance est de 100 kilogr. pour une charge de 1000 kilogr. Quand les surfaces en contact de ces morceaux de bois sont enduites de suif, le frottement est réduit à 0,035. Le frottement du fer à plat sur d'autre fer est plus fort lorsque ces fers sortent de la main de l'ouvrier que quand ils ont été usés par le mouvement. Dans le premier cas, il est entre $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{4}$, et il se réduit à $\frac{1}{8}$ quand les surfaces sont parfaitement polies. Un enduit d'huile ne diminue pas sensiblement la résistance de leur frottement; mais elle est réduite au $\frac{1}{10}$ en enduisant les surfaces soit avec du vieux oing, soit avec du suif; cette dernière substance est la plus avantageuse. — Un morceau de fer contre du cuivre produit un frottement de $\frac{1}{10}$ avec un enduit de suif, et de $\frac{1}{8}$ avec de l'huile. En général, le frottement est moindre à pression égale pour des substances hétérogènes que pour des substances de même nature; il est également moindre pour des corps durs que pour des corps mous. Voilà pourquoi de l'acier sur du métal de cloche, quand ces corps sont bien polis, frotte moins que du fer sur du cuivre. La raison en est que plus les corps sont durs, moins ils s'usent, et que la quantité de travail absorbée par le frottement est

proportionnelle à la quantité de matière enlevée. Enfin, quand du suif est interposé entre deux surfaces, celles-ci ne sont plus immédiatement en contact, il ne reste que le suif dont il faut vaincre la ténacité, et cette résistance est peu de chose. Nous désignerons désormais par la lettre f le rapport constant du frottement à la pression.

106. *Frottement du plan.*—Considérons d'abord un plan horizontal et indéfini MN (fig. 157), sur lequel est posé, par l'une de ses faces, un corps du poids P tiré par une force quelconque F dirigée de bas en haut, et dont ab représente l'intensité en kilogrammes. Décomposons cette force en deux autres, l'une horizontale ac, qui produit le mouvement; et l'autre perpendiculaire bc, ou verticale, qui tend à soulever le corps et par conséquent à diminuer sa pression sur le plan. Si cette composante verticale n'existait pas, le corps presserait de tout son poids sur le plan, et la résistance qu'il opposerait au mouvement, ou son frottement, qui est toujours proportionnel à la pression, serait $f \times P$. Appelons p la composante horizontale de F, et q sa composante verticale. $P - q$ sera la pression réelle du corps contre le plan; $f(P - q)$ ou $\overline{f \times P} - \overline{f \times q}$ sera le frottement véritable. Donc ici la composante verticale tend à diminuer le frottement du corps de $f \times q$, ou à favoriser d'autant la composante horizontale qui le fait mouvoir. On aura ainsi, pour l'équilibre,

$$p + fq = f \times P.$$

Remarquons que l'on a les proportions

$$p : F :: ac : ab, \quad \text{ou} \quad p = F \times \frac{ac}{ab},$$

et

$$q : F :: bc : ab, \quad \text{ou} \quad q = F \times \frac{bc}{ab}.$$

Ainsi, la relation d'équilibre deviendra

$$F\left(\frac{ac}{ab} + f\frac{bc}{ab}\right) = f \times P.$$

D'où l'on tire $$F = \frac{f \times P}{\frac{ac}{ab} + f\frac{bc}{ab}}.$$

Le rapport f est, comme l'on sait, donné par les tableaux, et ne dépend que des substances du corps P et du plan MN. Quant aux grandeurs ac et bc, elles seront immédiatement données par le rectangle dont les côtés sont parallèles et perpendiculaires au plan et dont la diagonale est proportionnelle à la force appliquée au corps. Comme cette expression se reproduira souvent, il importe de la simplifier, en prenant pour unité la grandeur ab qui représente la force F. Dès lors les côtés ac et bc ne seront plus que des fractions exprimant les rapports des composantes avec la force elle-même. Ainsi, en posant $ab = 1$, on aura

$$p = F \times ac, \quad \text{et} \quad q = F \times bc,$$

$$F(ac + f \cdot bc) = f \times P, \quad \text{et} \quad F = \frac{f \times P}{ac + f \cdot bc}.$$

La valeur de F sera évidemment la plus petite possible ou la plus avantageuse, lorsque le dénominateur $ac + f \cdot bc$ est le plus grand possible, parce que le numérateur $f \times P$ est une quantité constante, ainsi que le rapport f du frottement à la pression. Supposons ce dernier de $\frac{1}{4}$, et cherchons dans cette hypothèse la valeur minimum de $ac + f \cdot bc$ ou de $ac + \frac{1}{4} bc$. Prenons sur la direction de F (fig. 158) une partie ab égale à l'unité. La projection sur l'horizontale aM sera la valeur de ac, et la verticale projectante de l'extrémité b celle de bc. Pour avoir $f \times bc$ ou $\frac{1}{4} bc$, prenez

$$ad = f \times ab = \tfrac{1}{4} ab,$$

et l'on aura $$dg = \tfrac{1}{4} bc = f \times bc.$$

Cela posé, sur ap' perpendiculaire à ab, portons $ad' = ad$ et abaissons la verticale $d'g'$. Les triangles $ag'd'$ et agd seront égaux comme ayant les hypoténuses égales et l'angle $g'ad'$ égal à l'angle adg, parce qu'ils sont compléments du même angle dag. D'où

$$ag' = dg' = \tfrac{1}{4} bc = f \cdot bc,$$

et $$d'g' = ag = \tfrac{1}{4} bc = f \cdot ac.$$

Donc on a

$$ag' + ac = g'c = \tfrac{1}{4}\, bc + ac = f \,.\, bc + ac;$$

en sorte que cette valeur, qui n'est autre que le dénominateur de F, est précisément la projection de bd'. Or, cette projection sera la plus grande possible quand elle deviendra égale ou parallèle à bd', ou quand on aura $d'g'$ ou $ag = abc$. Mais $ag = f \times ac$. Donc enfin le *minimum* de F, c'est-à-dire le cas où cette force sera la plus avantageuse, aura lieu lorsque $bc = f \times ac$: d'ou $f = \frac{bc}{ac}$. Remarquons que les grandeurs bc et ac expriment, l'une la hauteur, et l'autre la base de la direction de la force par rapport au plan, et qu'ainsi le rapport $\frac{bc}{ac}$ est précisément l'inclinaison de l'angle sous lequel la force de tirage exerce son action. Par conséquent, cette action est la plus petite possible lorsqu'elle tire sous une inclinaison exprimée par le rapport du frottement à la pression ou par la valeur f relative aux substances en contact.

Les conditions relatives au meilleur tirage des chevaux sur une voiture à quatre roues sont analogues : car leur effort se décompose en deux autres, l'un horizontal, destiné à produire le mouvement, et l'autre vertical, à soulever les roues de devant, et à diminuer leur résistance, d'ailleurs plus grande en raison de ce que leurs rayons sont plus petits.

Le cas où un corps de poids P posé sur un plan incliné AB (fig. 159) est tiré par une force F, faisant un angle quelconque avec ce plan et dirigé de bas en haut, donne lieu à des conditions d'équilibre analogues à celui de l'équilibre du plan horizontal. Décomposez la force F en deux autres, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire au plan. Celle-ci donnera lieu à une composante $F \,.\, bc$ dont le frottement $f \,.\, F \,.\, bc$ diminuera d'autant le frottement général du corps contre le plan, et par conséquent s'ajoutera à la composante parallèle $F \,.\, ac$ qui produit le mouvement. Quant à la composante parallèle au plan du poids P, elle s'opposera au mouvement, ainsi que le frottement produit par sa composante perpendiculaire. L'une est donnée (2e partie, 103) par la proportion

$$s : P :: BC : AB,$$

et l'autre par la proportion

$$y \;:\; P \;::\; AC \;:\; AB;$$

en sorte que $P \,.\, AC$ et $P \,.\, BC$ représentent les composantes du poids, perpendiculaire et parallèle à ce plan, en prenant pour unité la longueur AB de ce dernier. De plus, le frottement produit par la première aura pour expression $f \,.\, P \,.\, AC$. Maintenant que nous savons que le mouvement est favorisé par $F \,.\, ac + f \,.\, F \,.\, bc$, et qu'il est contrarié par $P \,.\, BC + f \,.\, P \,.\, AC$, nous reconnaîtrons que l'équilibre sera établi au moyen de la relation

$$F \,.\, ac + f \,.\, F \,.\, bc = P \,.\, BC + f \,.\, P \,.\, AC,$$

ou

$$F(ac + f \,.\, bc) = P(BC + f \,.\, AC).$$

D'où l'on tire

$$F = \frac{P(BC + f \,.\, AC)}{ac + f \,.\, bc}.$$

Nous observerons encore que le numérateur de cette valeur est constant, puisqu'il dépend uniquement du poids du corps et de l'inclinaison du plan, et qu'ainsi le *minimum* F correspond au cas où le dénominateur $ac + f \,.\, bc$ est le plus grand possible, et où l'on aurait $\frac{bc}{ac} = f$. Ce qui indique que l'action d'un effort est la plus avantageuse lorsque son inclinaison par rapport au plan est égale au rapport du frottement à la pression ou au coefficient f qui est propre à la résistance des surfaces en contact. — Enfin, dans le cas particulier où l'effort F est horizontal, on verra sans peine qu'il tend alors à appuyer le corps contre le plan, ou à augmenter le frottement général du corps, en sorte que le frottement partiel $f \,.\, F \,.\, bc$, au lieu d'être ajouté à la composante horizontale $F \,.\, ac$ qui produit le mouvement, doit en être retranché : cela revient à substituer $-bc$ à $+bc$ dans la valeur précédente de F. Cette remarque est indispensable pour le frottement de la vis à filet carré, frottement tellement majeur que dans le cas où les filets sont inclinés au $\frac{1}{6}$, la puissance est triple environ de ce qu'elle serait pour vaincre une même résistance donnée, si ce frottement n'existait pas.

109. *Quantité de travail sur un plan incliné.* — Le plan incliné est une machine de la plus grande utilité dans les arts, et facilite le transport des fardeaux les plus lourds à une hauteur considérable.

Si, par exemple, il s'agissait de construire une tour en pierres de taille, il faudrait beaucoup d'hommes pour élever les matériaux selon une direction verticale, au lieu qu'on les amène très-facilement au moyen de rampes assez douces pour que les hommes, les chevaux et les voitures puissent les parcourir. Il y a plus; c'est que la puissance pour traîner les poids est fort réduite par l'emploi des rampes. En effet, pour conduire une pierre le long d'une rampe *AB* (fig. 160), les ouvriers ont coutume de la faire tourner sur ses arêtes perpendiculaires à la pente, ou, comme on dit communément, ils lui font *faire quartier;* si cette pierre est un cylindre, ils la font rouler, de sorte que dans ces diverses opérations les résistances du frottement sont évitées. L'effort *F*, qui est ici parallèle à la longueur du plan *AB*, n'a plus alors à vaincre que la résistance du poids *P* du corps, et, d'après ce qui a été démontré (2e partie, 103), on a

$$F = \frac{BC}{AB} \times P.$$

Si la pente du plan est telle que sa longueur *AB* soit cent fois sa hauteur correspondante *BC*, l'effort à exercer contre le corps n'est plus alors que le centième de son poids. Mais a-t-on gagné sous le rapport du travail? Rappelons-nous que lorsqu'il y a équilibre, ou lorsque le corps est mû uniformément, la quantité de travail de la puissance est égale à la quantité de travail de la résistance. Ici le chemin parcouru dans la direction de *F* est *AB;* son travail est $F \times AB$, et celui du poids est $P \times BC$, parce que le poids monte en réalité de la hauteur *BC* pendant qu'il parcourt la longueur *AB*. On a donc

$$F \times AB = P \times BC.$$

Par conséquent, le travail est le même soit qu'on élève le corps directement, ou le long d'un plan incliné; ce dernier n'a d'autre but que de faciliter l'élévation du fardeau selon les localités.

Lorsque le corps est posé sur une surface courbe (fig. 161) il ne la touche que selon une petite surface que l'on regardera comme un point, et en imaginant à ce point un plan tangent, le corps sera dans le même état que s'il posait sur ce nouveau plan par un point. Ainsi, les considérations d'équilibre deviennent absolument les mêmes que pour un plan incliné ordinaire.

110. *Mesure de la tension d'une corde, de la part de son propre poids.* — Ce qui précède nous permet d'estimer la tension que le poids d'une corde lui occasionne dans le sens de sa longueur. Soit, en effet, une corde posée sur une surface dont A (fig. 162) est le point le plus élevé ; et considérons d'abord la partie AF qui tend à se précipiter le long de la surface, abstraction faite du frottement. La question consiste à trouver la force nécessaire pour retenir cette corde, et qui est évidemment égale et opposée à la tension sur cette partie AF. Désignons par p le poids de l'unité de longueur de la corde, et raisonnons sur l'élément MN dont le poids sera $p \times MN$. Menons par le point O de cet élément, la verticale OG proportionnelle à $p \times MN$, et décomposons ce poids en deux forces, l'une GQ perpendiculaire à la surface, l'autre QO tangentielle à cette même surface. Il est visible que la première composante sera détruite par la résistance de AMN, et que l'autre donnera la mesure de la tension due au poids de MN. Ayant mené une verticale quelconque ef, la verticale MN' et les horizontales Mm, Nn, on formera le triangle MNN' semblable au triangle QOG ; en sorte qu'on aura la proportion

$$QO : OG :: MN' : MN,$$

et, par suite,

$$QO = \frac{OG \times MN'}{MN}.$$

Remarquons que QO est la tension t due au poids de l'élément MN, que OG représente son poids ou $p \times MN$, et que $MN' = mn$. D'où l'on tire

$$t = \frac{p \times MN \times mn}{MN} = p \times mn.$$

Ce dernier produit est le poids d'un morceau de corde égal à mn, ou dont la longueur est celle de la projection verticale de MN. Or, le total de la partie AF se compose d'une somme d'éléments tels que MN et qui produisent chacun une tension égale au poids de sa projection, et la somme de ces tensions, ou la tension totale qui entraîne AF de haut en bas, sera égale à la somme des poids des pro-

jections verticales de tous ces éléments, c'est-à-dire au poids de la projection verticale *af* de cette partie *AF*. Par conséquent, la tension ou la force nécessaire pour empêcher une portion de corde de glisser sur une surface est mesurée par le poids d'un autre morceau dont la longueur est la même que la projection verticale de cette portion. On démontrerait de même que la tension de la partie *AP* qui tend à entraîner la corde en sens contraire à celui de la tension *AF* est égale à *qp* ; de sorte que la corde sera entraînée avec une force mesurée par *pf* ou par le poids d'une longueur égale à la différence de niveau entre ses extrémités, et cette tension résultante agira du côté de l'extrémité la plus basse.

Si les deux extrémités d'une même corde sont à même hauteur, ou si la corde est *sans fin* (fig. 163), la tension qu'elle éprouve de la part de son poids est nulle, et il n'y a pas lieu d'en tenir compte.

111. *Centre de gravité d'un arc de cercle.* — Nous pouvons encore trouver par le même principe le centre de gravité d'un arc de cercle. Car ce qui précède est indépendant de la flexibilité de la corde ou de la chaîne, et subsiste encore lorsque celle-ci est rigide, comme, par exemple, une jante de roue. Soit donc *MAN* (fig. 164) un arc de cercle composé d'une jante inflexible, et disposé de manière que le rayon *AO* qui passe par son milieu *A* soit horizontal. Appelons *F* l'effort tangentiel appliqué en *M* pour empêcher la jante *MAN* de tourner sur son propre cercle autour de *O*. La condition d'équilibre entre cette force *F* et le poids *P* de la jante exige que leurs moments soient égaux. Or, le bras de levier de ce dernier est la distance *GO* du centre de gravité de l'arc au centre de rotation, distance que je désigne par *x*. On aura donc

$$F \times R = P \times x.$$

Remarquons que *P* est le poids de la longueur *S* de l'arc *MAN*, et que la force *F* est celui de la projection verticale de cet arc, ou de sa corde *MN* que nous nommerons *C*. On pourra donc remplacer *P* et *F* par *S* et *C* dans l'équation d'équilibre ; ce qui donne

$$C \times R = S \times x,$$

ou la proportion

$$S : C :: R : x,$$

qui nous apprend que *le centre de gravité d'un arc de cercle est situé sur le rayon qui le partage en deux parties égales, et que sa distance au centre est une quatrième proportionnelle aux longueurs de l'arc, de sa corde et de son rayon.*

112. *Frottement d'une corde qui glisse sur un rouleau fixe.* — Considérons encore une corde qui glisse sur un rouleau fixe (fig. 165) et qui supporte un poids P à une de ses extrémités a, tandis que l'autre est tirée par une force T qui l'entraîne. Cette dernière doit non-seulement soulever le poids P, mais encore vaincre le frottement que produit la corde en glissant sur tout l'arc du rouleau enveloppé par elle ; de sorte que si cette surface était parfaitement polie, le frottement serait nul et T serait égal à P dans le cas de l'équilibre. Partageons l'arc enveloppé at_4 en un nombre de parties très-petites et égales ; et menons par les points de division des tangentes qui se coupent deux à deux et parmi lesquelles les directions des forces extrêmes P et T sont évidemment comprises. J'ai dit que les divisions devaient être très-peu espacées, afin que les arcs de cercle qui les embrassent puissent se confondre sensiblement avec les cordes at_1, t_1t_2, t_2t_3, ... qui les sous-tendent. La tension de la corde sur la tangente ab est évidemment égale à P. Soit t_1 la tension qui agit en t_1 sur la deuxième tangente bb'. Elle doit vaincre à la fois et le poids P et le frottement qui a lieu sur l'arc élémentaire at_1 compris entre les points de contact. Appelons p la pression exercée sur cet élément, f le coefficient relatif au frottement de la corde sur le rouleau qui, comme nous l'avons dit, ne tourne pas, $f \cdot p$ sera ce frottement, et l'on aura

$$t_1 = P + f \cdot p.$$

Pour trouver p, nous ferons abstraction du poids de la corde, et nous observerons que les deux tangentes ab et bt sont égales. De plus, si l'on construit le losange abt_1m, et si l'on considère le côté ab comme proportionnel à la force P, cette même force sera encore la tension qui a lieu de b en t_1. La diagonale bm du losange étant perpendiculaire à la corde at_1 et la partageant en deux parties égales, on voit qu'elle sera égale à la pression p exercée par la tension de la courbe sur l'élément at_1. Les deux triangles mab et t_1oa sont isocèles ; les angles de leurs sommets respectifs a et o sont égaux, parce qu'ils sont suppléments du même angle abt_1. Ainsi ces trian-

gles sont semblables et donnent la proportion

$$mb : at_1 :: ab : oa.$$

mb est la pression p; at_1 corde de l'arc compris entre a et t_1 équivaut à ce même arc que nous appellerons s; ab équivaut à P; enfin, oa est le rayon R du rouleau. Donc la proportion revient à cette autre,

$$p : s :: P : R; \quad \text{d'où} \quad p = \frac{s}{R} \times P.$$

Donc enfin on a $t_1 = P + fp$,

ou $$t_1 = P + f \times \frac{s}{R} P = P\left(1 + \frac{fs}{R}\right).$$

Appelons t_2 la tension qui agit sur la troisième tangente $b''t_2$ et au troisième point t_2 de division de l'arc total à partir de a; on reconnaîtra que cette tension aura à vaincre la tension t_1 sur $b't_1$ et le frottement produit sur l'arc élémentaire t_2t_1, égal à s ou à l'arc at_1. En un mot, t_2 sera dans les mêmes circonstances par rapport à t_1, que t_1 par rapport à P. Donc on aura

$$t_2 = t_1\left(1 + \frac{fs}{R}\right).$$

Si on appelle t_3, t_4 les tensions qui ont lieu sur les autres tangentes consécutives, et aux points t_3 et t_4, et si l'on observe que la dernière tension t_4 est égale à la force T, on aura

$$t_3 = t_2\left(1 + \frac{fs}{R}\right),$$

$$t_4 \text{ ou } T = t_3\left(1 + \frac{fs}{R}\right) = t_2\left(1 + \frac{fs}{R}\right)^2 = t_1\left(1 + \frac{fs}{R}\right)^3$$

$$= P\left(1 + \frac{fs}{R}\right)^4.$$

L'arc du rouleau, au lieu de contenir quatre petits arcs élémen-

taires, aurait pu en contenir 5, 6, ... ou n ; et l'on aurait eu

$$T = P\left(1 + \frac{fs}{R}\right)^5,\quad T = P\left(1 + \frac{fs}{R}\right)^6,$$

et $$T = P\left(1 + \frac{fs}{R}\right)^n \text{ (*)};$$

d'où $$\frac{T}{P} = \left(1 + \frac{fs}{R}\right)^n.$$

On voit que le rapport de la puissance T à la résistance P croît très-rapidement à mesure que l'arc enveloppé est plus grand ou contient plus d'arcs élémentaires s ; car, pour obtenir ce rapport, il faut multiplier la quantité $1 + \frac{fs}{R}$ toujours plus grande que l'unité 2, 3, 4, 5, ... $(n-1)$ fois par elle-même, selon que l'arc enveloppé contient 4, 5, 6, ... n de ces parties. Supposons, par exemple, qu'une corde soit enroulée trois fois autour d'un rouleau, ou d'un pieu cylindrique de 1 décimètre de rayon. L'arc enveloppé sera égal à 3 circonférences ou à

$3 \cdot 2\pi \cdot R = 3 \times 2 \cdot \frac{22}{7} \times 1^{dm} = 18^{dm},8 = 19^{dm}$ environ.

Le coefficient du frottement d'une corde sur du bois ou sur toute

---

(*) On peut ramener cette formule à sa valeur comme sous la forme d'exponentielle, ainsi qu'il suit : développant le binôme on a

$$T = P\left(1 + \frac{nsf}{R} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{s^2f^2}{R^2} + \frac{n.(n-1)(n-2)}{2.3}\frac{s^3.f^3}{R^3} + \ldots\ldots\right).$$

Si on remarque que le nombre n est très-grand quand l'arc s élémentaire est très-petit, on pourra négliger toute puissance de n devant celle qui lui est immédiatement supérieure; on réduira alors la valeur de T à cette autre :

$$T = P\left(1 + \frac{nsf}{R} + \frac{n^2s^2f^2}{2R^2} + \frac{n^3s^3f^3}{2.3R^3} + \ldots\ldots\right).$$

Or, ns est l'arc entier S enveloppé par la corde ; d'où

$$T = P\left(1 + \frac{fS}{R} + \frac{f^2S^2}{2.R^2} + \frac{f^3S^3}{2.3R^3} + \ldots\ldots\right) = Pe^{\frac{fS}{R}} \ldots\ldots$$

e est égal à 2,71825 ; c'est la base du système des *Logarithmes Népériens*.

autre substance étant environ $\frac{1}{3}$, on a

$$1 + \frac{fs}{R} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{s}{R} = \frac{4}{3},$$

en prenant ici l'arc élémentaire égal au rayon. D'où

$$n = \frac{19^{dm}}{1^{dm}} = 19,$$

et, par suite,

$$\frac{T}{P} = \left(\frac{4}{3}\right)^{19} = 236.$$

Par conséquent, la force capable de faire glisser la corde autour du pieu devrait être 236 fois plus grande que celle qui l'y retient. Réciproquement, si un très-grand effort agit sur l'extrémité d'une corde enroulée autour d'un rouleau cylindrique semblable au précédent, il suffira d'une force 236 fois moins grande à l'autre extrémité, pour s'opposer à l'effet de ce même effort.

Ce principe explique pourquoi en général l'amarre qui retient un vaisseau ne glisse pas quand elle est enroulée un certain nombre de fois autour d'un pieu cylindrique ; il en est de même des effets du cabestan, de la chèvre et en général de toutes les manœuvres de force.

Les tonneliers ont aussi recours à ce principe, pour faire descendre les tonneaux de vin dans les caves. Chaque tonneau repose sur un traîneau qui glisse sur l'escalier de la cave, et il est embrassé par une corde dont les deux bouts, après s'être enroulés un certain nombre de fois autour de deux cylindres debout appuyés à l'extérieur de la porte de la cave, sont retenus par deux hommes. L'effort que ces deux hommes opposent à la descente du tonneau est d'autant plus faible que le nombre des enroulements autour du cylindre est plus considérable ; et comme d'ailleurs cet effort est ici la résistance à un travail dans lequel le poids du tonneau est la puissance, on voit que les hommes avec un effort très-minime peuvent empêcher que cette descente ne soit trop rapide. Le calcul de cette résistance est même facile à faire, quand on connaît le poids du tonneau et en ayant recours à la théorie du plan incliné et du frottement des cordes contre un rouleau fixe.

113. *Équilibre. Théorie du coin.* — Toutes les applications présentées jusqu'ici n'ont été relatives qu'aux corps posés sur une surface; et cependant un corps peut poser à la fois sur deux ou trois surfaces. Tel est, par exemple, le coin ou prisme triangulaire dont les trois faces sont perpendiculaires au triangle ABC (fig. 166). L'arête C qui correspond à l'angle le plus aigu du triangle se nomme le tranchant du coin; la face opposée BA en est la tête, et les faces BC, BA les côtés. L'usage du coin réduit à sa plus grande simplicité, consiste à enfoncer cette machine par son tranchant C dans la substance que l'on veut diviser ou fendre, de manière que lors d'un enfoncement quelconque, le coin repose ou s'appuie par ses côtés en deux points a et b (fig. 167) de la substance. Nous supposerons que la puissance F qui le fait descendre soit perpendiculaire à la tête, parce que si elle était oblique, elle tendrait à faire tourner le coin sur lui-même, et donnerait lieu à des complications inutiles à considérer en ce sens et que la puissance agit toujours de la première manière dans la pratique. Cette force F, perpendiculaire à la tête AB, a d'ailleurs pour but de vaincre les résistances que la matière oppose au mouvement du coin contre ses côtés, et nous avons vu (2e partie, 98) que ces résistances devaient être respectivement perpendiculaires aux surfaces sur lesquelles elles ont lieu, et passer par les points de contact de ces surfaces. Ainsi, les résistances de la matière contre le coin seront deux forces Q et R appliquées en a et b et perpendiculaires aux côtés AC et BC du coin. La force F, qui leur fait équilibre, sera égale et directement opposée à leur résultante; et comme celle-ci doit passer par le point de concours des forces Q et R, il faudra nécessairement que les trois forces F, Q et R se coupent en un même point; autrement le coin prendrait un mouvement qui tendrait à le renverser et qui serait ainsi étranger à l'objet qu'on se propose. Donc, enfin, si ces résistances sont données, la diagonale du parallélogramme construit sur leurs intensités et à leur point de concours donnera l'intensité de la force F à appliquer perpendiculairement à la tête du coin, pour que celui-ci vainque ces résistances. Or, remarquons qu'en prenant sur la direction de Q, à partir de O, une ligne Om égale à cette force, et en menant par le point m une perpendiculaire à BC égale à mn ou à l'intensité de R, on obtiendra un triangle Omn, dont deux côtés représenteront les deux résistances Q et R, et dont le troisième On représentera leur résultante ou la puissance F qui

lui est égale et directement opposée. Le triangle Omn est semblable au triangle ABC : car leurs côtés étant respectivement perpendiculaires, l'angle Omn est égal à l'angle C; l'angle mnO est égal à l'angle B; enfin, l'angle mOn est égal à l'angle A. Ainsi, les côtés On et AB opposés à ces angles sont homologues; il en est de même des côtés mO et AC, et des côtés mn et BC. On aura donc la proportion

$$On \,:\, mO \,:\, mn \,::\, AB \,:\, AC \,:\, BC,$$

ou, en remplaçant les grandeurs On, mO et mn par les forces F, Q et R qu'elles représentent,

$$F \,:\, Q \,:\, R \,::\, AB \,:\, AC \,:\, BC;$$

ce qui indique que dans l'équilibre du coin, la puissance perpendiculaire à la tête, et les deux résistances perpendiculaires aux côtés sont proportionnelles à cette tête et à ces côtés.

Plusieurs cas particuliers se présentent selon la forme du coin. Ainsi, par exemple, si sa forme est celle d'un triangle ABC (fig. 168) rectangle en A, et que les points d'appui a et b des résistances Q et R sur les côtés soient sur une même droite ab parallèle à la tête, il est impossible que la puissance F, perpendiculaire à cette dernière, concoure au point commun des directions de ces résistances, à moins qu'elle ne soit appliquée selon la direction Fb parallèle au côté AC, et passant par le point d'application de la résistance qui est perpendiculaire à l'hypoténuse. Dans le cas où le coin est un triangle isocèle (fig. 169), ce qui a presque toujours lieu dans la pratique, on a $AC = BC$; et comme, d'après ce qui précède, les relations qui satisfont à l'équilibre sont

$$Q = \frac{F \times AC}{AB} \quad \text{et} \quad R = \frac{F \times BC}{AB},$$

on voit qu'à cause de $AC = BC$, on a $Q = R$. D'où l'on tire la proportion

$$F \,:\, Q \,::\, AB \,:\, AC.$$

Ordinairement quand on veut séparer des corps, on se sert de coins dont la tête est fort petite par rapport à leurs côtés; si elle est dix fois moindre, ou que AB soit le dixième de AC, F est le dixième de la réaction Q à vaincre. Ainsi, l'avantage des coins serait tel qu'en

diminuant leur tête, ou l'angle de leur tranchant, on pourrait avec des efforts ordinaires vaincre des résistances considérables, ou dix fois, cent fois plus grandes, selon que la tête est le dixième ou le centième du côté.

114. *Influence du frottement sur les effets du coin.* — On reconnaît déjà, d'après ce qui vient d'être dit, combien les coins sont utiles dans les arts. Mais ce serait prendre une idée bien inexacte des effets du coin, si, comme précédemment, on les considérait indépendamment des frottements occasionnés sur les côtés. Les frottements sont, en effet, proportionnels aux pressions Q et R, et si ces dernières, par suite de la dimension de la tête, deviennent énormes par rapport à la puissance F destinée à les surmonter, il doit en être de même à l'égard des frottements qui sont toujours contraires à l'action de la puissance. Celle-ci devra donc faire équilibre à la résultante des résistances Q et R et à la résultante des frottements qui seront $f \,.\, Q$ et $f \,.\, R$ (f étant le rapport du frottement à la pression pour les substances du coin et de la matière qu'il divise), et qui, agissant le long des côtés AC et BC, pourront être regardés comme appliqués au sommet C. Bornons-nous au cas du coin isocèle; on aura

$$Q = R, \quad f \,.\, Q = f \,.\, R.$$

Si, de plus, les points d'appui a et b des résistances Q et R sont sur une parallèle à la tête AB, on voit sans peine que la résultante de ces résistances est située sur la droite CD (fig. 170) qui passe par le sommet C et par le milieu D de la tête; que si On est l'intensité de cette résultante et que Om et mn soient les intensités ainsi que les directions des deux résistances égales Q et R, le triangle Omn semblable à ABC donne

$$On = \frac{Q \times AB}{AC}.$$

Prenons en outre sur les prolongements de AC et BC deux portions $b'C$, et $a'C$, proportionnelles à fQ : la diagonale Cc' du losange $Cba'c'$ donnera l'intensité de la résultante due aux deux frottements qui ont lieu sur les deux côtés du coin; on a d'ailleurs $Cc' = 2CI$. Enfin, cette dernière résultante des frottements est évidemment située sur la ligne CD aussi bien que celle des deux résistances Q, et,

par conséquent, elle s'ajoute à cette dernière pour contrarier le mouvement que doit produire la puissance F. On aura donc pour l'équilibre

$$F = On + 2CI.$$

Mais l'autre diagonale $b'a'$ du losange $b'Ca'c'$ est perpendiculaire à Cc' et le triangle $a'CI$ semblable à ACD donne la proportion

$$a'C \text{ ou } f.Q : AC :: CI : CD,$$

d'où

$$CI = f.Q \times \frac{CD}{AC}.$$

Substituant à On et CI leurs valeurs trouvées au moyen de Q et fQ dans la valeur de F, on a

$$F = Q \cdot \frac{AB}{AC} + 2fQ \cdot \frac{CD}{AC}.$$

Veut-on juger quelle est l'influence de l'augmentation que le frottement apporte à la puissance? considérons la circonstance où ce frottement est le moindre possible, c'est-à-dire celle où son rapport f à la pression est un dixième ; et cela arrivera lorsque le coin est en cuivre bien graissé avec du suif et pénétrant un morceau de fer ; imaginons que la forme du coin soit telle que sa tête ait une longueur dix fois moindre que son côté ou que $AB = \frac{1}{10} AC$. Il est évident que la perpendiculaire CD diffère très-peu de AC, et que $\frac{CD}{AC}$ sera sensiblement l'unité; enfin, supposons la résistance $Q = 1000^k$. Nous aurons, après ces diverses substitutions,

$$F = \left(1000^k \times \frac{1}{10}\right) + 2\left(\frac{1}{10} \times 1000 \times 1\right) = 300^k.$$

Or, en ne tenant pas compte du frottement, on aurait simplement

$$F = Q \times \frac{AB}{AC} = 100^k.$$

Ainsi, la puissance en ayant égard au frottement dans le coin est triple de ce qu'elle serait si le frottement n'existait pas.

115. *Forme nécessaire au coin.* — Un cas très-remarquable est celui où, après avoir été enfoncé dans une substance, du bois, par

exemple, le coin se relève naturellement. A cet effet, il faut faire attention que les deux parties de la substance séparées par le coin tendent à se rapprocher et produisent contre les appuis a et b des côtés (fig. 171) deux résistances égales à Q dans le cas du coin isocèle, et dont la résultante pousse le coin de bas en haut. Cette résultante, comme nous l'avons vu, est égale à $Q \times \frac{AB}{AC}$. Toutefois les deux frottements Q, fQ qui naissent sur l'un et l'autre côté s'opposeront à ce mouvement, parce que le frottement est toujours contraire, dans quelque direction que le mouvement tend à s'opérer. Or, nous savons que leur résultante est $2f \,.\, Q \times \frac{CD}{AC}$ et que de plus elle agit dans la direction de CD, comme la résultante des résistances Q. Donc le coin s'échapperait au dehors de la tête AB, s'il n'y avait pas frottement, ou bien encore si la résultante des résistances $Q \times \frac{AB}{AC}$ était plus grande que $2f \,.\, Q \times \frac{CD}{AC}$. Si l'on pose l'égalité $Q \times \frac{AB}{AC} = 2fQ \times \frac{CD}{AC}$ et que l'on supprime le facteur commun $\frac{Q}{AC}$, on aura

$$AB = 2f \,.\, CD.$$

Donc, quand AB sera plus grand que $2f \,.\, CD$, le coin, au lieu de s'enfoncer, sera poussé au dehors du corps. Supposons $f = \frac{1}{10}$: on trouvera que AB ou la tête du coin devra être moindre que $2 \,.\, \frac{1}{10} \times CD$, ou que $\frac{1}{5} CD$, pour que ce coin puisse pénétrer dans le corps. Ce résultat donne encore le moyen de mesurer le frottement : car si pour une certaine ouverture de l'angle du coin, ce dernier ne se relève ni ne s'enfonce, quand on l'insère dans la substance, pour laquelle ce frottement est recherché, ce sera une preuve que le rapport f du frottement à la pression est le même que le rapport $\frac{AB}{2CD}$.

116. *Presse à coin.* — La presse à coin, réduite à son état le plus simple, consiste dans un coin tronqué $ABFE$ (fig. 172), qui glisse

d'où $$F = \frac{1000}{20} + \frac{1000}{5} = 50^k + 200^k = 250^k;$$

puissance qui est fort petite comparativement à la résistance 1000^k. Ainsi, l'avantage de la presse à coin est que son travail peut s'exécuter avec une faible puissance. Toutefois cette machine est défectueuse à cause de la grande quantité de travail que les frottements absorbent à eux seuls.

Il y a deux espèces de dispositifs pour une presse à coin. Le premier est un grand bassin *ABCD* (fig. 173) dans lequel on établit la matière *H* à presser contre une de ses parois *CD*, et qui reçoit un ou plusieurs coins a, a', a'', que l'on enfonce de force entre des blocs $b, b', b'', \ldots$ terminés par des plans inclinés comme ceux des coins que l'on enfonce. Le second consiste dans un châssis (fig. 174) placé debout et composé d'une semelle, d'un chapeau, et de montants fortement consolidés par des liens de fer boulonnés. Ce chapeau est rempli de coins alternatifs, tels qu'on les voit dans la figure 174 et qui serrent le corps que l'on veut comprimer contre un plateau supérieur. Il convient dans ces divers systèmes que les extrémités des coins soient extrêmement solides, ou qu'ils soient susceptibles de la moindre déformation possible. On voit d'ailleurs que le placement et le déplacement de ces coins exigent une perte considérable de temps.

117. *Effet du choc dans l'emploi du coin.* — Presque toujours l'enfoncement des coins s'opère par le choc : en indiquant les diverses actions qui se développent alors, nous montrerons que ce mode est une source de nouvelles pertes de travail. Quand un marteau vient frapper la tête du coin, il y a deux époques distinctes d'action : l'une qui correspond à la durée du choc, c'est-à-dire à l'intervalle compris entre l'instant où le marteau frappe et l'instant où la compression mutuelle du marteau et du coin est la plus grande ; l'autre qui vient ensuite et pendant laquelle le corps ou matière à presser donne par sa réaction naissance à une résistance analogue à la force que nous avons précédemment désignée par *P* et à des frottements dus aux pressions *Q* et *R* que cette résistance produit sur les côtés du coin. De plus, l'inertie du coin qui est mis en jeu par le choc, agit d'abord comme résistance pendant la durée du choc ; puis elle devient puissance contre la véritable résistance *P* à vaincre.

Qu'arrive-t-il pendant la première époque? c'est que le choc développe à chaque instant, entre le marteau et le coin, des pressions variables et mesurables en poids; ces pressions sont d'autant plus considérables que la durée du choc pendant laquelle elles ont lieu est plus courte. Or, la résistance de l'inertie qui augmente avec ces pressions motrices leur fait continuellement équilibre, ainsi que les frottements produits par cette inertie contre les côtés du coin; d'où il suit que le travail de ces frottements pendant la durée du choc est perdu pour l'inertie, quand celle-ci devient une puissance contre la résistance P. Ce n'est pas tout. Une partie du travail des pressions motrices a été consommée par la déformation du coin, qui ne peut manquer de s'opérer par suite de leur grande intensité. Quant à l'action que conserve l'inertie du coin, après le choc, on reconnaîtra sans peine, comme dans le cas précédent (2e partie, 116), que son travail ou la moitié de la force vive du coin sera égal au travail de P augmenté du travail des frottements dus à cette dernière résistance. D'où l'on voit qu'en partant immédiatement du travail du marteau ou de la moitié de sa force vive, une grande partie de ce travail est consommée inutilement par la déformation du coin et par les frottements que la résistance de l'inertie occasionne pendant la durée du choc et que ces pertes n'auraient pas lieu si le coin était simplement soumis à des pressions ordinaires.

S'il s'agit de la presse à coin dont le détail a été donné (2e partie, 116), on fera attention que, par suite du choc de la masse m (fig. 175) contre le coin mobile ABC, ce dernier doit glisser le long de la face ab du coin fixe, et que tous les points du coin ABC sont animés d'un mouvement de transport parallèle au côté AC. Par conséquent, les résistances opposées à chaque petit instant par l'inertie des diverses parties du coin ABC, seront autant de forces dont la résultante, c'est-à-dire l'inertie totale du coin, passera par le centre de gravité G et sera égale à $M \times \frac{v}{t}$; M étant la masse du coin, et v le petit degré de vitesse imprimé dans le petit temps t. Connaissant la direction de cette force, on pourra exprimer sa pression sur le côté BC et par suite le frottement qu'elle doit faire naître. Enfin, en formant les produits de l'inertie et du frottement par les petits chemins respectifs de leurs points d'application et en égalant leur somme à la quantité de travail de la force de percussion du marteau diminuée de celle que consomme la déformation

du coin, on aura tout ce qu'il faut pour conclure la force d'inertie regardée comme puissance à l'égard de la réaction du corps *H* que l'on veut comprimer.

118. ***Formes diverses du coin et son application aux outils.*** — Malgré le désavantage du coin sous le rapport des consommations inutiles de travail qu'il occasionne, cette machine est universellement en usage. La forme prismatique n'est pourtant pas toujours celle qu'on lui donne. Lorsque le coin est une pyramide à trois ou quatre faces (fig. 176), les considérations relatives à l'équilibre entre la puissance et la résistance sont analogues à celles du prisme. La première est égale et opposée à la résultante de trois ou quatre forces qui dépendent des longueurs de chaque face et de la grandeur des côtés qui forment la tête. Le coin consiste encore dans un prisme tronqué. Souvent enfin, ce n'est autre chose qu'un cône surmonté d'une tête cylindrique ; mais la condition de son équilibre rentre dans celle du coin isocèle, c'est-à-dire que la puissance est à la résistance dans le rapport du diamètre de la tête à la longueur du côté du cône.

Exemples d'outils. — Presque tous les outils des arts se rapportent au coin : tels sont les divers ciseaux, les couteaux, les clous, les limes, etc. — Les limes sont des prismes méplats dont les surfaces sont striées d'entailles faites au ciseau. Ces entailles pratiquées sous un certain angle sont recroisées par d'autres faites sous un angle différent, de manière à former de petites pyramides, ou un grand nombre de coins dont les pointes ou tranchants arrachent la matière. — Les scies (fig. 177) sont un assemblage de coins, dont la face inférieure est légèrement inclinée en se dirigeant vers le tranchant *b*. Ce dernier dans le sens de l'épaisseur de la lame s'incline alternativement d'une dent à l'autre, tantôt à gauche et tantôt à droite. Enfin, ces dents sont dévoyées de part et d'autre du plan de la lame, de manière à former ce qu'on nomme la voie, afin que l'ouverture faite dans le bois soit plus large que l'épaisseur de la scie, et que celle-ci puisse jouer plus librement.

Tous les coins, quels qu'ils soient, sont toujours destinés à agir par leur tranchant ou par leurs extrémités pointues. Il y a donc pour chaque outil un angle convenable selon lequel il convient de le terminer. Trop aigu il pourrait se rompre ; il ne saurait s'enfoncer au contraire s'il était trop obtus. Pour avoir la limite des incli-

naisons des faces qui aboutissent au tranchant de chaque outil, il faudrait étudier parmi les outils destinés au même usage celui qui marche le mieux ; cette étude est du plus haut intérêt pour l'ouvrier. Quoi qu'il en soit, on voit qu'il y a une relation nécessaire entre l'angle du coin, et la résistance des matières à diviser. Si cette matière est très-dure, comme du fer percé à froid, l'angle du biseau (fig. 178) sera de 90° ; les emporte-pièces, les burins sont de ce genre. Pour des matières moins dures, l'angle n'a pas besoin d'être aussi ouvert. Les ciseaux des varlopes, par exemple, sont terminés par des angles réduits à 30°. Remarquez que ces ciseaux taillent le bois dans la longueur de ses fibres, et que ces dernières offrent une résistance beaucoup plus forte perpendiculairement à leur longueur, aussi donne-t-on un angle plus obtus à la besaguë, laquelle est destinée à travailler le bois dans un sens perpendiculaire à ses fibres. Cet angle devient au contraire extrêmement aigu pour l'instrument avec lequel on coupe les substances molles, telles que les viandes et le pain. Il en est de même à l'égard des rasoirs, parce que les poils, quoique durs, ne sont pas, à cause de leur isolement sur la peau, susceptibles d'une grande résistance.

En général, tous les outils donnent lieu à des frottements qui consomment, ainsi que nous l'avons vu, une quantité énorme de travail comparativement à celle qui est utilisée. Mais si elle augmente à mesure que l'angle du coin devient plus aigu, elle diminue aussi avec le rapport du frottement à la pression, et l'on sait que ce rapport est moindre selon que les surfaces sont plus polies ou plus onctueuses. C'est ce qui démontre la nécessité de donner du poli aux outils, et de frotter fréquemment leurs tranchants avec des matières grasses ; et parmi ces dernières on devra préférer le suif au vieux oing. Enfin, comme on agit par le choc, il faut que l'outil soit résistant et de bonne qualité.

L'inclinaison sous laquelle on présente l'outil à la matière n'est pas non plus indifférente. Soit un ciseau *ABCD* (fig. 179) terminé par le plan incliné *CD* et chassé perpendiculairement à la surface *LM* de la matière par une force *F*. Si le tranchant *C* se trouve à l'extrémité de la face *AC* parallèle à la force *F*, il est évident que la résistance *Q* contre cette face est bien moindre que la résistance *R* exercée contre la face inclinée *CD* : car, d'après ce qui précède, l'une est proportionnelle à *aC*, tandis que l'autre est proportionnelle à *CD*. Il résulte de là que le ciseau tendra à marcher

vers la gauche plutôt que vers la droite, et qu'après un petit enfoncement *aC* il cessera de s'avancer. Mais alors l'ouvrier ne manque pas de retourner l'instrument, la face *CD* en avant, et la face *AC* en arrière ; puis il enlève la partie *aCD*, en inclinant légèrement et en faisant mordre le tranchant de façon que la nouvelle face inférieure éprouve à son tour une résistance moindre. Ces deux opérations seront continuées alternativement jusqu'au fond du trou ou de la mortaise que l'on veut pratiquer en *LM*.

Dans le rabot, le ciseau est couché, et le fer tendrait à s'enfoncer de plus en plus, si l'instrument appuyé sur la surface du bois qu'on veut aplanir ne s'y opposait (fig. 180), et si d'ailleurs la face *cd* par sa grande résistance ne tendait à relever l'instrument. Aussi le fer a-t-il deux positions distinctes, selon qu'on veut enlever de minces copeaux, ou faire des rainures dans le bois. Pour le premier objet, le tranchant *C* est en avant, et la face *cd* couchée en arrière. Dans le second cas, l'outil est retourné et la face *cd* occupe une position antérieure et verticale. Ces exemples démontrent donc bien le rôle que joue l'inclinaison des faces dans l'effet des outils.

XI.

PIÈCES QUI TOURNENT OU ROULENT LES UNES SUR LES AUTRES.

119. *Idée du frottement produit par le mouvement des pièces qui tournent sur elles-mêmes.* — Les pièces de rotation, telles que les roues, et qui tournent sur d'autres pièces, occasionnent dans leur mouvement des frottements auxquels on doit avoir égard dans le calcul des machines, et dont la nature est différente selon que ces roues portent sur leurs appuis par des tourillons ou par des pivots. On nomme tourillons des cylindres *aa* (fig. 181) dont le diamètre est le plus petit possible et qui sont fixés perpendiculairement au plan de la roue, dans le prolongement de l'axe de cette dernière, et aux extrémités de l'arbre de couche. Ce dernier consiste d'ailleurs dans un cylindre *AB* beaucoup plus gros que les tourillons et qui traverse la roue à son milieu et dans le sens de l'axe de son mouvement. Ces tourillons *a* reposent dans une boîte *CmD*

(fig. 182) de forme cylindrique concave, par une arête perpendiculaire à leur circonférence. — Le pivot a une forme analogue à celle du tourillon, si ce n'est qu'il appuie par le cercle qui termine sa tête, contre le fond d'une crapaudine *EFGHIK* (fig. 183). Si les directions des forces qui font tourner la roue dans ce dernier cas étaient telles que le cylindre du pivot fût en outre pressé latéralement par une arête, contre le cylindre de sa crapaudine, la résistance serait compliquée des deux frottements simples dont il s'agit; mais ordinairement on s'arrange de manière que la pression totale s'exerce dans la direction de l'axe du pivot. De ces deux frottements, l'un qui a lieu de la part d'un pivot contre le fond de sa crapaudine, est analogue à celui de deux surfaces glissant l'une contre l'autre, et son rapport à la pression s'obtient encore à l'aide des deux tableaux exposés au n° 106. Quant à celui du tourillon dans son palier, Coulomb a fait des expériences qui démontrent que ce frottement est de beaucoup inférieur au premier. Il n'y aura d'ailleurs plus à tenir compte de l'adhérence parce que dans le mouvement de rotation des pièces sur des paliers, les surfaces ne frottent que sur une arête ou sur une surface fort petite. Nous donnerons en son lieu le tableau de Coulomb, sur ce nouveau genre de frottement; mais il convient auparavant de parler de celui d'un pivot contre le fond de sa crapaudine.

120. *Frottement d'un pivot contre sa crapaudine.* — Il ne suffit pas de connaître le rapport du frottement à la pression dans le mouvement des pièces de rotation; il faut encore savoir comment ce frottement se comporte avec les autres forces qui le sollicitent, selon les deux dispositions que nous venons d'indiquer. Commençons par le cas d'un pivot qui tourne autour de son axe, et pressé contre sa crapaudine par une force N (fig. 184) que nous supposerons agissant dans la direction de cet axe. Mais si cette force N perpendiculaire à la surface pressée passe par le centre du cercle du pivot, il est permis de la regarder comme la résultante des pressions partielles qui ont lieu sur tous les éléments de la base, de sorte qu'elle est répartie proportionnellement dans tous les points de cette surface. Ainsi, désignant par a un petit élément et par A la surface totale, $\frac{aN}{A}$ sera évidemment la partie de la pressio

supporte cet élément; et $f \times \frac{aN}{A}$, le frottement qui s'exerce sur

cet élément, Non-seulement ce frottement sera censé appliqué au centre de cet élément, mais encore il agira dans une direction immédiatement contraire à celle du mouvement du pivot, c'est-à-dire perpendiculairement au rayon du cercle décrit par ce centre autour du centre du pivot.

Si donc on appelle r ce rayon, ou le bras de levier de ce frottement partiel, $f \times \frac{a \times N}{A} \times r$ ne sera autre chose que le moment du frottement qui est exercé sur l'élément a. Maintenant, si je considère tous les éléments du cercle ABD, tels que $mnqp$ qui sont groupés dans un même secteur ACB dont l'angle au centre est très-petit; il est visible que les frottements produits dans ce groupe d'éléments pourront être regardés comme perpendiculaires au rayon Co qui passe par tous leurs milieux, ou comme parallèles entre eux; et en vertu de leur parallélisme, leur résultante sera égale à leur somme, parallèle à leur direction commune, et appliquée au centre de gravité de la surface ACB, dont tous les points sont sollicités par ces forces parallèles. Ainsi, la résultante sera $f \cdot \frac{N \times ACB}{A}$; quant à son bras de levier, il sera $\frac{2}{3} R$ (R étant le rayon du cercle), attendu que le secteur ACB est un triangle dont le centre de gravité est aux deux tiers du rayon Co qui va du sommet C au milieu o de la base AB. Ainsi, l moment de cette résultante, ou la somme des moments de tous les petits éléments qui entrent dans la composition du secteur ACB sera égale à . . . . . $fN \times \frac{ACB}{A} \times \frac{2}{3} R$, ou à $f \cdot \frac{N}{A} \cdot \frac{2}{3} R \times ACB$. Si l'on en fait autant pour tous les autres secteurs, et que l'on prenne la somme des moments de tous les frottements qu'ils produisent, afin d'avoir le moment du frottement qui a lieu sur le cercle entier, on trouvera pour résultat le produit de la somme des surfaces de tous ces secteurs, multipliée par le facteur commun $\frac{fN}{A} \cdot \frac{2}{3} R$; mais comme la somme des surfaces des secteurs est précisément la surface entière A du cercle de base du pivot, on voit en définitive que le moment total du frottement sur cette base se réduit à . . . . . $f \cdot N \times \frac{2}{3} R$, formule qui nous apprend que l'on pourra supposer

le frottement total $f \cdot N$ comme concentré en un seul point situé sur les $\frac{2}{3}$ du rayon à partir du centre du cercle, et comme agissant avec ce bras de levier unique, que l'on nomme aussi *bras de levier moyen* du frottement.

Il se pourrait que l'extrémité d'un axe, au lieu de frotter par tout un cercle, ne frottât que par un anneau ou surface comprise entre deux cercles concentriques. C'est ce qui arrive lorsque l'arbre de couche d'une roue est pressé par une force N (fig. 185) dirigée dans le sens de son axe, contre ses épaulements *abcd*. Dans ce cas la surface A du frottement total est réduite à $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot R'^2$ (π étant le rapport de la circonférence au diamètre, et R, R' les rayons des cercles extérieur et intérieur de l'anneau). Le frottement sur le secteur élémentaire ACB sera $\frac{f \cdot N \times ACB}{A}$ ou . . . $\frac{f \cdot N \cdot ACB}{\pi (R^2 - R'^2)}$; il aura pour moment $\frac{f \cdot N \cdot ACB}{\pi (R^2 - R'^2)} \cdot \frac{2}{3} R$. De même, le moment du frottement sur le secteur intérieur $A'CB'$ aura pour expression $\frac{f \cdot N \cdot A'CB'}{\pi (R^2 - R'^2)} \times \frac{2}{3} R'$. La différence de ces deux moments donnera visiblement le moment du frottement qui a lieu sur la différence $AA'B'B$ de ces deux secteurs, et on aura

$$\frac{f \cdot N}{\pi (R^2 - R'^2)} \times \left(\frac{2}{3} R \cdot ACB - \frac{2}{3} R' \cdot A'CB' \right).$$

Maintenant, si on détermine de la même manière les moments des frottements qui ont lieu sur les autres éléments semblables à $AA'B'B$ de la surface comprise entre les deux cercles de rayon R et R', et qu'on en fasse la somme, cette somme donnera le moment du frottement total qui a lieu sur l'anneau. Or, il faut remarquer, 1° que cette somme renfermera le facteur commun $\frac{f \cdot N}{\pi (R^2 - R'^2)}$; 2° que le second facteur se composera de deux termes dont l'un sera le produit de $\frac{2}{3} R$ multiplié par la somme de tous les secteurs ACB qui forment la surface du cercle extérieur ou $\pi \cdot R^2$, et dont l'autre retranché sera le produit de $\frac{2}{3} R'$ multiplié par la somme de tous les

secteurs $A'CB'$ du cercle intérieur, ou par $\pi . R'^2$. On aura donc pour le moment total du frottement de l'anneau l'expression

$$\frac{f . N}{\pi (R^2 - R'^2)} \left(\frac{2}{3} R . \pi R^2 - \frac{2}{3} R' . \pi R'^2 \right);$$

ou cette autre, après toute réduction,

$$f . N \left(\frac{\frac{2}{3} R^3 - \frac{2}{3} R'^3}{R^2 - R'^2} \right).$$

Enfin, si on nomme l la largeur AA' ou BB' de l'anneau, r le rayon moyen de cet anneau ou la distance de son milieu au centre, le calcul apprend que $\frac{\frac{2}{3} R^3 - \frac{2}{3} R'^3}{R^2 - R'^2}$ revient à $r + \frac{12l^2}{r}$. Nous appellerons cette valeur r_1, et le moment total du frottement de l'anneau deviendra en définitive $f . N . r_1$. Mais, comme $f . N$ est lui-même le frottement total, on voit que r_1 ou $r + \frac{12l^2}{r}$ est encore ici le bras de levier moyen du frottement de l'anneau, supposé concentré à une distance r_1 de son centre.

Puisque le frottement total $f . N$ peut être regardé comme ayant son point d'application à une distance du centre égale à $\frac{2}{3} R$ ou à $r + \frac{l^2}{12r} = r_1$, selon que le pivot frotte sur un cercle entier ou sur un anneau, et d'ailleurs le petit chemin décrit par ce point d'application est censé situé dans la direction même de cette résistance, la quantité de travail élémentaire consommée par le frottement sera donc égale au produit de fN et de ce petit chemin décrit. Or ce dernier, en désignant par s_1 l'arc décrit à l'unité de distance pendant un très-petit temps, aura dans les mêmes circonstances, pour valeur $\frac{2}{3} R . s_1$, ou $r_1 s_1$. Donc, enfin, la quantité élémentaire de travail cherchée sera représentée ou par $\frac{2}{3} R . s_1 . f . N$, ou par $f . N \left(r + \frac{l^2}{12r} \right) s_1$. Plusieurs remarques doivent être

faites à cet égard; le coefficient f du frottement sera ici déduit des deux tableaux donnés au n° 106, parce que le pivot glisse contre sa crapaudine, et que ce mouvement est le même que celui de deux surfaces en contact.

La quantité de travail du frottement augmentant avec le rayon du cercle entier du pivot, ou avec le rayon moyen de l'anneau, il y a de l'avantage à diminuer autant que possible ces rayons; mais cette limite est elle-même relative à la solidité du pivot. Au reste, c'est dans ce but que l'on amincit quelquefois les pivots en forme conique (fig. 186). Souvent encore on termine leur extrémité inférieure par une surface convexe (fig. 187), ainsi que le fond de la crapaudine; il faut alors considérer seulement le petit cercle de contact qui a toujours une certaine étendue par suite de la compression et de l'user. Nous finissons ce paragraphe en rappelant que le moment du frottement se trouvera facilement quand cela sera utile, puisqu'on remplace cette résistance par une force unique égale au produit de la pression totale multipliée par un certain coefficient obtenu dans les tables, et que le bras de levier de cette force n'est autre chose que ce que nous avons calculé sous le nom de *bras de levier moyen* du frottement.

121. *Frottement d'un tourillon dans un palier ou boîte.* — Nous savons que le tourillon est un cylindre posé sur un autre par une arête; on a soin d'ailleurs de leur donner peu de jeu, c'est-à-dire une très-faible différence entre leurs rayons, afin d'éviter toute espèce d'emboîtement, lorsque la pièce qui s'appuie sur ce tourillon est mise en mouvement. Mais, comme le frottement qui en résulte a été reconnu par Coulomb bien inférieur à celui qui a lieu selon les circonstances prévues par les tableaux du n° 106, nous commencerons par présenter le troisième tableau, relatif aux pièces de rotation.

TROISIÈME TABLEAU. *Frottement des axes dans leurs boîtes.*

INDICATION DES AXES MIS EN EXPÉRIENCE.	RAPPORT DU FROTTEMENT A LA PRESSION.
Axe de fer dans une boîte en cuivre.	0,155
» » avec un enduit de suif.	0,085
» » avec un enduit de vieux oing.	0,12
» » les surfaces étant pénétrées par le suif et restant onctueuses.	0,127
» » avec un enduit d'huile.	0,13
» » avec un enduit qui n'avait pas été renouvelé depuis longtemps, quoique la machine eût servi continuellement.	0,133
Axe de chêne vert, dans une boîte de gaïac avec un enduit de suif.	0,038
» » l'enduit étant essuyé et les surfaces restant onctueuses.	0,06
» » après avoir servi longtemps, sans qu'on eût rafraîchi l'enduit	0,07
» » dans une boîte d'orme enduite de suif.	0,03
» » l'enduit étant essuyé, et les surfaces restant onctueuses.	0,05
Axe de buis dans une boîte de gaïac enduite de suif.	0,043
» » l'enduit étant essuyé et les surfaces restant onctueuses.	0,07
» » dans une boîte d'orme enduite de suif.	0,035
» » l'enduit étant essuyé, les surfaces restant onctueuses	0,06

Examinons maintenant le rôle que joue ce frottement au milieu des autres forces qui sollicitent la pièce de rotation. Lorsque celle-ci est au repos, il est évident que le tourillon *A* (fig. 188) de cette pièce occupe le point *o* le plus bas du cercle *poq* qui constitue le profil de sa boîte. Si la machine est ensuite mise en mouvement, le tourillon *A* tournera autour de son point d'appui contre ce palier; et il cheminerait même indéfiniment, sur la surface de ce dernier, si elle était de niveau. Mais comme il n'en est pas ainsi, le tourillon *A* montera sur le palier *poq*, tant que les efforts moteurs l'emporteront sur le frottement, puis il s'arrêtera en un point *m* dont l'inclinaison de la tangente sera telle que le frottement soit capable d'y retenir le tourillon. Ce dernier, posé ainsi par un point *m* sur la surface *poq*, ne saura s'y maintenir en équilibre, à moins que la résultante de toutes les forces qui agissent sur le tourillon, y compris le frottement (2e partie, 99), ne passe par le point d'appui *m*, et qu'elle ne soit perpendiculaire à la tangente. Or, le frottement s'exerce le long de cette tangente et est immédiatement appliquée au point *m*. Donc, la résultante *N* de toutes les autres forces devra aussi passer par ce point et selon une direction quelconque *mN*. La seconde condition que la résultante du frottement et de cette force *N* soit perpendiculaire à la tangente, revient à celle que la

composante de la première dans la direction de cette tangente soit immédiatement égale et contraire au frottement.

Prenons sur mN une partie md égale à l'unité, et formons sur md le rectangle $damb$. La composante de N perpendiculaire à la tangente sera (2e partie, 108) $N \cdot ma$, pression qui donnera lieu au frottement $f \cdot N \cdot ma$, f étant un des coefficients donnés par le troisième tableau. Enfin $N \cdot mb$ sera la composante de N le long de la tangente, et l'on aura

$$N \cdot mb = fN \cdot ma;$$

d'où

$$f = \frac{mb}{ma},$$

relation qui indique que le rapport du frottement à la pression sur le tourillon est immédiatement donné par l'inclinaison de l'angle de la pression N avec la tangente au cercle de ce tourillon menée par le point d'appui. On aura ainsi le moyen de trouver géométriquement ce point d'appui. Quant au frottement, il est $f \cdot ma \cdot N$. Remarquons que le triangle rectangle mad donne

$$1 = \overline{ma}^2 + \overline{mb}^2 = \overline{ma}^2 + f^2 \cdot \overline{ma}^2,$$

ou

$$1 = (1 + f^2)\,\overline{ma}^2;$$

d'où

$$ma = \frac{1}{\sqrt{1 + f^2}};$$

et, par suite,

$$f \cdot ma \cdot N = N \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

Telle sera donc l'expression du frottement autour du tourillon N; et pour l'avoir il ne suffira pas de multiplier la résultante des forces données par le coefficient f; il faudra encore diviser le produit $f \cdot N$ par $\sqrt{1 + f^2}$. Toutefois, on remarquera que lorsque f est moindre que $\frac{1}{3}$, $\sqrt{1 + f^2}$ ne diffère presque pas de l'unité; en sorte que le frottement est sensiblement $f \cdot N$ ou le même que si la résultante N était perpendiculaire au tourillon, quoiqu'en réalité elle ne le soit pas.

Lorsque le tourillon reste fixe et ne fait pas corps avec la roue, la roue tourne alors de manière que c'est son propre centre A

(fig. 189) qui demeure fixe. Le bras de levier de ce frottement est alors le rayon de l'œil de la roue, lequel est plus grand que le tourillon à cause du jeu, au lieu que quand le tourillon est mobile, comme dans le premier cas, c'est au contraire le rayon de celui-ci qui est le bras de levier du frottement. Donc, à égalité de rayon, il y a du désavantage à ne pas rendre le tourillon mobile.

L'expression du frottement $\frac{N \cdot f}{\sqrt{1+f^2}}$ étant indépendante de la longueur du tourillon, on voit qu'on ne gagne rien à l'allonger ou à le raccourcir; il n'y a que la résultante N qui puisse modifier l'intensité de cette résistance.—La quantité de travail consommée par ce genre de frottement est encore très-facile à mesurer; elle est égale au produit de la résistance, et du chemin décrit sur la circonférence du tourillon. Si l'on représente par r son rayon, et par s_1 l'arc décrit à l'unité de distance, on aura $r \times s_1$ pour l'arc développé sur le tourillon dans un temps quelconque, et $f \cdot N \times r \times s_1$ pour la quantité de travail absorbée par la résistance du frottement.

122. *Idée sur les dimensions des tourillons. Avantage des couteaux.* —La quantité de travail consommée étant représentée par . . . . $f \cdot N \cdot r \cdot s_1$, on observera que dans cette expression, les quantités f, N et s_1 ne sauraient être changées, attendu qu'elles dépendent des substances en contact, des forces appliquées, et du mouvement convenable à la machine. Il ne reste donc que r, ou le rayon du tourillon, dont on puisse disposer. Plus il est grand, plus la quantité de travail consommée est considérable. Si donc on veut le réduire, il faut construire le tourillon en substance très-dure, en acier, par exemple. On peut encore le diminuer, dans le cas où les forces appliquées sont d'une faible intensité. Dans toute autre circonstance, il n'y a pas moyen d'affaiblir les frottements des tourillons. Il arrive quelquefois que, pour empêcher l'arbre ou les tourillons de glisser dans le sens de leur longueur, on les interrompt par des espèces de renflements (fig. 190) qui circulent dans des logements plus profonds que ceux des tourillons. Ces renflements sont ordinairement des troncs de cône opposés par une base commune. On leur donne la forme d'un tronc de cône, afin de diminuer la portion de surface qu'ils présentent à la paroi qui leur sert pour ainsi dire de guide. Mais on commettrait une erreur grave, si l'on prétendait diminuer le frottement, en laissant rouler l'arbre sur l'arête

circulaire de ce renflement, sous prétexte que cette circonférence est, pour ainsi dire, une ligne mathématique.

Loin d'avoir rien gagné, on augmenterait au contraire la quantité de travail du frottement, parce que celle-ci ne dépend pas du plus ou moins de longueur du tourillon, et parce qu'elle croîtrait proportionnellement au rayon du cercle commun aux deux cônes de renflement dont il est question. Cette modification n'a d'ailleurs rien de commun avec les couteaux, dont l'emploi est fort avantageux. Il faut d'abord se rappeler que leur usage est borné au seul cas où une pièce de rotation (fig. 191) ne doit faire que de petites oscillations. Les couteaux sont alors des espèces de coins qui supportent l'axe, et dont les pointes sont arrondies en cercle fort petit. Le mouvement s'opérant autour du centre de ce petit cercle, et le frottement ne s'exerçant que sur l'arc de ce dernier, on voit comment, pour des efforts même considérables, la quantité de travail $fN \cdot r \times s_1$ est peu appréciable, attendu la petitesse du rayon r. C'est en terminant son axe de suspension par des couteaux, qu'une balance est rendue semblable.

123. ***Frottement dit de seconde espèce, ou produit par le roulement de deux surfaces.*** — Il est encore une dernière espèce de frottement qui résulte de deux surfaces qui roulent l'une sur l'autre. Mais ici, comme les parties de ces surfaces s'appliquent entre elles une à une, et qu'elles se détachent les unes des autres perpendiculairement à la direction du mouvement qui est celle de la tangente commune, il n'y a point, à proprement parler, de frottement dans ce mouvement, ou du moins il est assez faible pour être négligeable.

Quand un rouleau chemine en roulant sur un plan, les arcs des divers points de sa surface se développent sur celle du terrain ; et le frottement n'existe pour ainsi dire pas, surtout si ce rouleau est bien cylindrique et que la surface soit unie. En général, ce frottement, dit *de seconde espèce,* est d'autant moindre que le diamètre du cylindre mobile est plus petit. Une roue de deux pieds de diamètre qui roule sur un terrain, et qui est chargée d'un poids de 100 kilogr., donne lieu à une résistance qui ne dépasse pas le trentième de la pression, c'est-à-dire 3 kilogr. Toutefois, si le corps roule sur une surface raboteuse, telle que du sable, de la terre, etc., cette résistance devient sensible.

Le frottement de roulement présente, dans les voitures, des résis-

tances réelles, surtout quand le terrain est compressible, et que les roues s'y enfoncent; car ces voitures sont ensuite obligées de se relever sur un plan incliné, et elles exigent alors une nouvelle quantité de travail. Mais, en général, lorsque la surface sur laquelle un corps chemine en roulant, reste plane et la même sur une certaine étendue, on peut regarder le frottement de roulement ou de seconde espèce comme très-petit. Son peu de résistance explique l'emploi des rouleaux dans le transport des blocs de pierre, ou des plus lourds fardeaux (fig. 192). C'est, comme l'on sait, sur deux rouleaux qu'est portée la charge; et ces rouleaux cheminent eux-mêmes sur des madriers établis à la surface du terrain, afin qu'ils ne puissent pas s'y enfoncer. Un troisième rouleau, placé en avant des deux premiers, reçoit le bloc ou la charge au moment où le rouleau d'arrière est dégagé; celui-ci est remis en avant et destiné à recevoir la charge au moment où elle est poussée jusqu'à lui, etc. Telles sont les opérations à faire successivement. Le frottement du roulement consomme incomparablement moins de travail que si le bloc de pierre, ou fardeau, était traîné sur la surface même du terrain.

124. *Emploi du frottement de seconde espèce pour diminuer les autres frottements.*— Le frottement de seconde espèce, combiné, soit avec le frottement des surfaces qui glissent les unes sur les autres, soit avec le frottement des tourillons, peut diminuer ces frottements ainsi que leur quantité de travail. Représentons-nous, par exemple, une roulette et un axe qui lui est fixé et dont les tourillons peuvent tourner dans une crapaudine (fig. 193); supposons une charge P en équilibre sur cette roue, et placée sur une table AB, horizontale et tangente à la circonférence de la roulette. Si cette dernière ne pouvait tourner, il est évident que la puissance F, capable de faire glisser la charge P sur la surface de la roue, serait égale à $f \,.\, P$, c'est-à-dire au frottement de glissement qui résulterait de la charge P. Mais, si on rend aux tourillons la faculté de tourner sur leur palier, la charge P portera elle-même sur les tourillons, et ce sera sur ces derniers que le frottement $f \,.\, P$ sera produit. Appelant r leur rayon et s_1 le chemin décrit à l'unité de distance, $f \,.\, P \times r \,.\, s_1$ sera la quantité de travail de ce frottement, et elle devra être égale à celle de la puissance F capable de la vaincre. Or, le chemin parcouru par le point d'application de cette puissance

et dans sa direction sera égal au développement de l'arc de la circonférence de la roulette, décrit en même temps que celui du frottement, c'est-à-dire à $R \cdot s_1$ (R étant le rayon de la roulette). On aura donc

$$F \times R \cdot s_1 = f \cdot P \cdot r \times s_1,$$

d'où

$$F = fP \times \frac{r}{R}.$$

Donc, la puissance F, de fP qu'elle était avant le roulement de la roulette, est réduite à $fP \times \frac{r}{R}$, ou dans le rapport du rayon du tourillon à celui de la roulette. Il en est de même de sa quantité de travail, qui diminue aussi selon ce rapport. On remarquera que si les surfaces de AB et de la roue étaient tellement polies que le coefficient f fût très-petit, ou que le frottement de glissement en M devint moindre que $f \cdot P \cdot \frac{r}{R}$ ou que F, les roulettes ne tourneraient pas; mais cette circonstance n'arrive presque jamais dans la pratique.

Quoi qu'il en soit, les roulettes fixes ont l'avantage de diminuer la quantité de travail que développerait le frottement si ces roulettes n'existaient pas. Telle est, par exemple, dans les scieries, la disposition des chariots qui amènent la pièce de bois sous l'action de la scie (fig. 194); l'utilité des rouleaux tournants à axe fixe, sur lesquels ces chariots cheminent, devient ici de toute évidence.

Lorsqu'un tourillon est destiné à supporter une charge considérable, sa grosseur doit être proportionnée en conséquence; mais comme la quantité de travail consommée par son frottement augmente à la fois avec la pression qu'il éprouve et la grandeur de son rayon, il importe de réduire cette quantité de travail, et voici par quel moyen. Imaginez que ce tourillon A (fig. 195) repose sur deux grandes roues de rayons R et R', qui, elles-mêmes, peuvent tourner avec des tourillons de rayons r et r' beaucoup plus petits que les premiers. Décomposons, au moyen du parallélogramme, la charge ou pression du tourillon A en deux autres forces N et N', dirigées suivant les lignes qui joignent son centre à ceux des grandes roues. Si ces dernières ne tournaient pas, le frottement du tourillon sur la première (R) serait $f \cdot N$; et celui qui aurait lieu sur la

deuxième (R') serait $f \,.\, N'$. La quantité de travail totale consommée sur le tourillon serait enfin

$$(f \,.\, N + f \,.\, N')\, A \,.\, s_1,$$

A étant le rayon du tourillon et s_1 le petit arc décrit à l'unité de distance de son axe. Mais si, au contraire, chaque grande roue a la faculté de se mouvoir autour de son tourillon respectif, on reconnaît, d'après ce qui précède, que le frottement $f \,.\, N$ sur le tourillon A est réduit à $f \,.\, N \times \frac{r}{R}$, et le frottement $f \,.\, N'$ à $f \,.\, N' \times \frac{r'}{R'}$. Partant, la quantité de travail devient ainsi . . . . $\left(fN \times \frac{r}{R} + fN' \frac{r'}{R'} \right) As_1$, quantité bien inférieure à celle $(fN + fN')\, As_1$ qui aurait eu lieu sans le concours du roulement des deux grandes roues, et d'autant moindre que R et R' sont plus grands par rapport aux tourillons respectifs r et r'. Une disposition de tourillon établie sur ce principe donne lieu à une sujétion que l'on doit éviter, à moins de circonstances toutes particulières. Quand un tourillon repose sur deux ou trois roulettes (fig. 196), il est assez ordinaire qu'il s'use inégalement, et qu'il fasse naître sur leurs surfaces des cavités qui ne lui permettent plus ensuite de tourner.

Nous sommes naturellement conduits au dispositif des tourillons de la cloche de Mutte à Metz. Comme elle ne doit faire que des oscillations et non des révolutions, il convient, au lieu de roulettes, d'avoir recours à des secteurs d'une amplitude à peu près égale à celle d'une oscillation. Ces secteurs, au nombre de trois (fig. 197), tournent avec des tourillons très-petits comparativement à leurs rayons respectifs, et sont placés l'un au-dessous, et les deux autres à gauche et à droite du centre du tourillon de la cloche, de sorte que ce dernier, quand il est mis en mouvement, repose constamment sur le premier, et alternativement sur l'un des deux autres. La pression du tourillon principal étant égale à la résultante de la force centrifuge de la cloche et de son poids, qui est au moins de 18 000 livres, on conçoit que les frottements de son tourillon absorberaient une énorme quantité de travail, si on ne l'avait diminué par l'influence du roulement de ces grands secteurs; cette diminution se calcule d'ailleurs, comme nous l'avons montré pour deux cercles, au moyen

du rapport des rayons de chaque tourillon des secteurs aux rayons de ces derniers. Le balancier supérieur, qui supporte deux tiges fixées elles-mêmes à chaque secteur latéral, a pour but d'empêcher que ces secteurs ne tombent tout à fait lorsque la cloche est poussée contre l'un d'eux par l'effet de sa force centrifuge. On a dans ces derniers temps présenté un appareil analogue, comme s'il s'agissait d'un perfectionnement nouveau ; mais celui que nous venons de décrire est inventé depuis au moins trois cents ans.

Supposons actuellement que la roulette, au lieu de tourner sur son axe fixe, soit mobile sur un plan AB (fig. 198), et que la charge P, au lieu de reposer sur la circonférence de la roulette, repose sur une chape qui reçoit elle-même l'axe de la roulette : non-seulement la pression aura lieu sur l'essieu, mais encore, quelque part que soit placée la puissance F, le chemin décrit par son point d'application sera le même que celui qui est parcouru par l'essieu de la roulette. Les raisonnements sont d'ailleurs toujours les mêmes, c'est-à-dire que le travail de la puissance est égal à celui du frottement autour de l'axe, en négligeant toutefois le frottement de roulement qui a lieu en M. Remarquons que le chemin parcouru par la puissance est égal à l'arc que développe la circonférence de la roulette, ou à $R \times s_1$, et que celui qui est parcouru par le frottement autour de l'axe, dont le rayon est r, est égal à $r \times s_1$; d'où l'on tire

$$F \times R \times s_1 = f \,.\, P \,.\, r \times s_1,$$

et, par suite,
$$F = f \,.\, P \times \frac{r}{R}.$$

Telle est la théorie des roulettes de lit, ou des roues de voitures. Dans ces dernières, l'essieu ne tournant pas, c'est autour du centre de la roue que le mouvement de celle-ci s'opère, de sorte que r est nécessairement (2e partie, 121) plus grand que le rayon de l'essieu. On termine ordinairement les extrémités de cet essieu en forme de cônes dits *fusées* (fig. 199) dont l'arête inférieure est sensiblement horizontale. Le rayon, ou bras de levier du frottement, est alors la distance du centre de la roue au point de contact de cette dernière avec la fusée. Dans l'emploi des voitures, nous ne pourrions faire abstraction du frottement de roulement sur le terrain. On conçoit, en effet, qu'une roue qui parcourt une surface couverte de

pierrailles rencontre des obstacles qu'elle doit franchir ou écraser, et qui produisent une résistance plus ou moins considérable.

La force de traction, par rapport à la charge, est d'un huitième sur une route en cailloutis ou en pierres concassées ; d'un douzième sur une route dont les pierres sont plus serrées ; d'un vingtième sur une route pavée ; d'un trentième sur une route damée et bien unie. Quand une voiture roule sur une surface bien lisse, telle que de la glace ou de la neige, il arrive que les roues ne tournent pas ; c'est qu'alors la résistance du terrain en contact des roues est moindre que $f \cdot P \cdot \frac{r}{R}$.

Le rouleau du laboureur (fig. 200) destiné à briser les mottes de terre est encore du même genre. Sa quantité de travail diminue avec le rayon de son boulon, et est d'autant moindre que le rayon de sa circonférence R est plus grand par rapport au rayon r du boulon.

On voit enfin l'avantage des grandes roues ; car, si on ne les employait pas, et que la charge fût tirée ou traînée à terre, l'effort de traction deviendrait $f \cdot P$, et le coefficient f serait à peu près de $\frac{1}{2}$. Sur la neige et la glace il devient, au contraire, très-petit, et de là l'usage des traîneaux dans lesquels on se passe de roues.—Les trique-bales, qui servent au transport des lourds fardeaux, ont des roues de huit à dix pieds. Toutes les fois qu'une voiture a des roues d'inégale grandeur, il faut charger davantage les roues de derrière qui sont les plus grandes, que celles de devant, afin que leur résistance ne soit pas inégale, ou qu'elles ne s'usent pas plus les unes que les autres. Les roues de voitures ont ordinairement de trois à six pieds de diamètre : trop grandes elles augmentent la dépense, ainsi que l'instabilité de la charge (2e partie, 102 et 104).

125. *Résistance due à la roideur des cordages.* — Considérons un rouleau (fig. 201) tournant sur un axe, et portant à sa circonférence une gorge dans laquelle est passée une corde. Un poids Q est suspendu à l'une des extrémités, tandis qu'une puissance F agit à l'autre pour le faire monter par l'intermédiaire de cette corde. Celle-ci, par suite de sa roideur, oppose une certaine résistance du côté de Q, pour se plier autour du rouleau, et doit nécessairement consommer une partie de la force motrice F. La mesure de la résistance

due à la roideur des cordes a été encore l'objet de plusieurs expériences de Coulomb, d'après lesquelles il résulte que, pour un rouleau donné, cette résistance se compose de deux parties dont une demeure constante quand la corde est la même, et dont l'autre varie proportionnellement au poids Q suspendu. En désignant par K la première, et par $I \times Q$ la deuxième partie, la résistance totale d'une corde sera exprimée par $K + I \,.\, Q$. K peut être regardé comme représentant la roideur constante qui provient de la torsion ou tension naturelle des fils; I est celle qui est relative à la tension de la même corde pour un kilogramme de résistance. Coulomb observe, en outre, que cette roideur varie en raison inverse des diamètres du rouleau; en sorte que, si $K + I \,.\, Q$ est la roideur d'une corde autour d'un rouleau de 1 mètre de diamètre, et que $2R$ soit le diamètre de celui que l'on considère, $\frac{K + IQ}{2R}$ donnera la mesure de cette roideur autour de ce dernier. Il ne reste donc plus qu'à avoir le tableau des valeurs de K et de I pour les cordes employées dans la pratique, lorsqu'elles sont pliées autour d'un rouleau de 1 mètre de diamètre, puisqu'il suffira de diviser la roideur qui en résulte par le diamètre du rouleau véritable autour duquel la corde peut être enroulée.

Toutefois, comme il est impossible de prévoir les diamètres de toutes les cordes, et qu'il y en a une infinité, Coulomb a encore donné la loi sur la roideur en vertu des diamètres des cordes. Il distingue 1° les cordes blanches, sèches ou mouillées; 2° les cordes à demi usées, soit sèches, soit mouillées; 3° les cordes goudronnées; 4° enfin, les ficelles. La roideur des premières est à peu près proportionnelle au carré des diamètres de ces cordes; celle de la deuxième classe varie comme la racine cubique du carré des diamètres; celle de la troisième classe est proportionnelle au nombre des fils de caret de chaque corde (*voyez* plus loin dans la table). Quant à la roideur des ficelles, elle varie proportionnellement à leur diamètre.

TABLEAU *des poids nécessaires pour plier différentes cordes autour d'un rouleau de* 1 m *de diamètre.*

N° I. CORDES BLANCHES SÈCHES. — *Roideur proportionnelle au carré du diamètre.*

DIAMÈTRES DES CORDES EN CENTIMÈTRES.	ROIDEUR NATURELLE OU VALEUR DE *K*.	ROIDEUR POUR 1 K. DE CHARGE OU VALEUR DE *I*.
	k	k
1	0,055615	0,0024346
2	0,222460	0,0097382
4	0,889840	0,0389528
8	3,559360	0,1558112

N° II. CORDES BLANCHES IMBIBÉES D'EAU. — *Roideur proportionnelle au carré du diamètre.*

DIAMÈTRES DES CORDES EN CENTIMÈTRES.	ROIDEUR NATURELLE OU VALEUR DE *K*.	ROIDEUR POUR 1 K. DE CHARGE OU VALEUR DE *I*.
	k	k
1	0,111230	0,0024346
2	0,444920	0,0097382
4	1,779680	0,0389528
8	7,118720	0,1558112

CARRÉS DES RAPPORTS DE DIAMÈTRES INTERMÉDIAIRES A CEUX DU TABLEAU.

RAPPORTS.	CARRÉS.
1,0	1,00
1,1	1,21
1,2	1,44
1,3	1,69
1,4	1,96
1,5	2,25
1,6	2,56
1,7	2,89
1,8	3,24
1,9	3,61
2,0	4,00

N° III. CORDES SÈCHES A DEMI USÉES. — *Roideur proportionnelle à la racine carrée du cube du diamètre.*

DIAMÈTRES DES CORDES EN CENTIMÈTRES.	ROIDEUR NATURELLE OU VALEUR DE *K*.	ROIDEUR POUR 1 K. DE CHARGE OU VALEUR DE *I*.
	k	k
1	0,055615	0,0024346
2	0,157279	0,0068850
4	0,444785	0,0194708
8	1,257852	0,0550634

N° IV. CORDES MOUILLÉES A DEMI USÉES. — *Roideur proportionnelle à la racine carrée du cube du diamètre.*

DIAMÈTRES DES CORDES EN CENTIMÈTRES.	ROIDEUR NATURELLE OU VALEUR DE *K*.	ROIDEUR POUR 1 K. DE CHARGE OU VALEUR DE *I*.
	k	k
1	0,111230	0,0024346
2	0,314558	0,0068850
4	0,889570	0,0194708
8	2,515704	0,0550634

RACINES CARRÉES DES CUBES DES RAPPORTS DE DIAMÈTRES INTERMÉDIAIRES A CEUX DU TABLEAU.

RAPPORTS.	PUISSANCES $\frac{3}{2}$
1,0	1,000
1,1	1,154
1,2	1,315
1,3	1,482
1,4	1,657
1,5	1,837
1,6	2,024
1,7	2,217
1,8	2,415
1,9	2,619
2,0	2,828

N° V. CORDES GOUDRONNÉES. — *Roideur proportionnelle au nombre des fils de caret.*

(Les cordes se composent ordinairement de trois torons ou cordes moins grosses entrelacées et tordues; les torons sont formés eux-mêmes d'un certain nombre de ficelles ou brins qu'on nomme fils de caret.)

NOMBRE DES FILS DE CARET.	POIDS DE 1 MÈTRE DE LONGUEUR DE CORDE.	ROIDEUR NATURELLE OU VALEUR DE K.	ROIDEUR POUR 1 K. DE CHARGE OU VALEUR DE I.
	k	k	k
6	0,0693	0,212060	0,0025968
15	0,1632	0,105928	0,0060592
30	0,3326	0,349600	0,0125514

Observations. — La roideur des ficelles ou cordes au-dessous de 1 centimètre de diamètre s'obtient, selon les circonstances, des tableaux n^os^ I, II, III et IV, en y réduisant les valeurs de K et de I, proportionnellement à ces petits diamètres. — Les mêmes valeurs, dans le tableau n° V, sont proportionnelles au nombre des fils de caret de la corde. Deux applications sont nécessaires pour montrer l'usage des tableaux ci-dessus.

On demande la résistance de la roideur d'une corde blanche sèche, de 3 centimètres de diamètre, chargée d'un poids de 400 kilogr., et s'enroulant sur un rouleau dont le diamètre est 0^m^,50. Je cherche dans le tableau n° I la corde qui se rapproche le plus de la proposée : son diamètre est de deux centimètres; le rapport des deux diamètres est $\frac{3}{2} = 1{,}5$, ont l e carré donné par le tableau annexé et qui est à deux colonnes, est 2,25. C'est par ce coefficient que je multiplie les valeurs 0,222460 et 0,0097382 de K et de I, qui correspond au diamètre de 2 centimètres. Les produits sont 0^k^,50 et 0^k^,0219. La roideur de la corde serait par conséquent . . . . . $0{,}50 + \overline{400 \times 0{,}0219}$ ou 9^k^,26 si le rouleau était de 1^m^. Divisons alors cette résistance par 0^m^,50 qui est celui du rouleau proposé; le quotient, 18^k^,52, sera la roideur véritable de la corde.

La corde est supposée mouillée, à demi usée, de cinq centimètres de diamètre, et chargée de 2000 kilogr. On suppose, en outre, un diamètre de 0^m^,25 au rouleau. A cet effet nous aurons recours au tableau n° IV, et nous y choisirons d'abord la corde de 4 centimètres,

dont le diamètre est immédiatement inférieur à 5 centimètres. Le rapport de ces deux diamètres étant $\frac{5}{4}$ ou 1,25, ou 1,30 environ, et la puissance $\frac{3}{2}$ de ce rapport étant 1,482 d'après le tableau à deux colonnes annexé, on multipliera par 1,482 les valeurs 0,889570 et 0,0194708. Les produits $1^k,32$ et $0^k,02886$ sont tels que la somme $1^k,32 + \overline{1000 \times 0,02886}$, ou $30^k,18$, serait la roideur de la corde sur un rouleau de 1 mètre. Divisant donc par le diamètre 0,25, le quotient $120^k,72$ sera la roideur demandée.

XII.

CALCUL DES ROUES ET DE LEURS RÉSISTANCES.

126. *Roue plane, sollicitée par deux forces situées dans son plan, et à égales distances du centre de rotation.* — Une roulette plane (fig. 202) tournant autour de son tourillon, peut être tirée en sens contraire par deux forces F et Q, situées dans son plan et tangentes à sa circonférence, et elle donne lieu à des conditions d'équilibre qu'il importe de connaître pour la pratique. Les circonstances seront d'ailleurs les mêmes lorsque ces forces ne seraient pas tangentes à cette circonférence : il suffit que leurs directions soient l'une et l'autre à des distances égales du centre : car on peut toujours se représenter le cercle tangent à ces deux droites, et raisonner sur ce nouveau cercle comme sur la roulette. Cela posé, ces deux forces appartenant à un même plan perpendiculaire à l'axe du mouvement, il faudra, pour l'équilibre, que la force F ou la puissance détruise à chaque instant l'effet de la résistance Q ou que les quantités de travail élémentaires qu'elles développent soient égales. Or, les points d'application A et B de ces forces appartenant à un même cercle, les chemins qu'ils décrivent simultanément seront égaux ; et puisque les produits de ces chemins par les forces F et Q doivent être aussi égaux, il en sera de même de ces forces. Donc on aura $F = Q$.

Il y aurait effectivement équilibre dans le cas de l'égalité des

deux forces, si l'on faisait abstraction du frottement produit par le tourillon de la roulette sur sa crapaudine. Ce frottement existant, la puissance F n'aura pas seulement à vaincre le travail de la résistance Q; elle aura encore à surmonter le travail occasionné par l'autre résistance. D'après cela, on voit que la roulette est soumise à trois forces, qui sont la puissance, la résistance et le frottement, et qu'elle doit être en équilibre sur sa crapaudine; ce qui ne peut avoir lieu (2e partie, 99) qu'autant que la résultante de ces trois forces passe par le tourillon et à son point de contact avec la crapaudine. Or, déjà la force du frottement s'y trouve naturellement appliquée; il devra donc en être de même à l'égard de la résultante des deux forces F et Q. Cette dernière, que nous nommerons N, n'est autre chose que la pression sur l'appui, et elle y produit le frottement $f \,.\, N$ dont le bras de levier r est le rayon du tourillon. En appelant R le rayon de la roulette, $F \,.\, R$, $Q \,.\, R$ et $f \,.\, N \,.\, r$ seront évidemment les moments de la puissance, de la résistance et du frottement, dont le premier, favorable au mouvement, est égal à la somme des deux autres qui lui sont contraires. On aura, par conséquent,

$$F \,.\, R = Q \,.\, R + f \,.\, N \,.\, r.$$

Ayant le moment $F \,.\, R$, on divisera par R, et on en conclura l'effort F de la puissance; mais cela suppose que l'on connaisse la pression N, laquelle est la résultante de la résistance donnée Q et de la force F qu'on ne connaît pas encore. Il peut arriver deux cas : ou que le rayon du tourillon r soit très-petit par rapport à R, ou qu'il lui soit comparable. Dans le premier cas, on remarquera que, dans la relation $F \,.\, R = Q \,.\, R + r \,.\, f \,.\, N$, l'erreur serait fort petite en ne déterminant qu'approximativement la valeur de N, et, par suite, de $f \,.\, N$. Car, en la multipliant par r, l'erreur à laquelle le produit $r \,.\, f \,.\, N$ donnera lieu sera très-minime, comparativement à $F \,.\, R$ et à $Q \,.\, R$, vu la petite dimension du rayon du tourillon r.

Reste maintenant à expliquer comment on aura cette valeur approchée. Si l'on fait d'abord abstraction du frottement, on a $F = Q$. Prolongeons ces deux forces jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en M, et faisons attention que la résultante N de deux forces égales est la diagonale Mc du losange $Macb$ dont les côtés Ma et Mb sont égaux à Q. Cette diagonale devra d'ailleurs passer

par le centre C du cercle. Joignez les rayons AC, BC et la corde AB; observez que les diagonales Mc et ab du losange sont perpendiculaires entre elles, que Md est la moitié de la diagonale ou $\frac{1}{2}N$. Les triangles ACD et aMd sont d'ailleurs semblables : car ils ont chacun un angle droit, l'un en D et l'autre en d. Enfin, l'angle CAD ayant ses côtés perpendiculaires à ceux de l'angle aMd, ces deux angles sont égaux. On aura donc la proportion

$$Md : Ma :: AD : AC,$$

ou

$$Md = \frac{Ma \times AD}{AC} = \frac{Q \times AD}{R},$$

et, par suite,

$$N = 2Md = \frac{Q \times 2AD}{R} = \frac{Q \times AB}{R}.$$

La pression N sur le tourillon sera alors facile à calculer, puisque cela se borne à multiplier la résistance donnée Q par le rapport de la corde qui sous-tend l'arc compris entre les directions des forces, au rayon du cercle. On aura donc

$$FR = Q \cdot R + rf \cdot \frac{Q \cdot AB}{R}.$$

Veut-on avoir la quantité de travail que doit dépenser la puissance en un temps déterminé? S étant l'arc parcouru par son point d'application, FS sera cette quantité de travail, et si s_1 est le même arc décrit à l'unité de distance, on aura

$$S = Rs_1 \quad \text{ou} \quad FS = F \cdot Rs_1.$$

Il suffira donc de multiplier la relation des moments par s_1; ce qui donne

$$F \cdot Rs_1 = Q \cdot R \cdot s_1 + rs_1 f \cdot \frac{Q \cdot AB}{R}.$$

Cette nouvelle égalité indique que le travail de la puissance est égale à la somme du travail de la résistance, et de celui qui est consommé par le frottement. Arrivons au deuxième cas où le rayon du tourillon r est comparable au rayon R de la roulette. On fera

d'abord attention que la pression N est la résultante des deux forces F et Q, et que F devant toujours être plus grand que Q, la résultante est trop faible quand on substitue Q à F. Appelons N_1 cette dernière résultante, c'est-à-dire $\frac{Q \times AB}{R}$. Si N_1 est trop faible, il en sera de même de la valeur de F déduite de cette relation

$$F = Q + \frac{r}{R} f \cdot N_1 = F_1.$$

Toutefois cette valeur F_1, ainsi obtenue, est déjà plus grande que Q. Si donc je regarde maintenant la pression N comme la résultante de deux forces égales à F_1 et que je fasse

$$N = \frac{F_1 \times AB}{R} = N_2,$$

il est évident que cette nouvelle pression N_2 sera trop forte et qu'il en sera de même de la valeur

$$F = Q + \frac{r}{R} \cdot f \cdot N_2 = F_2.$$

Ainsi, puisque la véritable expression de la puissance est plus petite que F_1 et plus grande que F_2, que, de plus, elle diffère très-peu de toutes deux, il sera permis de la regarder comme égale à leur moyenne ou à $\frac{F_1 + F_2}{2}$, ou bien à

$$Q + \frac{r}{R} \cdot f \cdot \frac{N_1 + N_2}{2}.$$

Cette méthode, comme on voit, revient à considérer la pression comme une moyenne entre les deux résultantes de la puissance et de la résistance, 1° en supposant à la puissance la valeur qu'elle aurait indépendamment de la considération du frottement, et à la résistance sa valeur donnée; 2° en supposant à la puissance une seconde valeur approchée, et à la résistance celle qu'elle devrait avoir pour faire équilibre à cette nouvelle puissance, si le frottement n'existait pas. Nous verrons tout à l'heure que cette méthode est générale.

127. ***Même roue soumise à deux forces situées dans son plan, mais***

à des distances inégales du centre. — La puissance agit quelquefois sur une roue hors de son centre et à une distance différente de celle de la résistance ; elle peut être, par exemple, appliquée à un corps fixé à la circonférence de la roue. C'est ainsi que, pour faire tourner une roue, un homme exerce son action contre une cheville, tandis que le poids, ou la résistance à vaincre, exerce la sienne sur le cercle lui-même. Les raisonnements sont encore analogues aux précédents, quoique les forces F et Q (fig. 203) cessent ici d'être égales. Ainsi, en désignant par R la distance AC de la première au centre et par R' la distance CB de la deuxième, ces deux forces, qui sont d'ailleurs toujours situées dans le plan de la roue, et par conséquent dans un plan perpendiculaire à l'axe du mouvement, devront, pour qu'elles se fassent équilibre, détruire leur effet réciproque, si l'on fait abstraction du frottement : autrement dit, leurs quantités de travail seront égales. Or, s_1 représentant le chemin parcouru à l'unité de distance dans un même petit temps par rapport au centre, pour tous les rayons compris dans le plan de la roue, Rs_1 et $R's_1$ seront les chemins décrits par les points d'application A et B des forces F et Q, et l'on aura $F \,.\, Rs_1$ et $Q \,.\, R's_1$ pour leurs quantités de travail. Donc, on a

$$FRs_1 = QR's_1, \quad \text{ou} \quad FR = QR',$$

ou enfin

$$F = \frac{QR'}{R},$$

et cela indépendamment de la considération du frottement. Si l'on veut en tenir compte, il est évident que son moment, plus celui de la résistance, doit être égal au moment de la puissance.

On fera voir encore que, puisque l'équilibre subsiste, il est indispensable que la résultante de ces trois forces, ou seulement celle de la puissance et de la résistance, passe par l'appui du tourillon contre son palier ; et on reconnaîtrait en même temps que cette résultante N, des forces F et Q, n'est autre chose que la pression exercée contre les surfaces frottantes, que le frottement est $f \,.\, N$, et qu'enfin $f \,.\, N \,.\, r$ est son moment. Ainsi, on aura

$$FR = QR' + f \,.\, N \,.\, r.$$

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, puisque la résultante N doit passer par le centre C de la roue, on peut la sup-

poser appliquée en ce point et l'y décomposer en deux autres dont les directions sont parallèles aux forces F et Q, et qui produiront ces dernières, mais appliquées en C; ce qui montre qu'on peut imaginer ces forces transportées en un même point de l'axe, et les composer ensuite en une seule de laquelle résulte la pression sur l'axe.

Des difficultés analogues au cas précédent se représentent ici pour la détermination de N, attendu qu'on ne connaît pas à l'avance la valeur F de l'une de ses composantes. Mais on fera deux hypothèses, selon que le rayon du tourillon r est très-petit ou comparable à R. Dans le premier cas, on prendra pour F la valeur trop faible $Q \cdot \frac{R'}{R}$; je dis *trop faible* parce que F doit vaincre à la fois le travail de la résistance et celui du frottement. On cherchera d'abord la résultante N_1 des deux forces $Q\,\frac{R'}{R}$ et Q. Puis on aura une nouvelle valeur de F, au moyen de la relation

$$FR = QR' + fN_1 r,$$

ou de

$$F = Q \cdot \frac{R'}{R} + fN_1 \cdot \frac{r}{R}.$$

J'appellerai F_1 cette valeur très-approchée, dont on se contentera tant que r sera très-petit par rapport à R. Mais si le rayon r est comparable à R ou à la distance AC, il faudra recourir à la dernière méthode indiquée précédemment. Ainsi, ayant déjà la première valeur approchée F_1, on fera attention que F_1 est plus grand que $\frac{QR'}{R}$, ou Q moindre que $\frac{F_1 R}{R'}$. Donc, si je remplace Q par cette valeur $\frac{F_1 R}{R'}$, déjà trop forte, et que je la compose avec F_1 pour obtenir la résultante N_2, cette nouvelle pression sera trop considérable, et, substituée à N dans la relation des moments, elle donnera pour F une valeur

$$F_2 = \frac{QR'}{R} + \frac{r}{R} \cdot f \cdot N_2$$

qui sera trop forte. Mais, comme la véritable expression de la puissance diffère très-peu de F_1 et de F_2, et qu'elle est comprise entre

ces deux quantités, elle pourra donc être représentée par

$$\frac{F_1 + F_2}{2}, \quad \text{ou par} \quad \frac{QR'}{R} + \frac{r}{R} \cdot f\,\frac{N_1 + N_2}{2}.$$

128. *Équilibre de la poulie fixe.* — Nous pouvons maintenant déterminer les conditions d'équilibre entre une puissance et une résistance, lorsqu'elles sont appliquées à une poulie fixe dont la surface extérieure est creusée en gorge et reçoit une corde aux extrémités de laquelle ces deux forces sont censées tirer. La résistance sera, par exemple, un poids Q (fig. 204) qu'il s'agit de soulever. Lorsque la poulie est fixe, ses deux tourillons font corps avec elle et tournent pendant le mouvement, chacun sur un œil pratiqué dans une chape immobile. On a soin de renfler la poulie vers ses épaulements, afin que, dans le cas où elle serait poussée parallèlement à son axe, la surface frottante de ces épaulements soit diminuée le plus possible. La puissance F n'aura pas seulement à vaincre la résistance Q; elle aura encore à surmonter celles de la roideur de la corde, et du frottement sur le tourillon. Remarquez d'ailleurs que cette roideur ne résiste que du côté B où la corde s'enroule sur la poulie, et nullement du côté où elle se déroule; il y a plus, c'est que si la corde était élastique, elle favoriserait la puissance vers ce dernier côté. Ainsi, la résistance de la corde est en B. Quand les cordes ont de très-gros diamètres, on peut regarder que la puissance et la résistance agissent sur leur ligne milieu; ainsi, les deux forces ont leurs directions tangentes à une circonférence dont le rayon est égal à celui de la poulie augmenté de celui de la corde.

Nous raisonnerons donc comme au n° 126, afin de parvenir à l'équilibre des forces F et Q. On aura d'abord $F = Q$, en faisant abstraction de toute résistance. Appelons N_1 la résultante des deux forces égales à Q et appliquées au centre C de la poulie parallèlement à la direction des deux forces données; N_1 sera d'abord considéré comme une première valeur de la pression sur l'axe du mouvement; fN_1 sera le frottement, et fN_1r son moment. Quant à la résistance de la roideur de la corde qu'il faut ajouter à la résistance Q, son expression (2e partie, 125) est égale à $\frac{K + IQ}{2R}$, K et I étant les coefficients relatifs l'un à la tension naturelle, et l'autre à la tension du poids Q, et R étant le rayon de la poulie augmenté

comme il a été dit. On aura, par conséquent, en vertu du principe des moments,

$$F \cdot R = R \cdot Q + R\left(\frac{K + IQ}{2R}\right) + r \cdot f \cdot N_1.$$

Divisant par R, on trouvera

$$F = Q + \frac{K + IQ}{2R} + \frac{r}{R} \cdot f \cdot N^1 = F_1.$$

Mais cette valeur F_1 est trop faible pour la puissance, parce que dans l'estimation de la pression N_1 nous avions supposé cette puissance simplement égale à Q. Toutefois F_1 étant déjà plus grand que Q, il est évident que si nous prenons pour pression la résultante N_2 de deux forces égales à F_1 et appliquées en C, la nouvelle valeur

$$F_2 = Q + \frac{K + IQ}{2R} + \frac{r}{R} \cdot f \cdot N_2$$

sera à son tour trop forte. On voit donc clairement que comme d'ailleurs la véritable puissance ne diffère que de très-peu des quantités obtenues F_1 et F_2, elle sera suffisamment exprimée par la moyenne

$$\frac{F_1 + F_2}{2} = Q + \frac{K + IQ}{2R} + \frac{r}{R} \cdot f \cdot \frac{N_1 + N_2}{2}.$$

Il arrive fréquemment dans la pratique que les deux forces, puissance et résistance, tirent les deux branches de la corde (fig. 205) selon des directions parallèles et verticales. Telle est, par exemple, la circonstance de l'homme qui tire de l'eau d'un puits. Non-seulement il tire verticalement sur une poulie, mais il en est de même à l'égard du sceau qui apporte l'eau. Dans ce cas il y a une simplification notable, en ce que la pression N exercée sur les tourillons de la poulie, et qui est la résultante des forces parallèles F et Q, devient ici égale à leur somme $F + Q$. Si d'ailleurs la poulie est très-pesante, ou que, les deux forces étant peu considérables, le poids m de cette poulie leur devienne comparable, ce sera une troisième force qu'il faudra comprendre dans les deux autres pour l'évaluation de la pression sur le tourillon. On aura donc

$$N = F + Q + m, \quad \text{ou} \quad N = F + Q - m,$$

selon que les cordons seront tirés l'un et l'autre de haut en bas ou de bas en haut. Il en serait de même du cas plus général où les deux forces F et Q ne seraient plus parallèles, et où l'on aurait à tenir compte du poids de la poulie; la pression N, à laquelle le frottement sur le tourillon est toujours proportionnel, serait encore la résultante des trois forces F, Q et m que l'on combinerait deux à deux à l'aide du principe du parallélogramme.

Pour mieux faire apprécier l'influence du frottement, et de la roideur des cordes dans la poulie, nous appliquerons un exemple au cas particulier d'une poulie à deux cordons parallèles. On aura alors

$$N = F + Q + m,$$

et

$$F = Q + \frac{K + IQ}{2R} + f(F + Q + m)\frac{r}{R}.$$

Supposons $Q = 1000$ kilogr., R ou le rayon de la circonférence à laquelle les deux forces sont tangentes $= 0{,}20$, r ou le rayon du tourillon $= 0^m{,}02$, f le coefficient du frottement $= \frac{1}{8}$ pour du fer sur du cuivre sans graissage, et enfin imaginons que la corde soit une corde blanche sèche dont le diamètre soit de 2 centimètres. Des trois termes de la valeur de F, le premier Q est la résistance 1000 kilogr. qui serait aussi celle de la puissance F, abstraction faite des autres résistances. Le deuxième $\frac{K + IQ}{2R}$ est relatif à la roideur de la corde; les valeurs de K et de I, d'après le tableau n° I du paragraphe 125, sont pour la corde de 2 centimètres, $0^k{,}2225$ et $0^k{,}00974$. On a d'ailleurs $R = 0^m{,}20$. Donc, on aura, pour l'expression numérique de la roideur de la corde,

$$\frac{0{,}2225 + \sqrt{0{,}00974 \times 1000^k}}{2 \times 0{,}20} = \frac{9^k{,}9625}{0{,}40} = \frac{99^k{,}625}{4}$$

$$= 24^k{,}906 = 25^k \text{ environ.}$$

Quant à la résistance du frottement $f(F + m + Q)\frac{r}{R}$, nous prendrons pour F la valeur approchée 1000^k, qu'elle aurait sans le frottement, et pour m 20^k qu'on suppose être le poids de la poulie;

et nous aurons

$$f(F+m+Q)\frac{r}{R}=\frac{1}{8}(1000+20+1000)\frac{0,02}{0,20}$$

$$=\frac{1}{8}\times 2020\times\frac{1}{10}=\frac{202}{8}=25^{k},25.$$

On aura donc, en définitive,

$$F=1000^{k}+25^{k}+25^{k},25=1050^{k},25.$$

Sans les résistances, cette valeur de F eût été de 1000 kilogr.

Si au lieu de $R=0,20$, nous avions $R=0,1$, la roideur de la corde deviendrait 50 kilogr., et le frottement $50^{k},56$, en sorte que la puissance serait augmentée de 100^{k} sur 1000^{k} par suite de ces résistances. Or, le travail consiste ici dans le produit du poids Q ou de 1000^{k} et du chemin parcouru. Ce dernier chemin étant aussi celui de la puissance, on reconnaîtra facilement que son travail, par l'effet des résistances tant de la roideur de la corde que du frottement, est augmenté d'un vingtième, ou d'un dixième, selon que le rayon est de 2 décimètres ou de 1 décimètre; fractions qui ne sont point à négliger.

129. *Équilibre de la poulie mobile.* — Jusqu'ici l'axe de la poulie a été supposé demeurer immobile ou n'avoir aucun mouvement de transport; et cependant les poulies peuvent être mobiles, ou soutenues par leur gorge sur une corde dont un bout est tiré par une puissance et dont l'autre est attaché à un crochet fixe en Q (fig. 206). Cette même poulie est, en outre, embrassée par une chape ou espèce de fourche qui porte les tourillons de la poulie, et dont la queue se termine en un crochet destiné à recevoir le poids qu'on veut soulever. Ce système est précisément celui des réverbères des rues. De quelque manière que la puissance F soit appliquée, son objet est d'élever un poids P qui presse immédiatement l'essieu de la poulie sur sa chape, et qui fait naître au point fixe Q une tension telle que la résultante de cette dernière composée avec la puissance F détruise le poids P ou lui soit égale et immédiatement contraire; ce qui exige que les deux branches de la corde de suspension suffisamment prolongées se rencontrent en un même point O sur la verticale de P. Donc, réciproquement, si on regarde le

poids P comme immédiatement appliqué en O et qu'on le décompose en deux autres forces Oa et Ob, dirigées suivant les tangentes au cercle de la poulie, l'une sera la tension Q et l'autre la force F. Or, l'équilibre serait ainsi établi indépendamment du frottement et des autres résistances ; toutefois cette décomposition donne déjà une première valeur approchée de la puissance F.

Pour avoir la véritable, il faut observer qu'elle doit vaincre non-seulement la tension Q de l'autre branche de corde, mais encore le frottement qui s'exerce au tourillon et qui est proportionnel au poids à soulever P ; il faudra également tenir compte de la roideur de la corde en B, ou du côté de la tension résistante Q. Ainsi, le moment de la puissance F sera égal à celui de Q augmenté de ceux de la roideur et du frottement. Donc, on aura

$$F \cdot R = Q \cdot R + \frac{K + IQ}{2R} \cdot R + rf \cdot P.$$

Quant à la valeur de Q, cette force est la composante de P décomposée suivant un losange, attendu que la verticale de ce poids passe par le centre de la poulie et partage l'angle des directions de F et Q en parties égales ; et l'on ferait voir, comme au n° 126, qu'on aura

$$Q = \frac{R \times P}{AB}.$$

Donc, en définitive, on parviendra au moment $F \cdot R$ de la puissance dont le quotient qui résulte de la division par R donne la valeur cherchée de F.

130. *Équilibre des moufles.* — On nomme *moufle* le système de plusieurs genres de poulies portées sur une chape commune (fig. 207). Quand on fait usage de cette machine, elle doit se composer de deux moufles, dont l'une est fixe, et l'autre mobile; une corde tirée par une puissance P embrasse tour à tour les poulies d'une chape à l'autre ; enfin la moufle mobile porte le fardeau R qu'on veut élever. En observant le jeu de cette machine, on reconnaît facilement que la longueur du cordon sur lequel est appliquée la puissance F augmente de la somme de tous les raccourcissements des autres cordons partiels, et que ces derniers sont, chacun, égaux à la montée du poids R. Par conséquent, s'il y a quatre cor-

dons en sus de celui de la puissance, le chemin parcouru par la résistance sera le quart de celui que décrit cette dernière ; il en sera le sixième, si le nombre des cordons, outre celui de F, est porté à six. L'équilibre est alors soumis à une condition bien simple, quand on fait abstraction des frottements; car le travail de la puissance F, ou son produit par le chemin qu'elle parcourt, étant égal au travail de la résistance R, c'est-à-dire à son produit par la hauteur dont elle monte, cela revient à dire que la puissance serait le quart ou le sixième de la résistance, selon que le nombre des cordons qui soulèvent le poids est de quatre ou de six.

Mais, si l'on veut tenir compte des frottements, il faut marcher de poulie en poulie, ainsi qu'il suit. Pour la poulie n° 1, la tension t_1 du dernier cordon est la résistance, tandis que la tension t_2 du cordon adjacent en est la puissance. Observant en outre que les cordons sont parallèles, et appelant R_1, r_1, f, K, I, le rayon de cette poulie, celui de son boulon, le coefficient du frottement, et les coefficients relatifs à la roideur de la corde, on aura, pour l'équilibre de la poulie n° 1,

$$t_2 R_1 = t_1 R_1 + \frac{K + I \cdot t_1}{2R_1} R_1 + r_1 f(t_1 + t_2);$$

relation qui donnera t_2 au moyen de t_1. Quant à l'équilibre de la poulie n° 2, où t_2 devient la résistance, tandis que la puissance est la tension t_3 du troisième cordon, on aura

$$t_3 R_2 = t_2 R_2 + \frac{K + I \cdot t_2}{2R_2} R_2 + r_2 f(t_2 + t_3),$$

ce qui donnera t_3 au moyen de t_2 ou de t_1. La poulie n° 3 donne lieu à cette autre relation

$$t_4 R_3 = t_3 R_3 + \frac{K + I \cdot t_3}{2R_3} R_3 + r_3 f(t_3 + t_4).$$

Enfin, de la poulie n° 4, en remarquant que t_4 n'est autre chose que la puissance cherchée F, on obtient

$$F \cdot R_4 = t_4 R_4 + \frac{K + I \cdot t_4}{2R_4} R_4 + r_4 f(t_4 + F);$$

de sorte qu'en dernière analyse on arrive à la puissance F au moyen

de t_1 qu'on ne connaît pas. Mais faisons attention que tous les cordons sont parallèles, et que les tensions t_1, t_2, t_3 et t_4, qui supportent le poids R, peuvent être regardées comme des composantes de cette résistance, et cette dernière comme égale à leur somme. On aura donc

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = R.$$

Cette méthode ne laisse pas que d'être assez pénible; mais on peut la simplifier par une considération suffisamment exacte. En effet, si les tensions t_1, t_2, t_3 et t_4 servent à soutenir le poids R, y compris celui des chapes et des poulies, il est évident que sans le frottement et la roideur des cordes, elles seraient égales entre elles. On prendra donc t_1 comme étant égal à $\frac{R}{4}$, et l'on cheminera de poulie en poulie pour en déduire des valeurs correspondantes pour t_2, t_3, t_4, lesquelles seront plus grandes que t_1 ou que $\frac{R}{4}$, en sorte que leur somme surpassera R. Mais, comme cela ne saurait être, on en conclut que ces tensions sont trop fortes.

Maintenant, si l'on suppose que les véritables tensions soient proportionnelles à celles qui viennent d'être obtenues et dont la somme est $R' > R$, on aura de nouvelles valeurs approchées des premières en partageant leur véritable somme qui est R en parties proportionnelles aux deuxièmes; ce à quoi l'on parviendra en multipliant celles-ci par $\frac{R}{R'}$; la valeur de t_1, qui en résultera, sera $\frac{R}{4} \times \frac{R}{R'}$ ou $\frac{R^2}{4R'}$; puis on recommencera les calculs que l'on poursuivra jusqu'à t_4; enfin, à l'aide de cette dernière considérée comme résistance sur la poulie n° 4, on tirera une valeur plus approchée de la puissance F.

Pour mieux faire comprendre l'esprit de cette méthode, nous l'appliquerons à un exemple particulier. Les rayons des poulies n^os^ 1, 2, 3 et 4, c'est-à-dire R_1, R_2, R_3 et R_4, sont de $0^m,08$, $0^m,12$, $0^m,16$ et $0^m,20$. Les rayons r_1, r_2, r_3, r_4, de leurs boulons, sont tous de $0^m,02$. La corde, qui passe dans les gorges des poulies, est une corde blanche sèche et a $0^m,02$ de diamètre, de sorte que les coefficients K et I relatifs à sa roideur sont encore, comme au n° 128, $0^k,2225$ et $0^k,00974$. Enfin, nous supposerons que le coefficient f

est $\frac{1}{3}$ ou celui du frottement de fer sur cuivre sans graissage, et que le poids à soulever, y compris celui des poulies, est 1200 kilogr., ou que $R = 1200$ kilogr. Sans le frottement on aurait $t_1 = \frac{1200^k}{4}$ (parce que le nombre des cordons qui supportent ensemble le fardeau est de 4), ou $t_1 = 300^k$. Faisant cette hypothèse dans la relation de la poulie n° 1, $t_2 = t_1 + \frac{K + It_1}{2R_1} + \frac{r}{R_1} f(t_1 + t_2)$, et imaginant que la valeur de t_2 qui entre dans le terme du frottement est égale d'abord à 300^k comme t_1, on aura $t_2 = 339^k$. Passant à la deuxième poulie et considérant la résistance t_2 comme égale à 339^k, on trouvera $t_3 = 368^k$. Passant encore à la troisième poulie, on tirera de la valeur de $t_3 = 368$ celle de $t_4 = 391^k$. La somme $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$, ou 1398^k, est évidemment plus forte que le poids total 1200^k. Pour avoir des valeurs plus approchées, on multipliera chaque tension précédente par le rapport $\frac{1200^k}{1398}$ ou par 0,86; ce qui donnera

pour t_1,	$0{,}86 \times 300$,	ou	258^k;
» t_2,	$0{,}86 \times 339$,	»	291^k;
» t_3,	$0{,}86 \times 368$,	»	316^k;
» t_4,	$0{,}86 \times 391$,	»	336^k.

Afin d'avoir la valeur de F ou de la puissance, on posera l'équation

$$F = t_4 + \frac{K + It_4}{2R_4} + \frac{r_4}{R_4} f(t_4 + F),$$

et on substituera à t_4 la valeur 336 kilogr.; ce qui donnera

$$F = 336^k + \frac{0{,}2225 + 0{,}00974 \cdot 336}{2 \cdot 0{,}2} + \frac{0{,}02}{0{,}2} \cdot \frac{1}{8} (336 + 336)$$

$$= 336^k + 9^k + 8^k \text{ environ } = 353^k.$$

Or, sans les frottements et la roideur des cordes la puissance n'eût été que de 300 kilogr.; ces dernières résistances l'augmentent donc de 53 kilogr. ou de $\frac{1}{6}$ environ; et, comme la quantité de travail de la puissance est proportionnelle à son intensité, on voit que le moteur doit dépenser pour vaincre la roideur et le frotte-

ment un sixième de travail en sus de ce qu'il lui faudrait si ces résistances n'existaient pas.

131. *Équilibre des roues en général.* — Les conditions d'équilibre n'offrent pas plus de difficultés à l'égard de roues quelconques montées sur un même arbre qui repose lui-même sur deux tourillons; ce qu'il importe c'est que les forces soient appliquées dans le plan de ces roues ou dans des plans perpendiculaires à l'axe; autrement les composantes de ces forces, parallèles à l'axe, pousseraient celui-ci contre les épaulements des coussinets et y produiraient un frottement (2e partie, 120) dont le bras de levier peut être considérable.

Toutefois il y a des cas où la décomposition est nécessaire; cette circonstance arrive pour les roues d'angles. On cherchera alors l'effort qui pousse dans la longueur de l'arbre, ainsi que le travail des frottements qui s'exercent aux épaulements, et ce travail sera compris parmi ceux que doit vaincre le travail de la puissance. Si la résistance utile est un poids Q (fig. 208) suspendu à une corde qui s'enroule autour de l'arbre, la puissance F appliquée tangentiellement à la roue tirera de bas en haut et de haut en bas, selon que son point d'application sera, par rapport au treuil, du même côté ou d'un côté différent que le point d'application de la résistance. Quelquefois la puissance agit au bout d'un levier, comme dans ces mécanismes appelés *haquets*, à l'aide desquels on charge les tonneaux de vin sur les voitures. Tantôt encore la puissance agit sur des roues à chevilles, sur des roues à marcher, sur des cabestans, sur des roues dentées, sur des roues à cordes sans fin, etc.; le tour prend toutes sortes de dispositions différentes, mais qui rentrent les unes dans les autres, quant aux conditions de l'équilibre.

Quoi qu'il en soit, la force F étant appliquée tangentiellement à un cercle de rayon R (fig. 208), son plan perpendiculaire à l'axe du tour coupera l'arbre suivant un autre cercle égal à celui qui correspond à la section du plan qui contient la résistance Q. Si E est le point d'application de cette résistance, nous pouvons imaginer par ce point et par l'axe un nouveau plan qui rencontre le petit cercle contenu dans le plan de la force F, en un point E' situé de l'autre côté du treuil et symétrique par rapport au point E. Appliquons au point E' deux forces Q' et Q_1, égales et parallèles à Q, et qui soient directement opposées. Ces deux forces qui s'entre-dé-

truisent ne fatigueront pas la roue, et ne sauront en rien altérer le mouvement. De plus, la force Q_1 et la force Q se composeront en une seule S, égale au double de l'une d'elles ou à $2Q$ et qui passera par l'axe, en sorte qu'elle ne pourra faire aucun travail. L'équilibre est donc réduit à celui des deux forces F et Q', égale à Q, qui sont ainsi ramenées dans un seul plan perpendiculaire à l'axe du tour. En suivant la marche du numéro 127, on verra que, sans la considération du frottement, les travaux de ces forces doivent être égaux, ou qu'en appelant s_1 le petit arc décrit par le tour à l'unité de distance, et R, R' les distances des forces F et Q' ou Q à l'axe, on a

$$FRs_1 = QR's_1, \quad \text{ou} \quad FR = QR'.$$

L'équilibre exigeant que la résultante des forces F et Q' ou Q passe par l'axe ou que l'on reproduise ces forces en C (fig. 209), on aura alors les forces F, Q et S, toutes trois appliquées à l'axe, et qui pourront être, chacune, décomposées en deux forces parallèles appliquées aux centres des tourillons A et B. De cette manière on aura deux groupes de forces dont les unes concourent au premier tourillon et les autres au second. Appelons N_1 la résultante des unes et N_2 la résultante des autres, $f \cdot N_1$ sera le frottement exercé sur le tourillon A, et $f \cdot N_2$ le frottement exercé sur le tourillon B. Leurs quantités de travail seront d'ailleurs $rs_1 f \cdot N_1$ et $rs_1 f \cdot N_2$, et devront être vaincues par le travail de la puissance F, en outre du travail de la résistance Q. Donc, on a

$$FRs_1 = QR's_1 + rs_1 fN_1 + rs_1 f \cdot N_2,$$

ou, en divisant par s_1,

$$FR = QR' + rfN_1 + rfN_2.$$

Ces calculs de la décomposition des forces F, Q' et S ou $2Q$, en couples de composantes parallèles appliquées aux tourillons A et B, prouvent que, lorsque ceux-ci ont des rayons égaux r, le résultat est le même que celui qui est relatif à un seul tourillon pressé par la résultante de toutes les forces extérieures données, et transportées en un même point ; on comprendra d'ailleurs parmi ces forces le poids de tout le système du tour, et, en désignant par N cette ré-

sultante totale, on aura

$$F \cdot R = QR' + r \cdot f \cdot N.$$

Ce qu'il est essentiel de retenir des raisonnements qui viennent d'être exposés, c'est que dans le calcul on peut agir comme si les forces étaient dans un seul plan, quelle que soit la distance de ceux qui les contiennent en réalité, et calculer le frottement comme s'il n'y avait qu'un seul tourillon. Quand l'axe des roues est vertical, le poids P de ces roues porte sur le pivot inférieur qui fait fonction de tourillon, et produit sur le fond de la crapaudine un frottement fP dont le bras de levier est (2e partie, 120) deux tiers du rayon de ce pivot que j'appellerai r'. On comprendra donc parmi les moments des résistances le moment $\frac{2}{3} fPr'$. Le reste rentrera dans le cas général que nous avons détaillé.

132. *Roues combinées.* — Les roues dans les machines sont souvent combinées entre elles de manière à se transmettre le mouvement selon des conditions données. On connaît trois moyens principaux pour ces combinaisons dans le cas de deux roues à axes parallèles : 1° l'emploi de cordes, de courroies ou de chaînes sans fin ; 2° le contact naturel et le roulement des couronnes ou tambours de ces roues ; 3° l'engrenage de dents ou de courbes en saillies fixées aux couronnes. Dans ces circonstances les puissances, en transmettant leur action d'une pièce à l'autre, font naître des frottements qu'il est utile de connaître, parce qu'ils ne sauraient être toujours négligeables.

133. *Résistances dues aux tensions des courroies.* — Lorsque deux tours se communiquent entre eux par une corde ou courroie sans fin (fig. 210), la puissance F est appliquée à l'un d'eux ; son action se transmet par une des branches de la corde à l'autre tour sur lequel la résistance opère. En désignant par T la tension de la branche de corde qui tire sur le deuxième tour et par t la tension de l'autre branche qui cède, et en considérant ce qui se passe sur ce dernier tour, on reconnaît qu'il ne tourne qu'en vertu de la différence $T - t$ des tensions, et qu'il est ainsi sollicité d'une part par la puissance $T - t$ et de l'autre par la résistance Q. Faisant d'abord abstraction du frottement, on trouvera cette différence $T - t$ par l'égalité de sa quantité de travail à celle de Q. De cette ma-

nière on n'obtient, et d'une manière approchée, que la différence des tensions, et non les tensions individuelles sur chaque branche.

On remarquera toutefois que quand le système est en mouvement, la branche qui entraîne le tour auquel la résistance est appliquée, est plus tendue que celle qui cède, et que les tensions sont les mêmes quand le système est au repos; de sorte qu'il est permis de supposer que l'une s'augmente de ce dont l'autre diminue, ou que la première a sur la tension primitive un excès précisément égal à celui de la tension primitive sur la seconde. Donc, la différence entre les tensions T et t est double de cet excès, et si l'on appelle celui-ci K, la différence approchée $T - t$ déjà obtenue précédemment pourra être représentée par $2K$. Si nous désignons par T' la tension avec laquelle la corde ou la courroie a été primitivement bandée, nous aurons

$$T = T' + K, \quad \text{et} \quad t = T' - K.$$

D'après cela, on voit que si l'on connaissait T', on en déduirait T et t; puis regardant la pression exercée comme la résultante N des trois forces T, t et Q, on égalerait de nouveau le travail de $T-t$ à celui de Q augmenté du travail absorbé par le frottement du deuxième tour sur son tourillon proportionnel à la pression ainsi calculée.

On considérerait de même le travail de $T-t$ ainsi obtenu comme le travail à vaincre sur le premier tour par la puissance F, laquelle aurait également à vaincre le travail consommé par le frottement autour de son tourillon; ce frottement serait d'ailleurs lui-même proportionnel à la résultante des forces F, T et t; et l'on verra enfin que le travail de cette puissance est égal au travail de Q augmenté des quantités de travail absorbées par les frottements sur l'un et l'autre tourillon. Mais cette connaissance dépend évidemment de celle de la tension primitive T'. Or, cette tension est arbitraire; il suffit qu'elle soit seulement capable d'entraîner le deuxième tour dans le mouvement imprimé par le premier à la corde. Il est vrai qu'en augmentant outre mesure cette tension primitive, ce serait aussi augmenter le frottement des tourillons qui croît avec cette dernière.

En général, la tension primitive de la courroie doit être telle que le deuxième tour ne puisse glisser sous l'action de la résistance Q, ou que cette dernière soit moindre que le frottement de la corde ou courroie sur ce même tour. Soit R' le rayon de l'arbre sur lequel

la résistance Q agit, et R_1' le rayon du tambour qu'embrasse la corde et qui est monté sur cet arbre; $\frac{QR'}{R_1'}$ sera la force qui, appliquée au rayon R_1', devra produire le même effet que Q, et cette force devra être au plus égale au frottement de la courroie pour qu'il n'y ait pas glissement. Remarquons que la courroie est sollicitée par une résistance $T' - K$ et par une puissance $T' + K$, et que le frottement de la courroie sur le tambour de rayon R_1' et sur l'arc égal à s' (2e partie, 112) a pour expression

$$(T' - K)\left(1 + \frac{fs'}{nR_1'}\right)^n - (T' - K).$$

On devra donc avoir l'égalité

$$\frac{QR'}{R_1'} = (T' - K)\left\{\left(1 + \frac{fs'}{nR_1'}\right)^n - 1\right\},$$

de laquelle on déduira la valeur de T'. Dès lors il n'y a plus aucune difficulté pour calculer T, t, les frottements exercés sur les tourillons, et leurs quantités de travail. En un mot, on aura la quantité de travail de la puissance qui sera égale à la somme de ces dernières et de celle de la résistance. La considération de la tension primitive d'une corde ou courroie sans fin n'est pas indifférente, parce qu'elle est tendue avec un effort qui n'est pas moindre que 500 à 600 kilogr. (*Exemple : scierie de M. de Neuville*).

134. *Résistance des chaînes.* — Dans le calcul précédent de la quantité de travail de la puissance, on n'a pas eu égard à la résistance de la courroie. Si elle est mince, sa roideur est peu de chose; la petite épaisseur de cette courroie la rend flexible, et susceptible d'une résistance que l'on peut négliger sans qu'il en résulte une erreur sensible. Si c'est une corde, la roideur ne se manifeste qu'aux points des tambours où elle s'enroule, et nullement vers ceux où la corde se déroule. Ainsi, au point a cette résistance sera $\frac{K + IQ}{2R'}$; au point b elle sera $\frac{K' + I't}{2R_1'}$; au point c elle sera nulle; elle a lieu au point d avec une intensité égale à $\frac{K' + I'T}{2R_1}$; enfin elle est nulle aux points e et f. Ces résistances ainsi évaluées donneront

lieu d'ailleurs à des quantités de travail à comprendre parmi celles que doit surmonter la puissance F.

Si la communication est établie au moyen d'une chaîne sans fin, les articulations de cette chaîne seront regardées comme des tourillons qui tournent sur des crapaudines, en même temps que celles-ci sont emportées dans le mouvement des tambours. Dans ce cas l'angle décrit par chaque boulon d'articulation dans sa crapaudine est égal à celui qui est décrit par le tambour, en sorte que si s_1 est l'arc décrit à l'unité de distance par ce dernier et que r soit le rayon de chaque boulon, rs_1 est le chemin décrit par le point d'application du frottement de la chaîne contre son boulon. Quant au frottement, il est proportionnel à la tension qui a lieu dans la partie de la chaîne qui commence soit à s'enrouler sur le tambour, soit à se dérouler. Ainsi, il sera $f \cdot t$ du côté où la branche de la chaîne sans fin éprouve une tension t; et il sera $f \cdot T$ du côté où l'autre branche est tirée avec une force T. On comprendra alors les quantités de travail $f \cdot t \cdot rs_1$ et $f \cdot T \cdot rs_1$ parmi celles qui doivent être vaincues conjointement avec la résistance utile.

135. *Résistance des roues à couronne, et des roues d'engrenage.* — Nous avons dit que les roues se transmettent le mouvement en roulant l'une sur l'autre. Il faut que leurs circonférences soient garnies chacune d'une couronne de buffle, que l'on rapproche l'une contre l'autre au moyen d'une pression extérieure convenable. Désignons par T (fig. 211) l'effort mutuel qu'elles exercent l'une contre l'autre. Il est évident qu'il agira de haut en bas sur la deuxième roue pour faire monter le poids Q, et que son travail sera égal au travail de ce poids augmenté de celui qu'absorbe le frottement du tourillon de la roue que l'on considère. La pression sur ce tourillon sera d'ailleurs la résultante des forces T et Q et de la pression extérieure transportée parallèlement sur le centre C. Pour avoir la puissance F de la première roue, on l'obtiendra en observant que son travail est égal au travail de la force T déterminé sur la deuxième roue, plus le travail consommé par le frottement du tourillon C. Ce frottement est d'ailleurs proportionnel à la résultante des forces F, T et de la pression extérieure transportée parallèlement sur le centre C. On voit d'ailleurs que le travail de la puissance F équivaut à celui de la résistance Q augmenté des quantités de travail consommées par les frottements autour des

centres C et C'. On n'a pas tenu compte du frottement des couronnes de buffle l'une contre l'autre, parce que ce frottement est de la deuxième espèce et qu'il peut être négligé.

Supposons maintenant deux roues portant à leur circonférence des dents qui engrènent l'une dans l'autre (fig. 212). Quoique celles-ci se touchent par des points qui varient à chaque instant, le mouvement est le même que si ces roues se pressaient immédiatement sur leurs couronnes moyennes. Les rayons de ces dernières s'obtiennent en partageant l'intervalle CC' des centres en parties proportionnelles aux nombres des dents, ou réciproquement proportionnelles aux nombres des tours que les deux roues font simultanément. Soit T le point qui satisfait à cette condition sur l'intervalle CC', CT et $C'T$ seront les rayons cherchés. En appelant comme tout à l'heure T l'effort mutuel de ces deux couronnes, on le déterminera par la deuxième roue et par la condition que sa quantité de travail vainque celle de Q et du frottement exercé autour du tourillon C'. Or, la puissance F n'a pas seulement à vaincre le travail de T et celui du frottement autour de C, il faut encore qu'elle surmonte le frottement des dents les unes contre les autres, lequel sera fT. Toutefois, puisque le point de contact de ces dents change continuellement, le bras de levier de ce nouveau frottement est nécessairement aussi variable. En cherchant la quantité de travail consommée par le frottement des dents les unes contre les autres, on a reconnu qu'elle était la même que si ce frottement s'exerçait à la circonférence C avec un bras de levier égal au rayon de cette roue, et avec une intensité constante et égale à $fT\,\frac{m+m'}{mm'}\,\pi$. Par conséquent, on tiendra compte de cette résistance, en substituant à T dans le calcul de F la résistance $T+fT\,\frac{m+m'}{mm'}\,\pi$, ou T', et en considérant la pression exercée en C et à laquelle le frottement de ce tourillon est proportionnel, comme étant la résultante des forces F et T' transportées parallèlement sur ce centre.

XIII.

CALCULS RELATIFS A LA VIS ET A SON ÉCROU.

136. ***Description succincte de la vis à filets carrés et de son écrou.*** — Pour se faire une idée de la forme d'une vis à filets carrés, qu'on se représente un cylindre *BCED* (fig. 213) plein à base circulaire qu'on nomme noyau, et dont l'axe AA' est vertical. Si on fixe à la surface de ce noyau un rectangle *abcd* dont le plan contienne l'axe AA' et qui n'est autre chose que le profil du filet de la vis, il est évident que, par suite d'un mouvement de rotation autour de l'axe AA', ce rectangle engendrera un anneau, tant qu'il demeurera à la même hauteur. Mais si en même temps qu'il tourne, il descend le long de l'axe de quantités proportionnelles aux arcs décrits, ou si pour un quart de révolution, il est descendu du quart de la hauteur verticale que ce profil parcourt pendant une révolution complète, on aura ce qu'on appelle un filet carré en saillie sur le noyau. Chacun des sommets du rectangle a décrit une courbe rampante qu'on nomme ***hélice,*** et qui jouit de la propriété que l'un de ses points étant pris pour origine, tant par rapport à la courbe elle-même qu'à sa projection sur un plan horizontal quelconque, les hauteurs de tous ses points au-dessus du premier sont entre elles comme les arcs décrits horizontalement à partir de ce point d'origine. On nomme encore ***pas*** de la vis la hauteur dont le profil s'est élevé après avoir parcouru une circonférence entière autour de l'axe AA'; cette hauteur est encore mesurée par l'intervalle aa' entre les surfaces supérieures de deux filets consécutifs. Chaque surface supérieure se compose d'un faisceau d'hélices qui toutes ont le même pas, mais qui appartiennent à des cylindres de rayons différents. Celle qui est tracée sur le noyau est celle dont le rayon est le plus petit, tandis que le rayon le plus grand appartient à l'hélice engendrée par le sommet extérieur a du rectangle. La pente ou la roideur d'une hélice sur une même surface du filet va donc en diminuant du noyau à l'arête extérieure du filet. Après s'être ainsi figuré la génération de la vis, il faut en outre concevoir que l'on taille en creux un autre corps de la même manière que la vis est taillée en plein ; c'est ce qu'on nomme l'écrou de cette

dernière. Dès lors l'écrou et la vis pourront s'adapter, et ils auront nécessairement l'un sur l'autre un double mouvement de rotation et de translation. Dans tous les cas, si l'on imprime un simple mouvement de rotation à l'un de ces corps, l'autre sera posé sur la surface supérieure d'un filet du premier comme sur un plan incliné.

137. *Mode d'action de la vis à filets carrés ; son équilibre indépendamment des frottements.* — Pour élever des fardeaux ou produire du travail, on emploie le système de la vis et de son écrou de deux manières, soit en fixant invariablement l'écrou, et en laissant la vis tout à fait libre, soit encore en fixant invariablement la vis, et en laissant à l'écrou la faculté de se mouvoir. Dans le premier cas, c'est-à-dire dans celui où l'écrou est fixe et la vis mobile, on agit sur cette dernière au moyen de leviers R (fig. 214) embarrés dans sa tête ; non-seulement alors elle tourne dans son écrou, mais encore elle soulève le poids Q attaché à son extrémité.

Mais quand la vis est fixe, et que l'écrou est mobile, la puissance est alors appliquée sur des leviers R (fig. 215) insérés dans des ouvertures pratiquées à la surface de l'écrou ; et ce dernier, en tournant autour de la vis, chemine dans le sens de la longueur de son axe et soulève en même temps la charge Q'.

Dans tous les cas, en appelant F la puissance et Q la résistance à vaincre, il est évident que la première doit agir dans le plan du mouvement de son levier, ou perpendiculairement à l'axe de ce mouvement, comme dans le treuil ; et si l'on fait abstraction du frottement, son travail doit être égal à celui de la résistance produit dans le même temps. Or, remarquons que lorsque cette dernière s'élève d'une certaine hauteur, le point d'application de la puissance a dû parcourir un certain arc, et qu'en vertu de la propriété de la vis, le rapport entre ces deux quantités est toujours le même au bout d'un temps quelconque, quels que soient la hauteur dont a monté la résistance, et l'arc décrit par la puissance, pourvu que cette hauteur et cet arc soient simultanés. Nous pouvons donc considérer ce qui a lieu dans une révolution complète. Or, la puissance a décrit une circonférence, pendant que la résistance s'est élevée d'un pas de vis ; et si on appelle h la hauteur de ce pas, et R la distance du point d'application de la puissance à l'axe, h et $2\pi R$ seront les chemins décrits par la résistance Q et par la puissance F dans leurs propres directions. Ainsi, $F \cdot 2\pi R$ sera

le travail de la puissance et $Q \,.\, h$ celui de la résistance au bout d'une révolution complète; et l'on aura pour condition d'équilibre, indépendamment des frottements,

$$F \times 2\pi R = Q \times h, \quad \text{ou} \quad F : Q :: h : 2\pi R :$$

ce qui indique que la puissance est à la résistance comme le pas de la vis est à la circonférence décrite par le point d'application de la puissance.

138. *Équilibre de la vis à filets carrés en tenant compte des frottements.* — Nous venons de dire que l'on pouvait comparer l'écrou qui marche sur une vis fixe, ou une vis sur son écrou, à un corps posé sur un plan incliné. Toutefois à la puissance F destinée à faire monter le corps sur le plan, et qui est horizontal, il convient d'en substituer une autre horizontale comme elle, et qui, étant capable du même travail, est immédiatement appliquée sur l'hélice dont l'inclinaison est celle du plan incliné que l'on considère. Il faut d'ailleurs se rappeler que toutes les hélices d'un même filet ont des inclinaisons d'autant plus roides que les cylindres auxquels elles appartiennent ont des rayons plus petits, et que l'inclinaison qui représente simultanément les inclinaisons de ces diverses hélices correspond à celle de l'hélice moyenne du filet et qui a pour rayon une longueur que je désignerai par r. Or, la puissance horizontale capable du même travail que F et appliquée à la distance r de l'axe du mouvement sera telle que l'on aura $2\pi \,.\, F' \,.\, r = 2\pi \,.\, F \,.\, R$ (R étant toujours la longueur du bras de levier de la véritable puissance F).

Concevons maintenant que le cylindre de rayon r soit développé sur un plan; dans ce développement le cercle de sa section perpendiculaire aux arêtes va devenir une ligne droite, et celles-ci des perpendiculaires à cette droite; et comme les hauteurs des points de l'hélice de ce cylindre moyen ne sont nullement altérées par l'effet de ce développement, et qu'elles sont proportionnelles aux arcs correspondants, cette hélice deviendra une droite inclinée ayant pour base AC (fig. 216) le développement du cercle $2\pi r$, et pour hauteur BC le pas de vis h. Cela posé, la puissance F' horizontale devant élever le poids Q sur un plan incliné dont la base et la hauteur sont les quantités précédentes, cette puissance F' et ce poids Q seront, pour que l'équilibre ait lieu sans la considéra-

tion du frottement (2e partie, 103), dans le rapport de la hauteur à la base de ce plan. Donc, on aura

$$F' : Q :: h : 2\pi r,$$

et, par conséquent, $2\pi r . F' = Q . h$;

ou bien, à cause de $2\pi r . F' = 2\pi R . F$, on trouvera encore

$$2\pi R . F = Q . h,$$

relation qui conduit à la même conclusion que tout à l'heure.

Cette manière d'envisager le mouvement de la vis s'applique très-facilement au cas où l'on veut faire entrer en considération les frottements. En effet, on a vu que, dans le cas d'un plan incliné, toute force horizontale F' capable d'y élever un poids Q, et de vaincre en même temps la résistance du frottement, était donnée (2e partie, 108) par la formule $F' = \frac{Q(BC + f . AC)}{ac - f . bc}$. Nous ferons remarquer que, dans cette formule, le coefficient f est le rapport du frottement à la pression, relatif aux surfaces des substances en contact, c'est-à-dire ici de la vis et de son écrou, que BC et AC (fig. 217) représentent des fractions qui expriment le rapport de la hauteur et de la base du plan à sa longueur, que ac et bc sont des fractions exprimant les rapports des composantes parallèles et perpendiculaires au plan, à la force horizontale motrice F prise pour unité, et qu'enfin le terme $f . bc$ dans le dénominateur est pris négativement conformément à l'observation qui a été faite au même n° (108). Or, le triangle abc, qui représente la force motrice ab prise pour unité et ses deux composantes ac et bc, est semblable au triangle ABC, parce que l'angle cab est égal à l'angle BAC et l'angle cba égal à l'angle CBA. Donc, la fraction cb sera égale à la fraction CB, et la fraction ca à la fraction CA. Faisant cette substitution dans F', nous aurons

$$F' = \frac{Q(BC + f . AC)}{CA - f . BC}.$$

Il est évident encore que les longueurs BC et AC sont toutes deux proportionnelles au pas h et à la circonférence $2\pi r$ de l'hélice moyenne dont l'inclinaison est celle du plan incliné que l'on a substitué à la surface du filet. Cela résulte immédiatement de la

propriété qu'a cette hélice, que ses éléments en projection horizontale et en projection verticale sont toujours dans un rapport constant. On pourra donc mettre h et $2\pi r$ à la place de BC et de AC: car cela revient à multiplier les deux termes de la fraction qui entre dans l'expression de F', par le rapport commun des deux dernières grandeurs aux premières. On aura donc évidemment

$$F' = \frac{Q\,(h + f\,.\,2\pi r)}{2\pi r - f\,.\,h},$$

et, par suite,

$$2\pi r\,.\,F' = \frac{Q\,(h + f\,.\,2\pi r)}{1 - \dfrac{f\,.\,h}{2\pi r}} = Q\,.\,h + f\,.\,Q\,\frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh}.$$

Mais on a toujours $2\pi R\,.\,F = 2\pi r\,.\,F'$, donc on aura, en définitive,

$$2\pi R\,.\,F = Q\,.\,h + f\,.\,Q\,\frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh},$$

relation qui nous apprend que la quantité de travail $2\pi R\,.\,F$ de la puissance est plus grande que la quantité de travail $Q\,.\,h$ de la résistance, et qu'elle est augmentée de toute celle qu'absorbe le frottement, c'est-à-dire de $f\,.\,Q\,\dfrac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh}$.

189. *Dimensions à donner à la vis à filets carrés; influence de son frottement.* — Si l'on fait attention que dans l'expression $f\,.\,Q\,\dfrac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh}$ de la quantité de travail absorbée par le frottement de la vis à filets carrés, le numérateur croît plus rapidement que le dénominateur quand on fait augmenter $2\pi r$, c'est-à-dire la circonférence ou le rayon de l'hélice moyenne, on reconnaît sans peine que ce rayon influe pour beaucoup à l'égard de ce travail nuisible. C'est pourquoi l'on doit tâcher de le diminuer le plus possible dans chaque cas, sans rien ôter à la solidité de la vis. Soit bo (fig. 218) le rayon de l'hélice intérieure ou du noyau, ao celui de l'hélice extérieure; on donne ordinairement à la saillie

ab des filets une longueur égale à son épaisseur ad mesurée dans le sens de l'axe, et pour la facilité de l'exécution on fait les vides égaux aux pleins, c'est-à-dire que $ad = ad'$. D'après cela, s'il n'y a qu'un filet de vis, ou si les profils $abcd$, $a'b'c'd'$ consécutifs appartiennent au même filet, le pas aa' sera égal à $2ad = 2ab$: autrement dit, la saillie du filet est égale à la moitié du pas. S'il y avait deux filets distincts, c'est-à-dire, si a', a'' appartiennent au même filet, le pas a' a'' serait double du précédent ou $4ab$. La saillie serait alors le quart du pas, etc. On emploie ainsi plusieurs filets de vis, afin de pouvoir faire varier le pas sans changer la grosseur du noyau qui a des dimensions déterminées, ainsi qu'on va le voir.

Les vis à filets carrés étant ordinairement en fer, et les écrous en cuivre, le noyau et les filets doivent avoir une solidité suffisante pour ne pas se déformer sous le poids Q de la charge qui les sollicite parallèlement à l'axe. Or, la surface de rupture du noyau étant $\pi \cdot \overline{bo}^2$, et chaque millimètre carré de cette surface pouvant porter moyennement sans perdre son élasticité, 6 kilogr. environ ; on aura $6\pi \cdot \overline{bo}^2 = Q$; d'où l'on tirera la valeur de bo en millimètres. Admettant ensuite que l'écrou ne doit pas embrasser moins de trois filets successifs afin que l'engrènement soit convenable et qu'il s'use moins vite, son épaisseur sera égale à $6ad$ ou $6ab$, et la surface de rupture des filets le long du noyau sera $\frac{6ab}{2} \cdot 2\pi \cdot bo$, à cause qu'il y a autant de plein que de vide. Comme la charge pourrait agir tout entière sur les extrémités a, a' des filets et qu'elle aurait ainsi un bras de levier double de celui de la surface de rupture cb, $c'b'$ de ces filets, on ne devra prendre que la moitié de la quantité ci-dessus, c'est-à-dire $3ab \cdot \pi \cdot bo$; la résistance de la matière (cuivre et étain) qui compose l'écrou, différant peu de celle du fer, on devra égaler la quantité ci-dessus à la surface $\pi \cdot \overline{bo}^2$, de rupture du noyau ; d'où l'on tirera la saillie

$$ab = \frac{1}{3}\, bo \text{ environ.}$$

Il est évident que ces dimensions ne sont pas tellement absolues qu'on ne puisse aucunement s'en écarter ; seulement elles nous paraissent les plus convenables en général relativement aux hypothèses qui ont été faites. Très-certainement l'usure et le frottement

seraient moindres en augmentant la hauteur de l'écrou, et en faisant la saillie ab plus petite que ad, par exemple moitié. Quoi qu'il en soit, en reprenant nos premières hypothèses, le rayon bo ou celui de l'hélice intérieure étant de $3ab$, le rayon de l'hélice extérieure sera $4ab$; donc le rayon moyen r sera égal à leur demi-somme, ou à $\frac{7}{2}ab$, ou enfin à $\frac{7}{4}h$, à cause que la saillie ab doit être moitié du pas h. Faisant cette substitution dans le travail consommé sur la vis par le frottement au bout d'une révolution complète, ou dans $fQ\frac{h^2+4\pi^2r^2}{2\pi r-fh}$, on trouve, toute réduction faite, et en remplaçant π par $\frac{22}{7}$, $\frac{122f.Qh}{11-f}$.

Supposons l'écrou en cuivre et la vis en fer nous pourrons prendre (deuxième tableau du n° 106 ci-dessus) $f=0,17$, ce qui se rapporte au cas où les surfaces ont longtemps frotté et se sont polies; on aura donc, pour la quantité de travail absorbée,

$$\frac{122\,.\,0,17}{11-0,17}\,Qh=1,92\times Qh.$$

Ainsi, la condition d'équilibre de la vis à filets carrés, en tenant compte des frottements, donne

$$2\pi R\,.\,F=Qh+1,92\,.\,Qh=2,92\,.\,Qh,$$

tandis que, si le frottement n'existait pas, on aurait simplement $2\pi R\,.\,F=Qh$. D'où l'on voit que ce frottement occasionne un surcroît de travail mesuré par 1,92, ou presque double du travail utile Qh pour la vis à filets carrés.

140. *Frottements des épaulements et pivots des vis.* — Jusqu'ici on a considéré la vis ou l'écrou comme tout à fait libre, tandis que l'un ou l'autre est tout à fait fixe : autrement dit, la puissance en tournant s'élève en même temps que la vis ou l'écrou, et alors il n'y a d'autres résistances en sus du fardeau à soulever, que le frottement qui a lieu sur les filets. Mais il arrive souvent ou que la vis fixée à ses extrémités n'a qu'un mouvement de rotation, ou que l'écrou appuyé sur une base stable tourne autour de la vis en restant à même hauteur. Dans le premier cas, et c'est celui d'une barre à deux écrous traversée par deux vis qui tournent sur deux pivots

et dans deux colliers supérieurs au moyen de barres fixées à leurs têtes (fig. 219), l'écrou chemine suivant une direction verticale; sa charge se répartit en deux parties pour chaque vis, et si on nomme Q cette charge partielle, chaque pivot est chargé d'un poids Q, qui y produit un frottement fQ, dont le bras de levier moyen (2e partie, 120) est les $\frac{2}{3}$ du rayon ρ du pivot. La quantité de travail de ce frottement au bout d'une révolution complète sera $2\pi \cdot f \cdot Q \times \frac{2}{3}\rho$, et sera ajoutée à toutes les autres résistances déja expliquées précédemment, et que devra vaincre la puissance. On aura alors sur chaque vis

$$2\pi R \cdot F = Q \cdot h + fQ\,\frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh} + 2\pi \cdot f \cdot Q \cdot \frac{2}{3}\rho.$$

Lorsqu'au contraire, l'écrou tourne autour de la vis en demeurant à la même hauteur (fig. 220), la vis s'élève verticalement en entraînant la charge qu'elle supporte; les résistances à vaincre sont la charge, le frottement des filets de la vis contre ceux de l'écrou, et enfin celui de l'écrou contre la base fixe qui le supporte. Cette circonstance a lieu dans la manœuvre des vannes, des grilles de pont; l'écrou pressé contre des supports fixes porte à sa partie inférieure un anneau qui glisse dans une rainure circulaire, et est mis en mouvement au moyen de leviers embarrés dans les faces verticales. La surface par laquelle cet écrou frotte est un anneau; la charge Q produit sur cet anneau un frottement fQ dont le bras de levier moyen (2e partie, 120) est égal au rayon moyen ρ' de cet anneau. La quantité de travail de cette résistance étant $2\pi \cdot \rho' \cdot f \cdot Q$, il faudra l'ajouter à toutes les autres pour en déduire celle de la puissance.

Pour faire voir combien ce frottement peut être considérable, nous supposerons une charge de 3000 kilogr. et le coefficient du frottement de l'anneau dans sa rainure égal à $\frac{1}{10}$; on aura $fQ = 300$ kilogr. Si le rayon moyen de l'anneau est 0,50, le moment de cette seule résistance sera $300 \times 0{,}50$. Appelons x le surcroît d'effort à exercer par la puissance pour la vaincre, et imaginons que la puissance agisse avec un bras de levier de 1,50, on aura

$$x \times 1{,}50 = 300 \times 0{,}50, \text{ ou } x = 100^k.$$

L'effort ordinaire d'un homme qui agit en poussant étant moyen-

nement de 10 kilogr., on voit que le seul frottement de l'écrou par son anneau exige dix hommes de plus à la manœuvre. Aussi, doit-on chercher à éviter toutes les dispositions dans lesquelles c'est l'écrou qui tourne. Quand on y est contraint, on en diminue les inconvénients, soit en imprégnant d'huile ou de graisse la rainure circulaire, soit en faisant rouler l'anneau sur des galets qui réduisent le travail de ce frottement (2e partie, 124) dans le rapport du rayon de leur essieu à celui de leur circonférence. Encore ces galets s'usent-ils souvent inégalement, et n'offrent que peu d'avantages. La meilleure manière est d'appuyer la vis sur des pivots tournants, et de faire monter l'écrou dans le sens de son axe. C'est ce que l'on pratique dans la plupart des pressoirs; les vis reçoivent leur mouvement de rotation en appliquant des hommes à des roues fixées aux têtes des vis.

141. *Vis triangulaires.* — Les grosses vis que l'on emploie dans les pressoirs sont toujours à filets triangulaires (fig. 221). Leur génération ne diffère de celle des vis à filets carrés, qu'en ce que leur profil est un triangle isocèle *abc* dont la base *bc* est attachée au noyau, comme le rectangle de ces dernières; mais il s'élève encore dans le sens de l'axe, de hauteur proportionnelle aux arcs décrits autour du noyau. L'équilibre de cette vis ne saurait d'ailleurs s'obtenir par des considérations aussi simples que les précédentes. Toutefois le calcul conduit à une relation qui dépend encore de l'hélice moyenne du filet triangulaire : cette relation est même tout à fait semblable à celle des vis à filets carrés, si ce n'est qu'au lieu du coefficient du frottement f, on le remplace par $\frac{f}{m}$. La quantité m exprime le rapport de la hauteur *ad* du triangle générateur à son côté *ab*, et elle est en général plus petite que l'unité, parce que toute perpendiculaire *ad* est moindre que l'oblique *ab* qui part du même point *a*. Le seul cas où m soit égal à l'unité est celui où le côté du filet *ab* est perpendiculaire au noyau; ce qui revient à la circonstance du filet carré.

Ainsi, dans le cas de l'équilibre de la vis à filets triangulaires, r étant le rayon de l'hélice moyenne, h le pas de la vis, R le bras de levier de la puissance, on a

$$2\pi . R . F = Qh + \frac{f}{m} Q \frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh}.$$

Qh étant le travail nécessaire pour soulever la charge, ... $\frac{f}{m} Q \frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh}$ est évidemment celui que les frottements des filets absorbent dans la vis à filets triangulaires ; et il est plus considérable que pour les filets carrés, attendu que m est moindre que l'unité. Ce frottement diminue d'ailleurs à mesure que m est plus grand, ou que la perpendiculaire ad augmente. Donc les vis dont la saillie est plus considérable frottent moins que celles dont la saillie est moindre.

Pour bien se rendre compte de l'influence des frottements de ces vis, il faut avoir quelque idée sur la forme qui leur est la plus convenable. En général, dans la vis à filets triangulaires en bois dont la dureté n'est pas très-grande, comme le chêne, l'orme, etc., on prend ordinairement pour triangle générateur abc, un triangle isocèle rectangle en a. Lorsque la vis est en bois dur tel que le buis, le cormier, le sorbier, le charme, on prend pour le profil abc, un triangle équilatéral ; on en agit de même quand la vis est en fer et l'écrou en cuivre : dans tous les cas, le pas est mesuré par la base $bc = aa'$ du triangle s'il n'y a qu'un seul filet, par deux fois cette base s'il y en a deux, etc. Quant à l'épaisseur de l'écrou, elle est égale à trois fois aa' ; enfin la saillie ad est le tiers du rayon do du noyau, et ce dernier se détermine de la manière déjà indiquée (2e partie, 139), en observant que pour le cas du bois, on ne doit pas supposer la résistance supérieure à $0^k,80$ par millimètre carré. Imaginons, par exemple, une vis dont le profil est un triangle équilatéral. On a d'abord

$$ad = \sqrt{\overline{ab}^2 - \overline{bd}^2} = \sqrt{h^2 - \frac{h^2}{4}} = \frac{h}{2}\sqrt{3} = 0{,}866 \times h.$$

Le rayon intérieur do du filet est égal à $3ad$, et le rayon extérieur ao à $4ad$: le rayon moyen r est donc $\frac{ao + do}{2}$, ou

$$\frac{7}{2} ad = \frac{7}{2} \times 0{,}866 \,.\, h = 3{,}031 \,.\, h.$$

$$m = \frac{ad}{ab} = \frac{h \times 0{,}866}{ab} = 0{,}866.$$

Si nous faisons ces substitutions dans le travail du frottement, et

qu'on prenne $f = 0{,}17$, nous trouverons pour ce travail $3{,}78 \,.\, Qh$. Donc, on aura pour l'équilibre de la vis à filets triangulaires

$$2\pi \,.\, R \,.\, F = Qh + 3{,}78 \,.\, Qh = 4{,}78 \,.\, Qh ;$$

ce qui indique que le travail de la puissance est plus de quatre fois et demie ce qu'il serait sans l'existence du frottement des filets.

Les détails de construction qu'on vient de donner ne concernent que les vis destinées à supporter de grands efforts. Dans les instruments de précision, dont les vis sont en fer ou en acier, on donne à la hauteur *ad* du triangle générateur jusqu'à deux et même trois fois la base *bc;* c'est afin de rendre la surface frottante plus grande, et l'usure moindre, en sorte que l'engrenage demeure invariable. Les vis à bois ou clous à vis offrent également des filets très-aigus, dans la vue de les faire mordre facilement, et d'augmenter la force nécessaire pour les arracher. Les vis et les écrous se creusent d'ailleurs, comme on sait, au moyen de tarauds ou ciseaux lorsque la matière est un métal, et de gouges d'acier triangulaires quand la matière est du bois; le mouvement des gouges ou tarauds est guidé par une vis ou de toute autre manière, et l'évidement ne se fait que par portion et en enfonçant successivement l'outil.

142. *Vis sans fin.* — La vis sans fin se compose d'une vis à filets carrés dont les filets engrènent continuellement dans les dents d'une roue. Le plan milieu de cette roue comprend l'axe EH (fig. 222) de la vis que nous supposerons vertical, et les dents ont sur le cylindre de cette roue une inclinaison telle qu'elles se présentent à la vis parallèlement à la tangente du filet qui répond au point de contact; les arêtes de ces dents sont donc obliques par rapport à l'axe de la roue. Ordinairement la puissance F est appliquée à la tête de la vis par le moyen d'une manivelle à bouton, et lui imprime sans l'élever un mouvement de rotation. La surface des filets se présente alors successivement aux dents de la roue, et les force à s'abaisser; la roue est, par conséquent, entraînée, et soulève un poids Q suspendu à une corde qui s'enroule autour d'un tambour énarbré sur le même axe que la roue. Cela posé, ne considérons que ce qui se passe dans le plan milieu de la roue qui comprend l'axe EH de la vis; le profil de la surface frottante des filets sera une perpendiculaire mb à cet axe, en sorte que l'engrenage est celui d'une crémaillère verticale à dents droites et d'une

de l'axe,

$$P \times AB = \overline{Q \times AC} + r \cdot f \cdot N.$$

Multipliant par s_1, ou par l'arc parcouru à l'unité de distance autour du point fixe, on déduit encore

$$P \times AB \times s_1 = \overline{Q \times AC \times s_1} + r \cdot s_1 \cdot f \cdot N;$$

ce qui indique que *le travail de la puissance est égal au travail de la résistance augmenté de celui que consomme le frottement de l'axe.*

145. *Emploi et avantages du levier.* — Le levier n'est point destiné à un mouvement de rotation continu ; il a pour but ordinairement de soulever de très-grands fardeaux à de très-petites hauteurs pour chaque action qui lui est appliquée. Il n'est donc pas nécessaire de le faire tourner autour d'un tourillon ; cette disposition serait même désavantageuse, en ce que la charge étant très-forte, le tourillon devrait être très-gros, et que le travail rs_1fN qu'il absorberait par son frottement deviendrait très-considérable. Il convient alors que le levier pose sur un simple couteau (fig. 224), ou sur l'arête tranchante d'un corps très-dur ; le frottement devient négligeable, et l'on a tout simplement

$$P \times AB = Q \times AC, \quad \text{et} \quad P \times AB \times s_1 = Q \times AC \times s_1.$$

Ainsi, la quantité de travail de la puissance est égale à celle de la résistance. L'avantage de cette machine, la plus simple de toutes, est donc qu'elle transmet intégralement à la résistance la quantité de travail de la puissance. Ce n'est pas tout, un simple déplacement du point d'appui suffit pour changer à volonté le rapport de la puissance à la résistance. Si, par exemple, le point d'appui A est établi de telle sorte que la distance CA au point d'application C de la charge Q soit un millième de sa distance AB au point d'application B de la puissance, on aura $P = \frac{Q}{1000}$. D'où l'on voit qu'avec une puissance très-petite, il est toujours possible avec un levier de faire équilibre à une énorme résistance ; d'une autre part aussi le chemin décrit par la puissance augmente en proportion.

La *pince* du maçon est un levier qui porte lui-même son couteau au talon A (fig. 225). Les maçons pour s'en servir font poser ce talon sur un corps dur, engagent la pointe de leur pince sous le

corps qu'ils veulent soulever, et pèsent sur l'autre extrémité *B*. Plus leur pince est engagée sous la charge, moins le point d'application de cette dernière est éloigné du talon ou du point fixe *A*, et plus ils ont d'action pour soulever cette charge. Aussitôt que le corps est élevé d'une petite quantité, ils glissent des cales pour le tenir à cette nouvelle hauteur. Veut-on l'élever encore plus haut, les maçons relèvent leur levier, ainsi que le point fixe sur lequel le talon de la pince est posé; après quoi en engageant de nouveau la pince sous la charge, ils agissent sur l'autre extrémité, pour soulever la charge au-dessus de sa cale, une nouvelle cale étant posée au-dessus de la précédente; le corps est ainsi maintenu à la hauteur de deux cales, etc.

Pour se faire une idée du temps nécessaire pour soulever avec le levier un grand fardeau à une hauteur même médiocre, supposons que ce fardeau soit de $1\,000\,000^{k}$ et qu'il faille l'élever à $1^{m},20$. La quantité de travail à dépenser par la puissance sera évidemment $1^{m},20 \times 1\,000\,000^{k}$, ou $1\,200\,000^{k.m}$. Si nous estimons l'effort d'un homme égal à 75^{k} ou au poids de son corps, le chemin que cet homme devra décrire à l'extrémité de son levier sera $\frac{1\,200\,000^{k.m}}{75^{k}} = 16\,000^{m}$. Si seulement par chaque quatre secondes il faisait mouvoir de $0^{m},20$ le point du levier où il applique son action immédiate, il lui faudrait pour $16\,000^{m}$ un temps égal à

$$\frac{16000^{m} \times 4''}{0^{m},20} = 320000'' = 89 \text{ heures} = 9 \text{ jours à peu près,}$$

en supposant à l'ouvrier un travail journalier de 10 heures; en un mot, c'est-à-dire, que cet homme à lui tout seul n'en viendrait pas à bout.

Cet exemple démontre que les leviers sont seulement utiles pour des efforts momentanés, ou quand des fardeaux étant considérables, on ne doit les élever qu'à de très-petites hauteurs. L'emploi des leviers est indispensable pour détacher les grosses pierres des revêtements qu'on veut démolir.

Les mâts de vaisseaux destinés à porter les voiles reposent par leur partie inférieure à fond de cale, et y sont fixés dans des encastrements au moyen de coins chassés avec force. Le poids de ces mâts est énorme, puisque, après avoir traversé tous les ponts du vaisseau, ils s'élèvent encore à une hauteur considérable au-dessus

du premier pont. Quand on a besoin de les décaler hors de leurs encastrements, on emploie encore le levier pour soulever leur masse. Ce levier a environ quinze pieds de longueur, et engage sa pointe sous une espèce de talon accolé invariablement au mât. La distance du point où ce levier est engagé au point d'appui est fort petite comparativement au bras de levier de la puissance, et comme il ne s'agit que d'élever ce fardeau à une très-faible hauteur, un millimètre par exemple, on conçoit qu'une quantité de travail ordinaire exercée par la puissance suffit pour desserrer les coins qui retiennent le mât dans son encastrement. Cent mille écus, nous a-t-on dit, ont été donnés à un avocat qui a conseillé pour cette opération l'emploi du levier. Il est probable qu'il ne les eût pas gagnés s'il eût fallu que le mât fût élevé à la hauteur d'un mètre, ou même d'un décimètre.

TROISIÈME PARTIE.

DES MACHINES ET DES MOTEURS.

I.

INTRODUCTION. — RÉSUMÉ DES PRINCIPES EXPOSÉS DANS LES DEUX PREMIÈRES PARTIES DU COURS.

1. *Principes généraux.* — L'objet de cette troisième partie du Cours de Mécanique Industrielle est l'étude spéciale des machines et des moteurs. Mais, au préalable, nous rappellerons sommairement les différents principes exposés dans les deux premières parties du Cours, et qui servent de base à la science des machines.

PREMIER PRINCIPE. — *Forces.* — Les forces sont des causes qui modifient ou tendent à modifier l'état des corps. Soit que ces forces poussent ou tirent les corps, leur effort est toujours mesurable en poids, à l'aide de pesons à ressort, de dynamomètres; et, de même que le kilogramme est l'unité de poids, de même toute force sera exprimée pour nous par un certain nombre de kilogrammes (1re partie, 20 et 21).

DEUXIÈME PRINCIPE. — *Travail d'une force constante et dont le point d'application parcourt sa propre direction.* — Pour qu'une force produise un certain travail, il ne suffit pas qu'elle exerce un certain effort, il faut encore que la résistance soit vaincue, le long d'un certain chemin. Si l'effort est constant, et toujours dirigé dans le sens du chemin parcouru par son point d'application, le travail de la force est mesuré par le produit de la force exprimée en kilogrammes, et du chemin exprimé en mètres (1re partie, 35).

TROISIÈME PRINCIPE. — *Travail d'une force variable, et dont le point d'application suit sa propre direction.* — Si l'effort varie à chaque instant, mais sans cesser d'être dirigé dans le sens du chemin par-

couru par son point d'application, on considérera que, dans chaque petit chemin élémentaire successif, l'effort est censé constant, et que le produit de cet effort par le petit chemin décrit donne la mesure du travail élémentaire. La somme de ces travaux élémentaires sera le travail total, et s'obtient au moyen du théorème de Thomas Simpson (1re partie, 36, note), en observant que la recherche de cette somme revient à mesurer, pour l'intervalle du chemin total, l'aire d'une courbe, dont les abscisses représentent les chemins successivement décrits et mesurés en mètres, et dont les ordonnées représentent, d'après une échelle convenable, les résistances, ou efforts correspondants censés mesurés en kilogrammes (1re partie, 36).

QUATRIÈME PRINCIPE. — *Travail d'une force constante dont le point d'application parcourt une direction quelconque.* — Lorsque l'effort est constant, et fait un certain angle constant, avec le chemin parcouru par son point d'application, on a fait voir, à la suite de la démonstration du parallélogramme des forces (2e partie, 11), que le travail de cet effort s'obtenait, soit par le produit de cet effort et du chemin de son point d'application *estimé* dans la direction de cet effort, soit par le produit du chemin réellement décrit et de l'effort *estimé* dans la direction de ce chemin. En un mot, si, EF (fig. 226) étant la grandeur et la direction de l'effort, et AB représentant le sens du chemin que parcourt le point E d'application, on construit le rectangle $EF'FG$, dont EF est la diagonale, et si Ee est le petit chemin élémentaire parcouru par E, il est évident qu'en abaissant la perpendiculaire ee' sur EF, Ee' représentera le chemin estimé sur EF, aussi bien que EF' représentera l'effort EF estimé sur la direction AB. Or, nous remarquerons que le travail de la force EF, pendant que son point d'application parcourt Ee, est mesuré indifféremment par le produit $EF \times Ee'$ ou par le produit $EF' \times Ee$.

CINQUIÈME PRINCIPE. — *Travail dont la force et le chemin parcouru par son point d'application sont variables.* — Enfin, si l'effort EF et l'angle FEF' de cet effort avec le chemin décrit par son point d'application varient continuellement et en même temps, il faudra prendre le produit $EF \times Ee'$ ou $EF' \times Ee$ pour chaque instant élémentaire, ou pour chaque espace élémentaire Ee décrit par le point E, et faire la somme de ces produits à l'aide du théorème de Simpson. A cet effet, on tracera une courbe (fig. 227) ayant pour

ordonnées les EF par exemple, et pour abscisses les sommes des chemins Ee élémentaires et égaux entre eux, afin que les ordonnées soient équidistantes ; puis enfin on prendra de cette courbe l'aire correspondante à la grandeur du chemin total parcouru.

SIXIÈME PRINCIPE. — *Mesure de l'inertie.* — L'inertie est la propriété qu'ont les corps de persévérer dans leur état de repos s'ils sont en repos, ou de mouvement s'ils sont mus avec une certaine vitesse, jusqu'à ce qu'une cause les en fasse sortir. La mesure de cette cause ou de la force qui modifie l'état du corps, est aussi celle de l'inertie ou de la résistance qu'un corps oppose à ce changement d'état. Toutes les fois qu'un moteur, employé à faire mouvoir un corps selon une certaine direction, lui imprime un certain accroissement de vitesse, si on considère la modification qui s'opère dans un temps très-petit t, et si on nomme v l'accroissement de vitesse aussi très-petit pendant le temps élémentaire t, P le poids du corps, g la vitesse imprimée par la gravité au bout de la première seconde, et qui pour nos pays est égale à $9^m,809$, la force qui pourra engendrer la vitesse v dans le temps élémentaire t, sera égale à $\frac{P}{g} \times \frac{v}{t}$ (1re partie, 74). Cette mesure est la même soit que la force motrice sollicite le corps à l'accélération, ou qu'elle retarde son mouvement. Or, en vertu du principe de l'action égale et contraire à la réaction (1re partie, 24), la force d'inertie sera également contraire à la force motrice et mesurée comme elle, par le produit $\frac{P}{g} \times \frac{v}{t}$; de plus, cette force d'inertie sera contraire au mouvement si celui-ci s'accélère, et favorable s'il est retardé. On nomme *masse* le quotient $\frac{P}{g}$, quotient que nous appellerons M, en sorte que la mesure de la force d'inertie peut être encore représentée par le produit $M \times \frac{v}{t}$.

SEPTIÈME PRINCIPE. — *Force vive d'un corps transporté parallèlement à lui-même.* — La force vive d'un corps qui se meut en ligne droite parallèlement à lui-même, ou dont tous les points décrivent simultanément des chemins égaux et parallèles avec une certaine vitesse V (fig. 228), est égale à $M \times V^2$ (1re partie, 66, et 2e partie, 48). Si le corps ne se meut pas dans une direction rectiligne, la même chose a lieu, pourvu qu'il conserve toujours une position semblable

par rapport aux tangentes de la courbe décrite par un point quelconque de ce corps (fig. 229). Mais ici sa vitesse varie d'une position à l'autre, et la mesure précédente de la force vive s'entend pour une position donnée.

HUITIÈME PRINCIPE. — *Force vive d'un corps qui tourne autour d'un axe fixe.* — Souvent les circonstances du parallélisme du mouvement d'un corps n'ont plus lieu ; on prendra alors la somme des forces vives mesurées pour chaque molécule. Cependant, si le corps se meut autour d'un axe fixe, on peut mesurer sa force vive totale sans avoir besoin de calculer toutes celles de ses diverses parties. Soit V_1 la vitesse de tous les points du corps à l'unité de distance de l'axe fixe A (fig. 230) ; I le moment d'inertie de ce corps par rapport à cet axe, c'est-à-dire la somme des produits des masses de ses différentes parties multipliées par le carré de leur distance respective à cet axe, somme dont on a donné l'expression (2e partie, 65 et 66) pour diverses formes de corps ; la force vive du corps en question sera représentée par $I \times V_1^2$ (2e partie, 60 et 64).

NEUVIÈME PRINCIPE. — *Force vive d'un corps animé d'un double mouvement de translation et de rotation.* — Si le mouvement du corps se compose d'un mouvement de transport général de son centre de gravité, et d'un mouvement de rotation autour de ce centre ou de la tangente à la courbe qu'il décrit à chaque instant, la force vive est égale à la somme de la force vive du corps estimée comme si tous ses points n'avaient que la vitesse du centre de gravité, et de la force vive relative à la rotation autour de ce centre.

DIXIÈME PRINCIPE. — *Principes des forces vives pour un intervalle de temps fini.* — Jusqu'ici nous avons appris non-seulement à calculer la force vive totale d'un corps, dont on connaît l'état de mouvement, mais encore à mesurer le travail d'une force dont l'intensité, le chemin du point d'application et la direction sont donnés à chaque instant ; il nous reste à rappeler la relation qui existe entre cette force vive totale, et le travail des forces qui l'ont produite, relation qu'on nomme *principe des forces vives*, ou *principe de la transmission du travail*, et qui contient à elle seule toute la théorie des machines. Nous l'avons démontré dans les nos 55 et 59 de la 2e partie, et elle se définit ainsi : Si un corps ou plusieurs corps, liés entre eux par des moyens quelconques, et assujettis à certains mouvements comme les différentes pièces d'une machine, sont soumis à l'action des *puissances* ou forces qui tendent à accélérer leur

mouvement, et de *résistances* ou forces qui tendent à le retarder, alors, en considérant ce qui a lieu entre deux instants quelconques du mouvement, il arrive que l'accroissement ou le décroissement total de la force vive est précisément égal au double de la différence absolue entre la somme des quantités de travail des puissances et celle des quantités de travail des résistances dans le même intervalle de temps.

ONZIÈME PRINCIPE. — *Même principe pour un intervalle de temps infiniment petit.* — Si, au lieu de considérer ce qui arrive entre deux instants quelconques, ou pour deux positions éloignées du système, on ne s'occupe que de ce qui arrive dans un temps ou chemin infiniment petit, le travail des puissances sera égal au travail des résistances augmenté du travail des forces d'inertie si le mouvement s'accélère, ou diminué de ce même travail si le mouvement se ralentit : car il faut se rappeler que l'inertie agit comme puissance véritable, quand les résistances l'emportent sur les puissances, et *vice versâ* (2e partie, 54).

DOUZIÈME PRINCIPE. — *Principe relatif au mouvement uniforme d'un système.* — On remarquera que si les corps ne tendent ni à accélérer ni à diminuer leur mouvement, ou si leur vitesse reste la même, ou si enfin le mouvement est uniforme, l'accroissement des forces vives sera nul pendant un temps quelconque. Alors la somme du travail des puissances pendant ce temps devient égale à celle du travail des résistances. Il en est de même si la force vive redevient la même pour certaines positions et au bout d'un certain nombre de révolutions, c'est-à-dire que le travail que développent les puissances pendant cet intervalle est égal à celui des résistances.

TREIZIÈME PRINCIPE. — *Principe relatif au mouvement périodique d'un système.* — Le théorème précédent relatif au mouvement uniforme se maintient encore pour chaque instant infiniment petit : car, puisque la vitesse reste toujours la même, l'inertie n'est plus mise en jeu, et son travail élémentaire est nul. Dans ce cas la somme des quantités de travail élémentaires des puissances est perpétuellement égale à celle des quantités de travail élémentaires des résistances : ce qui signifie qu'il y a équilibre, ou que les puissances détruisent continuellement les résistances, soit dans le cas du mouvement uniforme, soit dans le cas du repos où la vitesse est nulle.

QUATORZIÈME PRINCIPE. — *Les principes précédents étendus à chaque*

corps d'un système en particulier. — Ces divers principes ne s'appliquent pas seulement à l'ensemble de tous les corps ; car ils ont lieu pour chaque corps en particulier, en le supposant soumis à une seule puissance et à une seule résistance dans les deux points où il est poussé par le corps qui le précède et par celui qui le suit.

II.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES MACHINES.

2. *Nomenclature générale des pièces d'une machine quelconque.* — Le rappel des principes précédents était d'une nécessité indispensable, puisqu'ils sont susceptibles d'une application immédiate aux machines, lesquelles, considérées sous le point de vue industriel, sont destinées à exécuter certains travaux des arts à l'aide des *moteurs* que présente la nature, tels que les animaux, le vent, le calorique ou la vapeur d'eau.

La plupart des machines industrielles se composent de différentes pièces distinctes, simples ou élémentaires, pièces qui sont analogues aux *machines simples* qui nous ont occupé dans le Cours de la première année (*). Ces pièces se communiquent le mouvement de proche en proche depuis le moteur jusqu'à la matière à confectionner.

La première pièce, près du moteur, se nomme le *récepteur*, parce qu'elle reçoit l'action directe de la force ; la dernière est l'*opérateur* ou l'*outil ;* les pièces intermédiaires se nomment les *communicateurs.* Souvent aussi on nomme le récepteur *moteur*, parce qu'on considère cette pièce comme donnant l'action aux autres ; sous ce rapport chaque pièce peut être considérée comme le moteur de celle qui la suit du côté de l'outil. Mais il ne faut pas confondre ces moteurs secondaires avec les moteurs primitifs qui sont la gravité, la chaleur, les animaux.

(*) Nous avons publié ce cours sous le titre de *Mécanique Industrielle*, etc. Un vol. in-8° ; Bruxelles, 1839.

Par exemple, dans un moulin à farine, le moteur primitif est le poids de l'eau ou la gravité; l'eau elle-même n'est que moteur secondaire, mais il n'y a pas d'inconvénient à la considérer comme le véritable moteur. La roue hydraulique est donc ici le moteur secondaire ou le récepteur; les *rouages* sont les *communicateurs* du mouvement et du travail; la *meule* est l'*outil*, l'*opérateur*. — Des désignations analogues s'appliquent à toutes les machines.

3. *Actions des forces sur les machines; application du principe des forces vives.* — En vertu des principes généraux rappelés plus haut, soit que l'on considère la machine entière comme soumise à l'action de la puissance qui constitue le moteur primitif, à celle de la *résistance utile* qui constitue le travail, et aux actions des *résistances nuisibles* qui s'opèrent aux diverses parties frottantes, soit qu'on considère séparément chacune des pièces distinctes ou des *machines simples* dont elle se compose, comme soumise à l'*action motrice* de la pièce précédente, et à l'action contraire ou résistance utile de la pièce suivante, ainsi qu'aux diverses résistances nuisibles inhérentes à la nature de la pièce en question, toujours est-il certain que le travail moteur se subdivise en trois parties, dont l'une sera le travail utile dû à la résistance qu'on peut vaincre, la deuxième le travail nuisible dû aux résistances étrangères à l'objet qu'on se propose, et la troisième la moitié de l'accroissement de la force vive des parties matérielles de la machine.

Ordinairement les machines se meuvent d'un mouvement uniforme, et ce cas est celui des moulins à farine. L'accroissement de force vive est nul dans ces machines, parce que les forces agissent continuellement et ne cessent de se détruire entre elles. Ainsi, pour cette circonstance, le travail développé par la puissance à chaque instant, ou pendant un intervalle de temps quelconque, est égal au travail utile, plus au travail développé par toutes les résistances nuisibles.

Dans la plupart des cas, le mouvement des machines industrielles est simplement périodique ou tel que les vitesses redeviennent les mêmes au bout d'un certain nombre de révolutions. Par conséquent, au bout de cet intervalle, l'accroissement de force vive est encore nul, et le travail du moteur se compose de l'effet utile augmenté du travail absorbé par les résistances nuisibles.

Si on a bien suivi ce raisonnement, qui appartient à toutes les

machines simples ou composées, on doit être convaincu qu'aucune combinaison de pièces ou de rouages ne peut faire que le travail du moteur ou la dépense effective du travail sur la première pièce soit moindre que le travail opéré par l'outil ou que nécessite l'ouvrage à confectionner. C'est là un principe que nous avons eu souvent occasion de rappeler dans la précédente partie du Cours à l'occasion des agents simples, tels que les ressorts, l'élévation des poids, etc.

4. *Objet des machines, transformation du travail.* — Le but véritable des machines ne saurait donc être d'augmenter le travail mécanique des moteurs qui y sont appliqués, mais de transformer ce travail en *ouvrage* ou travail industriel, selon des considérations données dans chaque cas spécial. Ce n'est pas un de leurs moindres avantages, que de convertir le travail de la chute d'un cours d'eau, ou d'un combustible, ou de chevaux, ou de manœuvres sans intelligence, et de tirer parti de ce travail pour moudre le blé, filer la laine, scier le bois, ou lever d'énormes fardeaux. Pour mieux fixer les idées, soit $F \times E$ le travail que peut lever un moteur dans chaque seconde de temps; une machine nous fournit le moyen de transformer $F \times E$ en un ouvrage qui exigerait à chaque seconde une quantité de travail $f \times e$ nécessairement plus petite que $F \times E$, selon le genre de la machine et des résistances nuisibles. Une machine nous permet en outre de modifier l'un ou l'autre des facteurs f ou e du produit $f \times e$, de telle sorte que tantôt l'effort f de la résistance utile sera 10 ou 100 fois plus grand que l'effort F du moteur, et que tantôt ce sera au contraire la vitesse e de l'*opérateur* ou de l'outil qui sera de beaucoup supérieure à celle du récepteur. L'une ou l'autre de ces conditions est toujours possible pourvu que le second facteur du travail $f \times e$ de l'outil demeure égal au travail $F \times E$ du moteur, diminué du travail des résistances nuisibles de la machine, conformément au principe développé ci-dessus.

On pourra faire, par exemple, qu'avec une machine, un homme de force médiocre puisse soulever un fardeau de 1000 ou de 10000 kilogr.; mais alors il faudra nécessairement ralentir de beaucoup la vitesse du fardeau ou le chemin décrit dans chaque seconde par son centre de gravité. Les moufles, le treuil, la vis, le levier nous ont montré l'exemple de semblables combinaisons. Pareillement,

aussi, on augmentera la vitesse d'un outil, pourvu qu'on diminue la résistance de la machine en conséquence et de façon que l'ouvrage reste à peu de chose près le même. Ici se présente l'occasion de remarquer que, pour la qualité des produits confectionnés et pour la solidité même de la machine, il n'est pas toujours permis de donner à l'outil une vitesse arbitraire. Souvent avec une vitesse trop faible, l'outil opère mal, et avec une vitesse trop forte, il se brise, il s'échauffe, il altère ses produits. On en a un exemple dans la fabrication des farines. Si la meule marche trop vite, le grain s'échauffe et se détériore ; si sa marche est trop lente, la force centrifuge est insuffisante pour écarter le grain à une certaine distance, il s'accumule près du moyeu de la meule, et ne s'écrase plus.

5. *La modification des facteurs du travail n'est pas arbitraire.* — Non-seulement on ne peut pas à l'aide des machines augmenter le travail des moteurs, mais on n'est pas toujours le maître de modifier à volonté les facteurs e et f dont le produit constitue le travail utile de l'outil. Il existe, en effet, une vitesse la plus convenable de ce dernier, et dont on ne saurait s'éloigner sans diminuer la qualité ou la quantité des produits. Le travail EF des moteurs présente des circonstances analogues. Un moteur dont la vitesse E est grande, ne peut exercer qu'un très-faible effort F, et cet effort devient même nul, lorsque la vitesse de son point d'application est parvenue à une certaine limite supérieure. Lorsqu'au contraire, la vitesse est très-petite, et à plus forte raison quand le moteur reste au repos, le moteur est susceptible du plus grand effort F ; et comme le travail se compose des facteurs E et F, voilà deux limites extrêmes où le travail développé est réduit à zéro. Il y a donc une vitesse et un effort les plus favorables au travail que peut produire le moteur ou pour lesquels ce travail devient un *maximum*. Ainsi, on peut dire, en général, pour le récepteur comme pour l'outil d'une machine, que l'espace E qu'ils doivent décrire dans chaque seconde, ou leur vitesse, est assujettie dans chaque cas spécial à certaines conditions ou règles qui dépendent de la nature du moteur ou de la qualité des produits, et qui assignent à l'avance à cette vitesse une valeur dont on doit s'écarter le moins possible, si on tient à l'économie du travail ou à la qualité de l'ouvrage.

6. *Déchet de travail produit par les machines.* — On se formera

une idée du déchet de travail occasionné par les résistances nuisibles des machines, si nous rappelons, d'après le résultat des expériences les plus authentiques, que les plus simples et les plus parfaites d'entre elles rendent à peine à l'outil les $\frac{6}{10}$ ou les $\frac{7}{10}$ du travail dépensé sur elles par le moteur, et qu'il en est d'autres qui, par suite de leur ridicule complication, ne rendent pas même le $\frac{1}{20}$, le $\frac{1}{50}$ de ce travail. Cette dernière fraction est particulièrement relative à l'ancienne machine de Marly, qui servait à élever les eaux de la Seine au moyen de pompes mues par des roues hydrauliques, et qui avait fait longtemps l'admiration de l'Europe. Déjà aussi, à l'occasion des machines simples, nous avons pu reconnaître que le travail utile effectué dans le *coin* par une puissance motrice peut n'être (2e partie, 116) que le $\frac{1}{5}$ de celui de cette dernière, et que le déchet doit être plus considérable dans la *presse à coin*. Ce déchet dans la *presse à vis* est les $\frac{2}{3}$ ou les $\frac{3}{4}$ de celui du moteur (2e partie, 139 et 140). Dans le système de *mouffles* le plus simple, la perte du travail est encore d'environ $\frac{1}{6}$; enfin, on peut s'assurer que, pour le cric à double harnais, elle s'élève à plus du $\frac{1}{5}$ du travail de la puissance.

7. *Illusion dans l'appréciation de l'effet des machines.* — On voit aussi par là, combien est grave l'erreur de ceux qui prétendent produire, à l'aide de combinaisons mécaniques très-complexes, des effets prodigieux aux yeux d'un vulgaire ignorant, qui ne se doute pas de la quantité de travail nécessaire pour faire mouvoir ces merveilles. L'illusion provient presque toujours, en pareil cas, de ce qu'on n'apprécie ici l'effet de la machine que par l'un des facteurs du travail utile, que par l'intensité absolue de l'effort que suppose la résistance à vaincre, comme lorsqu'il s'agit de soulever d'énormes fardeaux à l'aide d'un cric ou d'une vis. L'illusion qui se produit alors sur l'esprit des spectateurs est analogue à celle que nous éprouverions en voyant un seul homme soulever un globe métal-

lique très-volumineux que nous croirions plein au lieu d'être vide. En effet, négligeant la considération de la densité de ce globe, ou mesurant son poids d'après la seule idée de son volume qui n'en est qu'un des facteurs (1re partie, 3), nous serions tentés d'attribuer à cet homme une grande puissance d'action ; et à ce titre l'ascension des ballons gonflés sera plus merveilleuse encore. De même, quand nous voyons un homme élever, par l'action d'un cric, une voiture de roulier pesant jusqu'à 10 000 kilogr., nous ne faisons attention qu'à l'énormité du poids, sans songer à l'autre facteur du travail utile, c'est-à-dire au chemin décrit par le fardeau, chemin qui, d'après nos principes, est d'autant plus petit que le fardeau est plus grand, et qui est tel que le travail effectif est moindre d'un quart que celui qui est dépensé par l'homme.

On a quelquefois cité le mot d'Archimède : « Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai la terre. » Outre que le point d'appui et le levier manquent, outre que c'est réellement le point d'appui qui supporterait la terre, il est aisé de voir qu'Archimède, au bout d'un temps presque indéfini, n'aurait soulevé la terre qu'à une hauteur inappréciable.

8. *Mouvement perpétuel.* — Une autre erreur est celle de quelques individus qui, dans leur ignorance, s'appliquent à trouver les moyens de perpétuer sans fin le mouvement imprimé à des machines, ou d'obtenir le mouvement perpétuel. Elle provient uniquement de ce qu'ils oublient que les pièces des machines sont accompagnées de résistances nuisibles, de sorte que, quand bien même la machine devrait marcher à vide, sans effectuer de travail, la force vive qu'on lui aurait imprimée une fois pour toutes, serait continuellement amoindrie par le travail de ces résistances, et finirait par être complétement éteinte, comme le prouve l'expérience dès le premier essai de toutes ces prétendues inventions. Non-seulement le repos suit plus ou moins près la première impulsion, mais il est fort souvent le seul état possible de la machine, grâce à l'impéritie de l'inventeur. Ici il ne peut y avoir illusion, à moins que le charlatanisme ne soit de la partie ; c'est-à-dire à moins que la machine ne recèle quelque pièce caché, quelque principe moteur, tel qu'un mouvement de montre à ressort, et capable de vaincre à chaque instant les résistances nuisibles. Mais jamais la nature ne nous offre de moteurs dont l'action s'entretienne sans cesse ou ne s'épuise à la longue.

gue; aussi arrive-t-il toujours que la machine s'arrête d'elle-même, si elle n'est remontée comme le tournebroche, ou si la nature ne subvient pas à la dépense du travail occasionné par les résistances.

9. *Mouvement perpétuel dû aux piles électriques.* — Cependant, on voit en ce moment dans les divers passages couverts de Paris, lieux qui sont autant de bazars ou foires permanentes, des joujoux qui paraissent complétement doués du mouvement perpétuel, et qui le sont en ce sens que le mouvement se prolonge pendant des années entières sans ralentissement apparent, et sans l'action de ressorts, de contre-poids ou d'autres agents aussi grossiers. Un balancier ou levier horizontal (fig. 231), terminé par deux boules en équilibre sur un pivot placé au milieu de leur intervalle, va et vient continuellement de manière que l'une des boules touche alternativement deux disques métalliques situés en face et de part et d'autre de cette boule. Or, ce jeu ne surprend que ceux qui ignorent les propriétés dont jouissent les piles électriques (*Leçons de Physique*). L'action de ces piles, quand elles se composent de certaines substances, est telle qu'elle se conserve dans toute son intensité pendant des années entières; mais, comme elle n'est entretenue qu'aux dépens de l'altération des substances qui entrent dans les piles, il faut bien, quelle que soit la lenteur de cette altération, que l'action motrice qui sert à vaincre l'inertie des boules, la résistance du pivot et celle de l'air, finisse, un peu plus tôt un peu plus tard, par s'anéantir totalement.

On a cité le mécanisme qui précède, parce qu'il est le plus parfait et le plus ingénieux de tous ceux qui ont été inventés pour établir le soi-disant mouvement perpétuel : car presque tous les autres sont dus à des hommes tellement ignorants, et leur principe est si grossier, qu'à la première vue on peut deviner l'erreur mécanique à laquelle ils doivent leur existence. Nous n'aurions pas autant insisté sur ces réflexions, peu dignes de nous occuper, si malheureusement des artistes, d'ailleurs recommandables sous d'autres rapports, oubliant ce qu'ils doivent à leur famille, à la société, à eux-mêmes, ne se laissaient entraîner à la tentation de courir après ces chimères aujourd'hui flétries du nom de *pierre philosophale*, et rejetées ainsi parmi ces prétentions, moins ridicules peut-être, des alchimistes du bon vieux temps qui croyaient pouvoir faire de l'or avec les pierres ou les métaux. Nous laisserons désormais ces rêve-

ries, dont il est des exemples dans presque toutes les sciences et tous les arts, pour étudier les lois véritables des machines industrielles.

10. *Complication de la question de l'établissement des machines.* — Si les machines sont composées de trois parties distinctes, *le moteur* ou *récepteur*, *l'opérateur*, ou *l'outil*, et *les communicateurs du mouvement*, elles ont aussi toutes un but général et commun. Celui qu'on se propose en établissant dans l'industrie une machine quelconque, c'est de confectionner une certaine quantité d'ouvrage au moindre prix possible, à qualité égale d'ailleurs des produits. On voit, d'après cela, que la condition de l'établissement des machines se complique d'un grand nombre d'éléments différents, tels que la valeur des produits confectionnés, la mise de fonds nécessaires pour la construction de la machine et de ses accessoires, tels que bâtiments, magasins, employés, etc., la durée de la machine, son entretien journalier, le prix du travail moteur, etc. Un industriel habile met en balance tous ces éléments, et de plus il doit avoir égard aux chômages, aux pertes de temps inévitables, dont le plus grave inconvénient n'est pas seulement de rendre les capitaux improductifs pendant une portion plus ou moins grande de l'année, mais de compromettre l'existence de l'établissement par une suspension absolue de travail. Cette dernière considération fait qu'on renonce souvent à la machine la moins coûteuse dont l'action est intermittente, pour en choisir une qui marche régulièrement pendant toute l'année. Enfin, le prix de transport des produits, la facilité des débouchés, des communications, ajoutent encore à la complication de la question dans l'établissement. Or, de semblables questions sont particulièrement du domaine de la science qu'on nomme *Économie industrielle*, et ne peuvent faire l'objet d'un cours tel que le nôtre. Il nous suffira d'examiner la partie de la question qui concerne l'économie de la force motrice ou du travail, abstraction faite du prix en argent que coûte la machine.

Notre but à nous est de déterminer la disposition la plus convenable de toutes les parties, de façon que l'ouvrage ou le travail utile soit le plus grand possible pour une quantité donnée de travail dépensé par le moteur. Quoique le prix du travail ne soit pas la seule chose qui constitue le prix de l'ouvrage, il en est cependant le principal élément; et en le comparant à ce que coûtent les frais de premier établissement d'une machine et de ses accessoires, on

trouve que ces frais ne sont qu'une fraction bien faible du prix du travail. Pour donner une idée du rapport de ce dernier avec le prix d'une machine, nous nous bornerons à vous rappeler que le travail de seize chevaux coûte 32 fr. par jour, ou 11 520 fr. par an, laquelle somme correspond à un capital énorme, si on la compare avec la somme de 32 000 fr. que coûte environ l'établissement.

Une autre raison milite en faveur de toute disposition susceptible de rendre le travail utile le plus grand possible, c'est que la machine devient plus durable, et, par conséquent, plus économique : car on ne remplit la condition du *maximum* de travail, qu'en régularisant les actions des forces; et de cette régularité d'action résultent le *minimum* de dépense et le *maximum* de durée pour la machine. Voilà pourquoi nous étudierons les moyens de rendre le travail un *maximum* et d'éviter toutes les causes qui peuvent être contraires à cette condition.

11. *Manière de procéder à l'établissement des machines.* — La première chose dont on s'occupe dans l'établissement mécanique d'une machine, c'est le choix de l'outil; ensuite on procède à celui du moteur ou récepteur; puis viennent les communicateurs du mouvement, qui ont pour objet de transmettre le travail du moteur à l'outil suivant des conditions déterminées d'après la nature particulière de ces derniers; ou qui règlent leur meilleur effet et rendent le rapport de $e \times f$ à $E \times F$ le plus grand possible.

La science des machines, ainsi envisagée, se compose donc de la *science des outils*, de la *science des moteurs*, et de la *science des communicateurs* ou *modificateurs du mouvement;* à quoi il convient d'ajouter la *science des constructions*, qui apprend à disposer, à régler les formes et les dimensions des diverses parties de la manière la plus solide, la plus durable, la plus économique et la plus propre à éviter les déperditions du travail moteur. On ne saurait entrer dans le détail de toutes ces questions qui, appliquées à une seule pièce, exigeraient déjà une discussion fort longue, et nous nous bornerons à l'essentiel, aux règles les plus généralement utiles.

Nous dirons peu de chose sur les outils, parce que leur nombre est immense, et que chaque espèce de fabrication en contient elle-même une grande variété. On a d'ailleurs peu écrit sur les outils, sur leurs bonnes qualités. Quelques-uns cependant sont d'un emploi

général ; tels sont les pistons de pompe et autres qu'on ne manquera pas de vous faire connaître.

L'étude des récepteurs est tellement liée à celle des moteurs, qu'on ne saurait parler des uns sans traiter également des autres. Quant aux communicateurs du mouvement, leur nombre est considérable, et tous les jours il s'en découvre des combinaisons nouvelles. C'est une science à part, qu'on a envisagée à tort sous le point de vue géométrique. Mais ces combinaisons sont limitées quand on les considère sous le point de vue mécanique : aussi, nous établirons des règles à l'aide desquelles on distinguera les bons communicateurs de ceux qui ne peuvent être utiles dans l'industrie. Or, il existe pour les machines deux cas de limites extrêmes : dans l'un, les machines ne sont soumises qu'à des actions très-faibles, et alors peu importe la nature de leurs communicateurs ; dans l'autre, au contraire, où elles sont très-puissantes, leurs communicateurs doivent être établis d'après les lois de la mécanique, et l'exposé de ces règles devient d'autant plus essentiel que ce sont les machines fortes qu'on emploie dans l'industrie.

En général, pour reconnaître une bonne machine d'une mauvaise, il faut examiner de quelle manière l'action se transmet du récepteur à l'opérateur. Cette transmission s'opère de proche en proche par une suite de pièces qui se poussent ou se tirent, et qui sont solidaires les unes des autres, c'est-à-dire telles qu'elles décriront respectivement et simultanément de certains chemins pour un certain chemin décrit par l'une d'elles. Aussi, quand on se donne la vitesse ou le chemin décrit par une pièce, rien n'est plus facile que de trouver combien les autres pièces se sont mues en même temps, en examinant sur un dessin leur disposition géométrique et mutuelle.

12. *Du mouvement des machines à partir du repos.* — Supposons une puissance motrice appliquée au récepteur d'une machine et une résistance appliquée à l'opérateur. Si la machine est d'abord au repos, il faut bien que, pour l'en faire sortir, le travail élémentaire du moteur l'emporte sur celui de la résistance. Le mouvement, de nul qu'il était, se produit et s'accélère tant que cette supériorité de travail de la puissance sur celui de la résistance subsiste. Or, en même temps que la vitesse augmente, non-seulement l'effort du moteur diminue, ainsi qu'on l'a vu (3e partie, 5), mais encore

certaines résistances deviennent croissantes. Par conséquent, pendant l'augmentation de la vitesse de la machine, le travail du moteur décroît, et ceux des résistances croissent de plus en plus. Il est donc impossible que la vitesse augmente indéfiniment, comme le ferait un corps grave qui, tombant dans le vide le long d'une hauteur indéfinie, acquerrait une vitesse de plus en plus grande. Mais, de même que ce corps, s'il se mouvait dans un milieu, atteindrait une vitesse finie et constante par suite de la résistance toujours croissante du milieu qui contre-balancerait bientôt l'action motrice de la gravité, de même dans une machine où nous venons de reconnaître que le moteur doit décroître en même temps que croissent les résistances, il arrive un moment où le mouvement cesse de s'accélérer, et où les puissances font équilibre aux diverses résistances. La vitesse ne peut donc plus alors s'accélérer. C'est une chose remarquable que cette uniformité du mouvement ne s'établisse parfaitement qu'au bout d'un temps infini.

A la vérité, le temps où cela a lieu sensiblement, est plus ou moins long, selon que les résistances sont plus ou moins fortes, parce que, dans le premier cas, le moteur arrive assez lentement à sa limite, et que, dans le second, le moteur y parvient beaucoup plus rapidement. Il est aisé, d'après cela, de reconnaître l'erreur grave qu'on commettrait, si, une minute après la levée de la vanne qui laisse arriver l'eau sur un moulin, on venait à considérer le mouvement comme déjà uniforme, et combien les observations qu'on en déduirait sur le travail de la meule seraient vicieuses. La démonstration relative au temps au bout duquel le mouvement devient uniforme, est développée aux nos 250 et 251 de notre *Cours de Mécanique Industrielle* de la première année.

C'est ici le lieu d'indiquer le moyen pratique à l'aide duquel on mesure sur place la vitesse d'une machine, d'une roue par exemple, pourvu que son mouvement soit devenu uniforme. Il consiste à marquer avec de la craie un point sur la roue, à observer le nombre de fois que ce point se trouve en coïncidence avec un autre point fixe qui appartiendra à l'un des supports, pendant un certain temps, et à multiplier ce nombre de fois par la circonférence décrite par le point mobile. Le quotient de ce produit divisé par le nombre de secondes contenues dans le temps de l'observation, exprimera la vitesse cherchée pour le point en question de la roue. Je dis le point en question, car tous les points de cette dernière sont animés

de vitesses différentes et proportionnelles à leur distance de l'axe de rotation.

13. *Nature des diverses actions qui se développent sur une machine.* — Examinons le rôle que jouent les différentes forces qui exercent leur action sur une machine en mouvement. Elles sont de six espèces :

1° La pesanteur ou le poids des différentes pièces ;

2° Le moteur appliqué au récepteur et destiné à produire le travail ;

3° La résistance utile opposée par l'outil ;

4° Les résistances nuisibles, telles que les frottements, les forces d'adhérence, la résistance des milieux, celles des chaînes, des cordes, etc. ;

5° La force d'inertie des pièces, véritable résistance quand le mouvement s'accélère, et véritable puissance quand le mouvement se ralentit ;

6° Les actions moléculaires des corps qui proviennent de leur compression, de leur extension, ou de leur flexion pendant le mouvement, et dont l'effet, attendu l'élasticité imparfaite de ces corps, est d'y produire une certaine déformation qui nécessairement absorbe une portion quelconque du travail du moteur.

14. *Influence de la pesanteur.* — Si le centre de gravité d'un corps, ou du système de plusieurs corps, ne monte ni ne descend, ou reste à la même hauteur pendant toute la durée du mouvement qu'on considère, il n'y a aucun travail produit ou consommé par la pesanteur (2e partie, 50 et 51). C'est ce qui arrive pour une roue *centrée* dont le centre de gravité coïncide avec le centre de rotation, pour le treuil où le centre de gravité demeure toujours sur l'axe, et, en général, pour les machines dont toutes les parties consistent dans des pièces de rotation. Puisque alors le centre de gravité ne monte ni ne baisse, le chemin qu'il parcourt dans le sens vertical est nul, aussi bien que le travail de la pesanteur dont il n'y a pas lieu de tenir compte. A la vérité ces pièces portent sur des appuis, et y exercent des pressions d'où naissent des frottements ; et c'est là toute l'influence du poids de ces pièces. Souvent encore, dans les machines, certaines pièces montent et baissent alternativement : tel est le jeu des pistons et de leurs tringles dans les pompes, et

celui des *bielles* ou pièces qui, dans les machines à vapeur, lient le mouvement alternatif du balancier au mouvement de rotation des *volants*. Quoi qu'il en soit, quand ces pièces alternatives montent, ce ne peut être qu'aux dépens du moteur dont elles enlèvent une portion du travail, équivalente au produit de leur poids multiplié par la hauteur de leur course. Mais, comme elles ne peuvent s'élever indéfiniment, il est évident qu'à moins que le travail utile ne consiste dans l'élévation de fardeaux, elles finiront par descendre, et qu'alors leur travail, égal au précédent pendant cette course descendante, s'ajoutera ou sera restituée au travail du moteur. Si donc l'effet du poids de ces pièces a été tel que son travail, tantôt contraire et tantôt favorable à celui du moteur, a augmenté ou diminué tour à tour ce dernier de quantités égales, c'est comme si le travail de ces poids avait été nul. Ainsi, il ne faut pas s'occuper de l'action de la pesanteur à l'égard des pièces à mouvement alternatif. Les calculs sont, d'ailleurs, simplifiés par suite de cette légitime abstraction. Mais on se gardera de négliger la pression des corps pesants sur les appuis, parce que leurs poids y produisent des résistances nuisibles qu'on ne saurait omettre. C'est pour cette raison qu'on évitera de rendre les pièces trop lourdes.

15. *Influence du moteur et de la résistance utile de l'outil.* — On a dit précédemment (3e partie, 5) qu'il y avait, dans l'établissement des moteurs, des conditions qui rendaient leur effet le plus favorable, et que leur travail devenait un *maximum* pour une certaine vitesse donnée au récepteur. Ces considérations sont également applicables à l'outil ou l'opérateur.

16. *Influence des résistances nuisibles.* — Les frottements dont l'action est en tout état de choses contraire au mouvement, diminuent de plus en plus le travail du moteur à mesure que le mouvement s'accélère. Aussi, leur rôle est-il influent dans le déchet apporté au travail dépensé. Afin de diminuer l'effet de ces résistances nuisibles, il faut diminuer les deux facteurs du travail $R \times r$, dans lequel R représente l'intensité de toutes ces résistances combinées, et r le petit chemin élémentaire parcouru par le point d'application du frottement ou de R sur les surfaces frottantes. Le frottement le plus ordinaire d'une machine est celui d'un tourillon sur sa crapaudine (fig. 232), et la valeur R de sa résistance est

proportionnelle (2e partie, 121) à la pression du tourillon contre sa crapaudine. Quant à r, c'est le petit arc élémentaire décrit par le contact de ces deux surfaces frottantes, et qui a pour rayon le rayon même du tourillon; le produit $R \times r$ exprime le travail que l'action de ce genre de frottement détruit sur la machine. Le facteur R est rendu plus faible soit en polissant soit en graissant les surfaces qui frottent, et on en réduit le chemin décrit r, en diminuant autant que possible le rayon du tourillon (2e partie, 122). On se rappellera d'ailleurs que l'étendue des surfaces frottantes n'influe en rien sur la valeur R de la résistance du frottement (2e partie, 107). Si la résistance provient du milieu dans lequel se meut la machine, il faut donner à ses parties les formes les plus avantageuses.

17. *Influence de l'inertie.* — L'inertie des pièces n'est mise en jeu que quand le mouvement varie. Si, dans certains instants, le travail des résistances surpasse celui des puissances, le mouvement se ralentit nécessairement; mais alors l'inertie *ajoute* son travail à celui des puissances pour maintenir le mouvement. Si, au contraire, le travail des puissances est supérieur à celui des résistances, l'inertie s'oppose à l'accélération du mouvement qui en résulte, et *diminue* de son travail celui des puissances. Donc, entre les instants où la vitesse de la machine, par suite d'un mouvement périodique, est redevenue la même, l'inertie n'a en réalité rien consommé du travail du moteur; son rôle est, par conséquent, le même que celui de la gravité, en sorte que, pendant cet intervalle, le travail des puissances égale le travail utile plus le travail des résistances nuisibles.

18. *Influence des réactions moléculaires.* — Les pièces d'une machine, quand elles sont mises en mouvement, se fléchissent, se tordent ou se compriment; en un mot elles éprouvent une déformation qui va même jusqu'à la rupture (et dans ce cas le mouvement est *interrompu*), si leurs dimensions sont insuffisantes. La considération de ces actions moléculaires est ici fort importante, parce que les corps ne sont jamais parfaitement élastiques, et qu'ils ne peuvent manquer d'être plus ou moins déformés. La quantité d'action qui se développe, et qui ne se restitue plus, est d'autant plus grande que la déformation est plus grande; si les forces sont discontinues,

la déformation se répète aussi bien que l'action qui l'a produite, et elle diminue d'autant le travail dépensé par le moteur. C'est ainsi que les chocs sont une source de déperdition de travail ; pendant leur durée il se produit entre les corps en contact des pressions énormes, d'où résultent des déformations, des pertes d'action que le défaut d'élasticité empêche de restituer. Il importe donc d'éviter les chocs dans les machines ; et c'est à quoi on parvient, en traçant les parties qui se conduisent ou communiquent le mouvement, de façon qu'elles ne se quittent pas, que le mouvement s'opère par degrés insensibles et qu'il y ait le moins de jeu possible dans les articulations. En général, les chocs proviennent de l'excès de jeu qui fait que chaque pièce arrive contre sa consécutive avec une vitesse acquise, ou que les forces agissent tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre. Nul doute que les parties poussantes ne doivent être tracées avec une rigueur géométrique et sans aucune discontinuité. Telle est la cause de la forme circulaire donnée au tourillon qui tourne dans sa crapaudine. S'il était carré, il se mouvrait autour de ses différents angles, et chaque côté, en s'appliquant sur la crapaudine, la choquerait brusquement. Une forme elliptique ne donnerait, il est vrai, lieu à aucune secousse ; mais aussi le centre de gravité du tourillon, ou de la pièce dont il fait partie, serait alternativement le plus haut ou le plus bas possible, selon que le grand axe ou le petit axe de l'ellipse occuperait une situation verticale ; et de ce changement de position du centre de gravité naîtraient des inégalités d'action qui sont toujours désavantageuses.

19. *Inconvénients du mouvement varié.* — Les pertes de travail précédentes ne se produisent pas seulement pendant les chocs ; elles ont aussi lieu, quoique d'une manière moins sensible, lorsque les vitesses de la machine changent ou que son mouvement est varié. En effet, toute variation dans les vitesses en suppose une autre dans les efforts qui sollicitent la machine, et ceux-ci, de nuls qu'ils étaient, peuvent devenir très-grands, et *vice versâ*, et agir tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. L'altération, la fatigue que les pièces en éprouvent, leur occasionnent une certaine déformation qui ne saurait être sans une perte quelconque de travail. Si, d'ailleurs, la solidité exige que les pièces d'une machine reçoivent des dimensions proportionnées aux plus grands efforts

qu'elles sont destinées à supporter, et que, par ce motif, les pièces d'une machine à mouvement varié soient plus lourdes que pour une machine à mouvement uniforme, n'est-il pas évident que la première aura sur la seconde le désavantage d'être soumise à plus de résistances nuisibles? Or, il est facile de prouver qu'à travail égal dans le même temps, la machine dont le mouvement est varié sera soumise à des efforts plus considérables que celle qui serait douée d'un mouvement uniforme.

En effet, de ce que le travail est supposé égal de part et d'autre, l'effort constant qui régit cette dernière doit être regardé comme égal à l'effort moyen parmi tous ceux qui s'exercent sur l'autre. Ainsi, le travail de la machine à mouvement varié sera exprimé par l'aire *ABDOC* (fig. 238) d'une courbe *COD*, dont les abscisses représentent les chemins successivement décrits par les efforts, et dont les coordonnées sont proportionnelles à ces efforts variables. Quant au travail équivalent de la machine à mouvement uniforme, sa représentation sera donnée par l'aire du rectangle *ABFE*, dont la base *AB* est le chemin total parcouru pendant l'intervalle commun qu'on considère dans les deux machines, et dont la hauteur *AE* est proportionnelle à l'effort moyen dont il s'agit. Maintenant, on conçoit que le rectangle *ABFE* ne saurait équivaloir à l'aire courbe *ABDOC*, à moins que les coordonnées de la courbe *COD* ne fussent tantôt plus petites et tantôt plus grandes que la hauteur *AE* du rectangle. D'où nous conclurons que, pour le même travail produit dans un temps donné, soit par une machine à mouvement uniforme, soit par une machine dont le mouvement est varié, cette dernière sera soumise à des efforts plus grands que la première, et que, par conséquent, ses pièces auront besoin de dimensions plus fortes pour assurer sa solidité. Mais, comme on l'a déjà dit, si les pièces de la machine à mouvement varié fatiguent davantage, si elles exigent plus de dimensions, elles deviennent plus pesantes, et donnent lieu à plus de frottement, à plus de résistances passives. Il est donc de la plus haute importance de faire en sorte que le mouvement de toute machine soit rendu le plus uniforme possible.

20. *Moyen de rendre le mouvement uniforme.* — Si tel est l'avantage du mouvement uniforme, comment l'obtenir dans les machines? Il n'y a qu'un seul moyen d'y parvenir, c'est de n'employer pour toutes les pièces dont elles se composent que des roues armées de

dents, ou se communiquant le mouvement à l'aide de courroies. Encore faut-il qu'elles marchent uniformément, et qu'elles soient bien centrées pour que leur centre de gravité ne monte ni ne baisse pendant leurs diverses révolutions. Cette symétrie des roues par rapport à leur axe est d'ailleurs avantageuse, en ce que les forces centrifuges, qui tendent du dehors au dedans à entraîner du centre de rotation dans les diverses parties de chaque roue, s'entre-détruisent et ne produisent sur l'axe aucune espèce de pression. On a dit que le mouvement circulaire des roues était le seul qui pût être rendu uniforme; car le mouvement rectiligne lui-même ne saurait se continuer indéfiniment, et si la pièce soumise à ce dernier mouvement doit revenir sur elle-même, ce mouvement, au lieu d'être uniforme, devient alternatif.

21. *Cas principaux de l'irrégularité du mouvement; moyen de le corriger.* — On distingue trois causes principales du mouvement variable des machines, savoir : l'irrégularité d'action du moteur, celle de la résistance utile, et celle du moteur et de la résistance utile à la fois.

Si l'outil ou le récepteur doit avoir le mouvement alternatif, on le changera en mouvement circulaire ou de rotation par un des moyens que nous ferons bientôt connaître. Si l'un et l'autre possèdent le mouvement alternatif, on examinera s'il ne convient pas de choisir des pièces douées d'un mouvement de cette nature, et de façon qu'il s'accorde avec ceux de l'opérateur et du récepteur. Par exemple, lorsqu'une machine à vapeur est destinée à faire mouvoir une pompe à eau, il est ordinairement possible de faire coïncider leurs alternatives. Si cette coïncidence était impossible, il faudrait alors transformer chaque mouvement alternatif en un mouvement circulaire. On a donc toujours le moyen de discerner les cas où les divers modes de mouvement sont nécessaires; et quoique aucun de ces modes ne puisse faire parvenir à une uniformité parfaite, on doit donner la préférence à ceux qui permettent la transformation avec douceur, et mettre de côté tous ceux qui agissent par secousses. Enfin, il se peut aussi que dans certaines machines où toutes les pièces sont des roues susceptibles de se mouvoir uniformément, le moteur ou la résistance utile n'agisse pas d'une manière constante. Ainsi, lors même qu'une machine à scier du bois serait munie d'une scie circulaire marchant toujours dans le même sens, les nœuds de

la pièce à débiter seront autant de causes qui feront encore varier la résistance. Quelquefois le travail se compose d'effets distincts et séparés, comme, par exemple, celui qui a pour objet la trituration de la poudre, et où il n'est pas possible que le pilon agisse continuellement. Quoi qu'il en soit, si les pièces sont alternatives, on régularise leur effet, soit par des contre-poids, soit par d'autres moyens. Si la résistance se compose d'une suite de chocs, il faudra les distribuer à des intervalles égaux. Enfin, si le moteur ou la résistance est susceptible de varier, on évitera que ces variations s'étendent à des limites trop étendues, et c'est l'objet des *régulateurs* ou *modérateurs*.

Le contre-poids qui sert de *moteur* à un tournebroche descendrait avec trop de rapidité et accélérerait le mouvement de toutes les autres pièces, si le *volant à ailettes*, par suite de l'accélération de sa vitesse, n'éprouvait de la part de l'air une résistance assez puissante pour contre-balancer l'action du contre-poids, et le forcer à prendre un mouvement uniforme. Ce volant fait ici fonction de *régulateur*.

Il en est de même des *soupapes de sûreté*, qui se lèvent dès que l'action de la vapeur excède une limite supérieure à celle qui est voulue pour la machine, ou des *régulateurs à force centrifuge*, qui diminuent l'introduction de la vapeur quand le mouvement est devenu trop rapide.

Le *Babillard* des moulins qui sert à distribuer le grain à la meule, en fait tomber une quantité plus grande dès que la machine s'accélère, et augmente ainsi la résistance au fur et à mesure que l'action du moteur est devenue plus puissante.

Le *pied de biche* dans les scieries est disposé de telle sorte qu'il ne fait avancer la pièce à débiter que de $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$ de ligne, selon la moins ou plus grande épaisseur de cette pièce.

Enfin, une dernière ressource reste encore; c'est le volant, consistant en un grand anneau de fonte doué d'une grande vitesse rotative, véritable *réservoir* de travail, dont l'inertie tend à régulariser le mouvement de toute la machine. La propriété de toute pièce qui tourne avec une grande force vive est en effet d'entraîner la machine ou de la forcer à continuer son mouvement, dès que le moteur commence à ralentir son action, et de s'opposer à son accélération dès que le moteur acquiert de la prépondérance sur toutes les autres résistances. Nous développerons avec détail l'éta-

blissement d'un volant appliqué au système d'une manivelle qui reçoit, à l'aide d'une bielle ou tige verticale, le mouvement imprimé à des pédales mécaniques. Cet appareil est analogue à celui du *tour à filer*, où le pied de la fileuse fait fonction de la puissance, et la roue fonction du volant. On verra que, dans ce système, il est possible de calculer le poids du volant, de façon que la vitesse ne varie que de $\frac{1}{10}$.

22. *Objet et division de cette troisième partie.* — Dans ce qui va suivre, nous nous occuperons successivement : 1° des communicateurs ou des moyens de transmettre le mouvement ; 2° des régulateurs et modérateurs ; 3° du tracé des pièces pour satisfaire à l'uniformité du mouvement ; 4° des *modificateurs* ou moyens de suspendre ou changer la nature du mouvement ; 5° des supports et de ce qui concerne la solidité des machines : après cela nous passerons à la théorie des moteurs, ce qui exigera qu'au préalable nous expliquions les lois de l'hydraulique.

III.

DES COMMUNICATEURS DU MOUVEMENT.

23. *Séries des machines simples d'après le mouvement qu'elles reçoivent et transmettent.* — Dans la description des communicateurs du mouvement des machines, nous laisserons en dehors les récepteurs et les opérateurs, parce que les premiers sont liés à ce qui concerne les moteurs, et que les autres sont en trop grand nombre. L'illustre Monge, le fondateur de notre mère école, de l'école polytechnique, a eu, le premier, l'idée de classer les machines simples ou élémentaires, par séries relatives à la nature du mouvement qu'elles reçoivent et transmettent. MM. Lanz et Bétancourt ont ensuite exécuté cette classification dans l'ouvrage intitulé *Essai sur la composition des machines*. Malheureusement, cet ouvrage est aujourd'hui en arrière des progrès qu'a reçus la science des machines ; beaucoup de combinaisons excellentes n'y sont pas, et un

grand nombre de celles qui s'y trouvent sont défectueuses. Cette classification, faite par eux d'après des considérations géométriques, est dénuée de la discussion nécessaire. Nous allons donner une idée du système de classification imaginé par Monge, puis nous passerons en revue les communicateurs les plus importants et reconnus tels d'après les principes précédents.

On a vu que le mouvement des machines simples peut être ramené à deux espèces principales, le mouvement *continu*, et le mouvement *discontinu alternatif* ou de *va-et-vient*. Il peut, de plus, se faire en ligne droite, ou suivant un cercle; c'est-à-dire qu'il peut être *rectiligne*, ou *circulaire*, de *rotation* autour d'un point, d'un axe, et il est très-rare qu'on ait besoin de s'occuper de mouvements qui s'effectuent suivant des lignes plus compliquées que le cercle et la droite. Voilà donc quatre espèces de mouvement qui, prises deux à deux, ou combinées avec elles-mêmes, donnent dix à quinze combinaisons principales. C'est ainsi que le mouvement *rectiligne continu* est susceptible de se transformer en *rectiligne* ou *circulaire* soit continu, soit alternatif, etc. MM. Lanz et Bétancourt ont dressé des tableaux où se trouvent décrites les solutions connues de ces transformations du mouvement. Mais il faut remarquer que plusieurs d'entre elles ne sont applicables qu'aux récepteurs ou moteurs, et aux opérateurs ou outils, de sorte que, si on supprime du tableau ces transformations, et si on rejette toutes les combinaisons qui sont défectueuses sous le rapport mécanique, ainsi que les mécanismes qui font seulement fonction de *régulateurs* ou de modificateurs instantanés du mouvement, il restera très-peu de transformations possibles intermédiaires entre le mouvement du récepteur et celui de l'opérateur. Aussi, n'aurons-nous guère à considérer que la transformation du mouvement rectiligne ou circulaire continu en mouvement rectiligne ou circulaire discontinu, transformation qui s'opère au moyen de roues armées de dents ou de courroies, ou par la vis avec son écrou, et que celle du mouvement circulaire continu en mouvements alternatifs, soit rectiligne soit circulaire, qui s'opère avec des manivelles à bielles ou excentriques et avec les balanciers, etc.

21. *Mouvement rectiligne continu en rectiligne continu.* — La plus simple des transformations du mouvement est celle du mouvement rectiligne continu en un autre mouvement rectiligne con-

tinu, dirigé, ou non, dans le même plan. Parmi les divers moyens employés pour cet objet, la poulie nous offre le moyen le plus généralement usité et le plus commode. On nomme ainsi une roue pleine (fig. 234), terminée en gorge à sa circonférence, et bombée à ses surfaces latérales afin qu'elle ne frotte pas trop contre les chapes qui la supportent. Tantôt l'axe de la poulie lui est fixé invariablement (*projection A*), et cet axe est terminé carrément par un contre-fort à quatre branches enchâssées dans la poulie au moyen de quatre vis. Tantôt l'axe est fixé aux chapes, et la poulie est percée d'un œil, lequel est entouré (*projection B*) d'une virole en cuivre armée de trois oreilles également enchâssées chacune dans la poulie à l'aide de trois vis.

Supposez maintenant une pareille poulie suspendue par sa chape, et dont la gorge reçoive une corde (fig. 235); il est évident que pendant que l'une des branches de la corde marche dans une direction, l'autre branche marchera dans une direction différente; ce qui donne lieu à la transformation de mouvement dont il est question, mais seulement pour le cas où les deux droites du mouvement sont dans un même plan.

Le même but est rempli par des tambours armés de bras qui relient à un *moyeu* commun (fig. 236), ses jantes bombées extérieurement et sur lesquelles passe une lanière ou courroie. Cette convexité a pour objet d'empêcher la lanière de s'échapper quand elle prend une déviation oblique. Si la surface était concave, les arêtes saillantes de la concavité ne manqueraient pas d'attirer entièrement la lanière, pour peu que celle-ci touchât, et de la détacher du tambour.

Quelquefois les poulies ou les tambours sont conduits avec des chaînes, et celles-ci, quand elles sont flexibles, produisent le même effet que les cordes ou les lanières; mais le plus souvent il en résulterait des soubresauts, des frottements qui, pour être évités, exigent des dispositions particulières.

Une chaîne est ordinairement formée d'anneaux oblongs, plats, d'une petite longueur et perpendiculaires les uns aux autres (fig. 237); une rainure, pratiquée dans le milieu de la gorge de la poulie ou du tambour, est destinée à loger les maillons qui se présentent perpendiculairement à cette gorge; les longues branches des autres s'appliquent à plat sur les bords de cette dernière. Si on pouvait craindre que la chaîne ne vint à tomber, on pourrait

placer latéralement des oreilles, telles qu'elles sont ponctuées sur la figure; mais cette précaution paraît être inutile.

Au lieu de ces chaînes ordinaires, on fait aussi usage de chaînes plates (fig. 238); et dans ce cas il n'est plus nécessaire de pratiquer une rainure dans la gorge de la poulie. Ce sont des plaques *m* qui se placent de champ sur la poulie, et qui, percées de deux trous, permettent qu'on les relie par des anneaux évidés *n* qui font fonction de boulons tourillons.

Enfin, on a encore les *chaînes anglaises*. Elles se composent de plaques *pp* (fig. 239), percées de trous au centre de chaque portion demi-circulaire qui les termine à chaque bout. La distance des centres de ces demi-cercles est un peu plus grande que le double de leur rayon. D'après cette forme, il est possible de les relier par des plaques semblables rangées sur l'un et l'autre côté des premières, au moyen de boulons qui traversent les trous circulaires des unes et des autres. Le jeu des plaques est évidemment égal à l'excès de la distance des trous d'une même plaque sur le double du rayon des portions circulaires qui forment leurs extrémités.

Parmi ces trois espèces de chaînes, on doit accorder la préférence à celle qui absorbe le moins de travail nuisible par suite du ploiement sur la poulie, de chaque chaînon derrière celui qui vient de s'y poser. Or, il faut remarquer que, dans les deux derniers systèmes, tous les chaînons sont sur une même ligne droite, tant qu'ils ne sont pas enroulés sur la poulie; et que, lorsqu'ils y sont posés, ils forment entre eux un angle qui dépend de la distance de leurs articulations consécutives. Cet angle étant aussi celui que décrit chacune de ces articulations autour de son boulon, absolument d'une manière analogue à ce qui a lieu pour un tourillon à l'égard de sa crapaudine, il est évident que le travail du frottement qui s'exerce entre deux chaînons, et dont le chemin parcouru par son point d'application est proportionnel à l'angle dont nous venons de parler, sera en général d'autant plus grand que ces articulations seront plus éloignées entre elles; ce frottement sera d'ailleurs de la première espèce (2e partie, 121) et proportionnel à la tension exercée à l'extrémité des chaînes.

Quant au premier système des chaînes ordinaires, il est possible qu'il ne s'y produise aucun frottement sensible. Il faut pour cela se rappeler (d'après le n° déjà cité) que le frottement ne devient de première espèce ou de glissement pour un tourillon, que quand

celui-ci est parvenu sur sa crapaudine à la position où l'inclinaison de la tangente à ce tourillon avec la direction de la pression, est mesurée par le rapport f du frottement à cette pression. Tant que le tourillon n'est pas encore arrivé à cette position, il n'y a que frottement de deuxième espèce ou de roulement. Si donc nous considérons un maillon qui, en tournant sur son consécutif, est absolument dans le même cas que le tourillon par rapport à sa crapaudine, et si l'angle de deux maillons consécutifs est assez petit pour que leur point de contact n'atteigne pas la limite où le frottement de première espèce commence, on doit concevoir comment il est possible qu'il n'y ait que simple roulement pendant toute la durée du ploiement d'un chaînon. Ainsi, avec des dimensions convenablement réduites, on rendra le premier système, qui lui-même est très-simple, beaucoup plus avantageux que les deux autres.

Si nous nous reportons au système des lanières, nous ferons observer que quand elles sont placées sur de larges tambours (fig. 240), ceux-ci sont à claire-voie, ou composés de liteaux encastrés dans deux plateaux circulaires formant les bases d'un cylindre parallèle à l'axe de rotation. Ces mêmes tambours sont pleins ou d'une seule pièce massive s'ils sont de faible dimension. Tous ces exemples ne sont encore relatifs qu'aux cas où les directions des deux mouvements rectilignes continus sont dans un même plan.

Examinons maintenant ce qui arrive quand les directions sont quelconques ou dans des plans différents. Il faudra alors employer, au moins, deux poulies, contenues chacune dans un plan quelconque passant par chaque droite (fig. 241), et qu'elles soient disposées de telle sorte que la portion de la corde qui touche les deux poulies se confonde avec l'intersection de ces deux plans.

Soient AB et CD (fig. 242) les deux droites quelconques dans l'espace suivant lesquelles on veut que le mouvement rectiligne se transforme. On prendra sur ces droites deux points E et F près des positions où les poulies doivent se trouver, et on les joindra par une droite EF. Imaginez dans le plan BEF et dans le plan EFD deux cercles, l'un tangent à AB et à EF, l'autre à CD et à EF; le problème sera résolu. Ce genre de transformation est fort utile dans les circonstances où il faut communiquer le mouvement rectiligne continu à de grandes distances, et lorsqu'il y a des obstacles

qui forcent à briser la direction des routes. Tel est le cas où il s'agit de communiquer le mouvement d'une extrémité à l'autre d'un bâtiment en suivant des sinuosités.

On a proposé d'autres moyens pour résoudre la question qui nous occupe, mais la plupart sont défectueux ou compliqués. Je vais en indiquer un des plus simples, et montrer combien son emploi dans les machines peut être nuisible.

Soit un coin *A* (fig. 243) qui peut glisser suivant sa longueur entre quatre piliers *cd, ef,* tandis qu'un autre coin *B* est arrêté par des goupilles, ou ce qui vaut mieux, afin de diminuer les frottements, par les rouleaux *k, g, h, i,* fixés dans le même coin et qui touchent les piliers : il est clair que si l'on pousse le coin *A* de *f* vers *d,* la ligne *mn* du coin s'élèvera en conservant son parallélisme. Les frottements sont ici énormes et multipliés, comme on peut s'en assurer en remontant à ce qui a été dit du coin (2e partie, 114 et 116). Un pareil système, bon pour tracer des parallèles *mn, m'n',* ne vaut rien pour transmettre l'action des forces. Les presses à coin offrent un exemple de la transformation actuelle du mouvement; mais c'est un outil, et l'action y est intermittente, ou ne s'exerce que par chocs, que par intervalles.

On a encore eu recours pour le même objet au système de deux règles *ab* et *cd* (fig. 244), jointes par des droites égales à charnière qui forment un parallélogramme, l'une *cd* étant fixe, l'autre *ab* se meut parallèlement à elle-même. Ce système est adopté dans certaines machines où le mouvement n'est pas permanent; et il sert de guide aux pièces de bois qu'on doit présenter parallèlement à elles-mêmes à l'action d'une scie circulaire; ce parallélogramme est plus ou moins oblique selon que la pièce à débiter a plus ou moins d'épaisseur, il est alors maintenu au moyen de clefs, valets ou sergents.

Le meilleur moyen de conduire un corps dans une direction rectiligne continue, ou parallèlement à lui-même, c'est de le poser sur un chariot armé de roulettes en fer ou en cuivre avec gorges et roulant sur des chemins ou languettes saillantes de fer. Cette disposition existe dans les *mull-jennys* afin de maintenir dans une direction invariable le mouvement du chariot qui porte toutes les bobines.

Pour de grands chariots destinés à transporter des matériaux sur des chemins de fer, le parallélisme du mouvement n'est pas aussi

rigoureux, et on supprime l'oreille intérieure des jantes du chariot (fig. 245). Enfin, on pratique quelquefois latéralement au chariot des languettes saillantes très-droites et bien dressées qu'on fait glisser dans des feuillures en cuivre (fig. 246); c'est ainsi qu'on guide les mouvements soit du châssis de la scie, soit du chariot porte-pièces dans les scieries.

25. *Mouvement rectiligne continu en mouvement circulaire continu, et* vice versâ. — Après la transformation précédente, nous arriverons tout naturellement à celle qui a pour objet de changer le mouvement rectiligne continu en mouvement circulaire continu, et réciproquement.

1° Le treuil donne déjà la double solution de cette question. On voit qu'il consiste dans un arbre appuyé sur des tourillons (fig. 247) et tournant autour de son axe à l'aide d'une manivelle ou d'une roue. Supposons maintenant une corde supportant un poids et enroulée à plusieurs reprises soit autour de l'arbre, soit autour de la roue.

Dans le premier cas, si on imprime un mouvement circulaire à la manivelle, le poids s'élèvera selon la verticale, et il offrira l'exemple d'un mouvement circulaire continu transformé en un mouvement rectiligne continu. Dans le second cas, au contraire, où le poids suspendu à la couronne est abandonné à sa propre action, il descendra verticalement et fera tourner le système du treuil; en un mot le mouvement rectiligne continu du poids sera transformé en un mouvement circulaire continu. Les vitesses de ces deux mouvements simultanés seront évidemment proportionnelles au rayon de l'arbre du treuil et à celui de la manivelle ou de la couronne.

Si le mouvement est transmis avec des chaînes, l'arbre est creusé en trécilicoïdes dont les intervalles contiennent des gorges destinées à recevoir tous les chaînons successifs. Les spires ont des pas assez faibles pour que, d'un tour à l'autre, les portions de chaîne enroulées se trouvent toujours très-rapprochées entre elles. Enfin, dans le cas où les chaînons sont alternativement perpendiculaires ou parallèles à l'arbre, ce dernier prend la forme d'une vis à filets carrés; les premiers s'y posent de champ et les autres sur leur plat. Ce système a été employé dans les grues anglaises des ateliers de Charenton.

Il existe une espèce de treuil dont la composition satisfait à la

condition que la vitesse d'ascension du fardeau soit aussi petite que possible par rapport à la vitesse de la roue qui fait mouvoir le treuil. Cette invention, qui paraît venir de la Chine, consiste à composer l'arbre du treuil de deux parties ayant deux diamètres différents (fig. 248). On fixe au fardeau une poulie de renvoi, et les deux extrémités de la corde passant dans cette poulie sont attachées en sens contraire sur chacune des parties du treuil, de manière que le but fixé sur la partie du plus gros diamètre s'enroule, tandis que l'autre se déroule. On voit alors, qu'à chaque tour du treuil, le fardeau monte d'une quantité égale à la moitié de la différence entre les circonférences de ses deux parties. Or, le travail de la puissance, en nommant P son intensité et C la circonférence que décrit dans un tour la manivelle à laquelle elle est appliquée, se mesure dans un tour entier par le produit $P \times C$; et si l'on nomme Q la résistance du fardeau, R et R' les rayons des deux parties du treuil, $Q \times \frac{2\pi R - 2\pi R'}{2}$ sera le travail de la résistance du fardeau dans un tour entier. D'où on tire, abstraction faite des résistances passives,

$$P \times C = Q\,(\pi R - \pi R').$$

On voit qu'à égalité de travail de la puissance, plus $\pi R - \pi R'$, ou enfin la différence de rayons, sera petite, plus Q, ou le poids du fardeau, deviendra énorme, de sorte que avec un semblable appareil on sera sûr de pouvoir vaincre les plus fortes résistances sans avoir besoin de changer le travail de la puissance.

2° Une seconde solution s'obtient au moyen d'une roue A (fig. 249) qui conduit une barre ou tige BC glissant entre des guides fixes *aa*, *bb*, ou entre des roulettes *co*, *dd* et *e*, disposées à rainures et languettes, comme cela a été expliqué ci-dessus pour les chariots. On peut fixer d'abord en C sur la tige et en C' sur la roue les bouts d'une lanière CTC', à l'aide de laquelle, la roue en tournant dans un sens convenable soulèvera la tige. Si l'on place, en outre, deux lanières BTB' en sens contraire, de manière à ménager entre elles un intervalle pour le jeu de la première, on pourra opérer le mouvement de la tige de haut en bas, en faisant marcher la roue selon une direction opposée à celle qui avait eu lieu lors de l'ascension de la barre. Ces lanières pourraient être remplacées par des chaînes anglaises, construites comme il a été dit au n° 24.

Quelquefois aussi on arme la roue de dents qui engrènent dans

une chaîne sans fin, tangente à cette roue (fig. 250). Mais cette disposition est vicieuse, parce qu'il y a beaucoup de frottement, d'inégalités, et que la chaîne éprouve des oscillations qui tendent à la désengrener; les chaînes doivent être faites avec beaucoup de soin et d'égalité dans les maillons.

3° La disposition la plus convenable pour les machines puissantes, c'est d'armer la tige de dents, ainsi que la roue; cette tige prend alors le nom de crémaillère (fig. 251); on donnera plus loin le tracé de ces dents.

4° L'écrou et la vis (fig. 252) seront encore un exemple de la transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne continu. Tantôt c'est la vis qui tourne sur elle-même, et l'écrou qui, ne pouvant suivre ce mouvement de rotation, chemine en ligne droite dans la direction de l'axe de la vis. Tantôt c'est l'écrou qui tourne et la vis qui monte ou baisse; nous avons traité de cette machine en détail aux n^os^ 136 — 141 de la 2° partie. Ce système présente un frottement énorme qui doit le faire rejeter toutes les fois qu'il ne s'agit pas de guider des outils ou de presser des matières. (Voyez à cet égard les divers paragraphes déjà indiqués dans la 2° partie.)

M. de Prony a trouvé une manière de transformer le mouvement circulaire en un autre rectiligne dont la vitesse soit aussi petite qu'on voudra. *AB* (fig. 253) est un axe divisé en trois parties *ab, cd, ef;* les deux vis *ab* et *ef* ont même pas, et traversent deux supports fixes *C, D,* où il y a deux écrous; cet axe se meut horizontalement et parcourt dans le sens *FE* à chaque tour un espace *H* égal au pas de ces deux vis. *cd* forme une autre vis dont le pas *H'* est plus grand que celui des deux premières, et qui s'introduit dans un écrou *M,* lequel ne peut que glisser sur la semelle *EF.* Ce dernier parcourrait de *E* vers *F* le pas *H'* de sa vis dans un tour, si cette vis ne faisait que tourner sur elle-même; mais comme en même temps elle chemine de *F* en *E* de la quantité *H,* il est évident que l'écrou *M* participe aussi à ce dernier mouvement, et qu'ainsi il ne cheminera, pendant une révolution, que de la différence $H' - H$, différence qui pourra être rendue aussi petite que possible, sans que les pas soient réduits outre mesure. Cet appareil est utile, soit pour guider les couteaux à tracer dont les mouvements doivent être fort lents, soit encore pour manœuvrer le fil *réticule* des lunettes qui ne se déplace que de quantités fort petites. Les vis qu'on nomme *micrométriques* sont construites de la sorte.

26. *Transformation du mouvement circulaire continu en un autre mouvement circulaire continu.* — Pour changer un mouvement circulaire continu en un autre mouvement circulaire continu, il suffit d'envelopper d'une courroie sans fin les couronnes montées sur chaque axe de mouvement. Mais il faut éviter que la courroie ne glisse sur les surfaces des couronnes, car son glissement l'empêcherait de transmettre le mouvement. Plus les arcs enveloppés sur les tambours sont considérables, plus le frottement est grand et moins le glissement est à craindre. Dans ce cas, on a soin que la courroie (fig. 254) enveloppe extérieurement les deux tambours. Mais si les rayons de ceux-ci sont petits (fig. 255), on croise les courroies, disposition qui, en outre, a l'avantage de changer la direction du mouvement. Veut-on encore se garantir mieux des effets du glissement? on fera faire plusieurs tours à la courroie autour des tambours, ainsi qu'on en agit pour l'archet du tourneur (fig. 256). Ce qui recommande surtout l'emploi de la courroie, c'est qu'elle peut transmettre le mouvement de rotation dans quelque direction que ce soit.

Pour augmenter la pression, et par suite le frottement des courroies, on peut tirer en arrière, au moyen d'une vis de rappel, l'axe de l'un des tambours; mais ce procédé est évidemment vicieux; ou bien encore on a recours au rouleau de tension (fig. 257), lequel, suspendu à un point fixe, presse sur la courroie, soit à l'aide d'un contre-poids, soit quand il a été tiré de haut en bas par l'intermédiaire d'une corde qu'on enroule autour d'un petit treuil à bras. Malheureusement, toutes ces corrections augmentent les frottements sur les appuis, ou les résistances nuisibles.

Le moyen le plus simple consiste à communiquer le mouvement par des couronnes juxtaposées, et, si la puissance est faible, d'entourer leurs surfaces de bandes de *cuir de buffle* qui s'engrènent réciproquement. Un tel système est principalement applicable dans les tire-sacs des moulins, où les mouvements s'opèrent avec beaucoup de douceur.

Dans les circonstances où les machines sont puissantes, ainsi que cela arrive pour la plupart de celles de l'industrie, on a recours aux engrenages pour transmettre le mouvement circulaire continu d'une couronne à l'autre. On distingue trois cas principaux : 1° Celui où les axes des couronnes sont parallèles; 2° celui où ils sont situés dans le même plan, en faisant entre eux un certain

angle; 3° celui où leurs directions sont quelconques dans l'espace, et ne se rencontrent pas. Dans le premier cas, les couronnes ont la forme d'un cylindre parallèle à la direction des axes (fig. 258); quant à la forme des dents, nous y reviendrons plus tard. Dans le deuxième cas, les roues ne peuvent être cylindriques, parce que les arêtes de leurs bases s'opposeraient au mouvement. Mais, si on leur donne une forme conique dont le sommet commun se confonde avec l'intersection S (fig. 259) des deux axes SA et SB, ces roues deviennent très-propres à se transmettre le mouvement. Les couronnes cylindriques sont terminées par des plans perpendiculaires à leur axe; mais il ne saurait en être de même à l'égard des couronnes coniques, on les termine extérieurement par d'autres cônes limites qui ont une arête commune AB, perpendiculaire à l'arête de contact ST des couronnes. Intérieurement elles sont terminées par des cônes parallèles à ceux qui les limitent extérieurement, de sorte que ces couronnes ont la forme dessinée (fig. 260).

Enfin, 3° cas, si les axes ne se rencontrent pas, on sera obligé d'avoir recours à trois roues coniques. AB et CD (fig. 261) étant les directions données de ces axes, on tracera une droite EF s'appuyant sur tous deux à la fois, et on la prendra pour axe d'une roue doublement conique a, intermédiaire entre les roues b et c, dont les droites données représentent les axes : les positions de ces roues sont d'ailleurs fixées par les conditions du problème. On s'est proposé d'effectuer directement la transformation pour ce troisième cas, mais les méthodes présentées relativement à cet objet sont trop compliquées et par conséquent défectueuses.

Il reste une dernière question à résoudre sur les roues d'engrenage : c'est de transmettre le mouvement dans un rapport donné. Deux roues de rayons égaux qui se conduisent par contact simple, tournent avec la même vitesse *angulaire*, parce que les arcs développés simultanément à leurs circonférences respectives sont égaux et mesurent des angles au centre égaux, angles qui indiquent de combien les roues tournent ensemble. Si les rayons sont inégaux, je dis que les vitesses de rotation des deux circonférences juxtaposées seront en raison inverse de ces rayons, ou que la circonférence a (fig. 262) fera deux ou trois tours pour un tour de la circonférence b, selon que le rayon de la première sera $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$ du rayon de la seconde. Car les roues, en se développant l'une sur l'au-

tre, ont à la circonférence de leurs couronnes des vitesses absolues qui sont les mêmes de part et d'autre. Nommant R le rayon CT de la circonférence a, et v_1 sa vitesse angulaire à l'unité de distance (2e partie, 60), Rv_1 sera la vitesse mesurée à sa circonférence. De même, si nous appelons R' et v_1' le rayon $C'T$ et la vitesse angulaire de la roue b, $R'v_1'$ sera la vitesse de sa circonférence, et on aura

$$Rv_1 = R'v_1', \quad \text{ou la proportion} \quad R : R' :: v_1' : v_1.$$

Si donc on a la position et la distance CC' des deux centres des couronnes, et qu'on partage cet intervalle en parties réciproquement proportionnelles aux vitesses angulaires ou aux nombres de tours de ces couronnes, ces parties obtenues CT et $C'T$ seront les rayons de ce qu'on nomme les *circonférences primitives* du mouvement.

Quand les roues sont coniques, la même relation a lieu à l'égard de leurs cercles qui se touchent en un même point de l'arête de contact. Ordinairement on considère les cercles CT et $C'T$ (fig. 263), milieux respectifs des couronnes ; et comme les cônes doivent avoir même sommet pour rouler par contact, il est aisé de déterminer les angles au sommet de ces mêmes cônes, lorsqu'ils sont assujettis à tourner avec des vitesses qui soient dans un rapport donné, et lorsqu'on se donne les positions de leurs axes. En effet, les perpendiculaires TC et TC à ces axes, qui sont les rayons moyens des roues, doivent être dans le rapport assigné ; traçant les parallèles mm' et nn' aux axes donnés SC et SC', et distantes de ces dernières de quantités égales aux perpendiculaires TC et TC', ces parallèles se couperont en T, qui sera le contact milieu des couronnes ; ce qui donnera en même temps l'arête ST commune aux deux cônes primitifs.

27. *Autres exemples de transformation du mouvement circulaire continu en circulaire continu.* — Le *joint universel* ou *brisé* est une pièce qui réunit deux axes quelconques, de manière que l'un transmette à l'autre le mouvement de rotation qui lui est imprimé. A et B sont les deux axes du mouvement et portent chacun une mâchoire D, tournant sur deux boulons opposés bb d'un croisillon C. Les figures 264, 265, 266, 267 représentent le joint brisé ; la première en fait voir la perspective, et les trois autres les diverses projections des mâchoires ainsi que du croisillon. Quelquefois, au lieu

de ce dernier, *C* (fig. 265), composé de quatre cylindres *bb* se coupant en croix, on se sert d'une boule *E* (fig. 266), terminée par quatre tourillons. Pour concevoir le jeu du joint universel, il faut remarquer que, quand le mouvement de rotation est imprimé à l'arbre *A* (fig. 267) cet arbre entraine dans ce mouvement sa mâchoire *D*, ainsi que le croisillon *C*, quelque position que le croisillon occupe d'ailleurs par rapport aux deux branches de cette mâchoire, qui, comme nous l'avons vu, ont la faculté de tourner sur leurs tourillons respectifs. Mais, puisque les quatre parties du croisillon sont solidaires, il est évident que celles qui servent de supports aux branches de la mâchoire, fixée à l'axe *B*, doivent aussi tourner, et imprimer à cet axe un mouvement de rotation. Ce système, très-simple en lui-même, ne convient cependant que dans les machines peu puissantes, ou lorsque les axes auxquels on a besoin de transmettre le mouvement ne forment pas extérieurement des angles très-grands. Il peut être employé, par exemple, pour réunir bout à bout ou accoupler des axes très-longs qui, devant reposer sur plus de deux appuis, ne sauraient être rigoureusement maintenus sur une même droite. Les pressions sur les articulations sont ici énormes, et occasionnent beaucoup de frottements, quoique d'ailleurs les chemins parcourus par les points d'application de cette résistance soient assez petits. Ce communicateur a été mis en usage en Hollande, pour transmettre le mouvement de rotation de l'axe horizontal d'un moulin à vent à des axes de vis d'Archimède, qui, comme on sait, doivent être inclinés à l'horizon.

La vis sans fin, dont il a été parlé au n° 142 de la 2e partie, est encore un exemple de la transmission du mouvement circulaire continu à deux axes perpendiculaires entre eux et non situés dans le même plan. C'est une vis à filets carrés qui repose sur deux tourillons et qui est terminée par une manivelle à laquelle la puissance est appliquée (fig. 268). Les hélices de cette vis s'engrènent dans les dents d'une roue, dont le plan contient l'axe de la vis, et les poussent constamment selon la même direction. Il en résulte que la roue tourne autour de son axe, et devient propre à soulever des fardeaux suspendus à une corde qui vient s'enrouler autour d'un treuil énarbré avec la roue.

On peut donc conduire la roue au moyen de la vis, mais la réciproque n'est pas vraie : autrement dit, il est impossible de conduire

la vis au moyen de la roue. En effet, si la roue devait conduire la vis, ses dents exerceraient contre les hélices des actions parallèles à l'axe de cette vis, et qui peuvent être comparées à la pression verticale d'un corps contre un plan incliné très-doux, dont l'inclinaison serait la même que celle des hélices par rapport à la base du cylindre auquel elles appartiennent. Or, il est évident que, quelque grande que soit la pression verticale Q d'un corps sur un plan très-doux AC, jamais cette pression ne parviendrait à le faire descendre; car les frottements contre le plan croissent avec cette pression, et si la pente du plan est telle que le mouvement ne puisse naître, le mouvement ne se produira pas mieux à la suite d'une augmentation dans la pression Q. Mais, si on appliquait une puissance P contre le coin ABC (fig. 269) qui se meut dans le sens BA, et que le corps Q fût assujetti à glisser verticalement entre des galets g, g, g, g, il ne sera pas très-difficile, à l'aide de cette puissance, de le faire monter verticalement. Revenant maintenant à la vis sans fin, on reconnaît sans peine que l'action des dents de la roue contre les filets de la vis, action qui est parallèle à l'axe de cette dernière, ne saurait, en tant qu'elle est puissance, produire de mouvement, tandis que ce dernier aurait lieu avec facilité pour une force perpendiculaire à cette action, c'est-à-dire pour une force qui conduirait la vis. Si nous nous rappelons ce qui a été dit (3e partie, 4) touchant l'objet des machines en général, nous nous convaincrons de la vérité de ce principe, que, toutes les fois qu'en agissant sur l'une des extrémités d'une machine on peut la faire mouvoir aisément, le contraire doit avoir lieu, si on agit à l'autre extrémité. En effet, puisque le but d'une machine est de changer le travail $E \times F$ d'un moteur, dans le travail $e \times f$ de l'opérateur, et que ces deux travaux sont égaux abstraction faite des frottements, il est évident que si E, ou le chemin parcouru par le point d'application du moteur, est très-petit comparativement au chemin e de l'opérateur, l'effort F du moteur sera au contraire très-grand par rapport à l'effort f exercé par l'outil. Voilà pourquoi, dans ce cas, on mettrait si facilement la machine en mouvement en agissant sur l'opérateur, et si difficilement en poussant le récepteur.

Tirez, par exemple, sur la barre d'un manége destiné à faire mouvoir un système où l'opérateur doit avoir une grande vitesse, cette barre résistera fortement. Agissez, au contraire, immédiatement sur l'outil, la machine cédera à un effort assez médiocre.

La scie, dont la vitesse est ordinairement très-grande dans les machines, si on la compare à celle du moteur, mettra sous une action que vous lui appliquiez, tout l'appareil en mouvement, tandis que les plus grands efforts contre la roue motrice deviendraient à peu près impuissants.

Dans l'exemple précédent du plan incliné, les chemins parcourus par la puissance P et par la pression Q sont proportionnels à la base et à la hauteur du plan ; si ce plan est très-doux, la base devient considérable par rapport à sa hauteur, et il est visible que la puissance P est au contraire bien moindre que la pression Q. Enfin, par un raisonnement analogue, on se rend compte, dans la vis sans fin, de la facilité qu'il y a à conduire la roue au moyen de la vis, et de la difficulté, ou plutôt de l'impossibilité, qu'il y aurait à vouloir obtenir un mouvement réciproque au précédent. Nous terminerons par cette remarque, que la vis sans fin consomme beaucoup de travail par les frottements, et que ce système n'est pas employé dans les machines puissantes où l'économie du travail est importante. Toutefois, à cause de la régularité de son mouvement, elle est fort utile dans le cas où il s'agit d'un ouvrage de précision.

28. *Transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif, et* vice versâ.— Tout en comprenant avec la transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif la réciproque de cette transformation, nous n'entendons pas dire que les moyens employés dans cet objet soient réciproques les uns des autres; c'est seulement pour abréger que nous classons ces deux circonstances dans une seule solution. Quoi qu'il en soit, le moyen le plus convenable pour opérer la première de ces transformations consiste dans la combinaison du mouvement de rotation d'une manivelle autour d'un axe avec celui d'une bielle dont l'extrémité supérieure pousse un corps forcé par des *prisons* ou par des coulisses à prendre un mouvement rectiligne alternatif. A (fig. 270) est un arbre tournant sur lui-même et auquel est fixé une manivelle armée d'un bouton B. Autour de ce bouton roule librement une bielle BC, dont l'extrémité C transmet le mouvement rectiligne au corps D de bas en haut pendant la demi-révolution ascendante EBF de la manivelle AB, et de haut en bas pendant la demi-révolution descendante FGE. Ce qui fait le principal avantage de cette combinaison, c'est que la vitesse et l'action varient par degrés insen-

sibles vers la fin et le commencement de chaque oscillation du corps *D*, ou de chaque demi-révolution de la manivelle, et que les pièces ne se quittent pas ni n'éprouvent aucun choc, aucune secousse nuisible. En effet, la vitesse de l'extrémité supérieure *C* de la bielle devient nulle quand le bouton de la manivelle parvient sur la ligne *AC* aux points *E* et *F*, où il décrit des chemins élémentaires perpendiculaires à cette droite; et cette même vitesse est, au contraire, la plus grande par des positions intermédiaires, ce qui fait que cette vitesse croît et décroît graduellement. Cette variation périodique du mouvement, en vertu de laquelle la vitesse redevient la même aux mêmes positions, demeure la même, quelle que soit la grandeur du bouton *B* de la manivelle; de sorte qu'au lieu d'un petit bouton on peut employer un bouton plus considérable. Il suffit que la distance des centres *A*, *B* (fig. 271), reste la même, et il est visible que l'amplitude des mouvements rectilignes alternatifs du corps *D* ne sera pas moins toujours égale au double de cette distance des centres. Si le cercle de *B* s'agrandit au delà de l'axe fixe *A*, sans que la distance des centres *A* et *B* varie, on aura ce qu'on appelle un *excentrique*, ou cercle tournant autour d'un point qui n'est pas le centre de ce cercle. La bielle consiste alors dans une double tringle (fig. 272), qui roule avec jeu dans une gorge pratiquée à la circonférence extérieure de l'excentrique, et qui est reliée au delà de cette circonférence, de distance en distance, par des croisillons destinés à la consolider. L'appareil d'un cercle roulant ainsi avec un axe *A* qui lui est fixé invariablement, est unité pour ouvrir ou fermer les soupapes des machines à vapeur.

Quelquefois, quand l'excentrique est fort grand, on le compose d'un simple anneau, relié à l'axe fixe *A* au moyen de bras (fig. 273). Si la course de la bielle mue par un excentrique ne dépend que de la distance du centre du cercle qui le compose, à l'axe avec lequel il tourne, et non de la grandeur de ce cercle, il n'en est pas de même du travail absorbé par le frottement de la bielle sur la gorge de cet excentrique ; car ce travail augmente avec la circonférence de ce dernier, et peut même devenir un multiple de l'effet utile que la bielle doit transmettre. Nommons, en effet, *F* l'effort exercé par la bielle, *R* la distance *AB* du centre de l'excentrique au centre de l'arbre qui l'emporte dans son mouvement, l'amplitude d'une oscillation rectiligne étant $2R$, le chemin parcouru par

le point d'application supérieure de la bielle sera $4R$ pendant la durée de deux oscillations de va-et-vient de cette dernière, ou d'une révolution complète de l'excentrique. Ainsi, le travail transmis par la bielle dans cette même durée sera $4RF$. D'un autre côté, le frottement exercé sur la gorge de l'excentrique est proportionnel à la pression F ou égal à fF, f étant un coefficient donné par les tables du n° 106, 2e partie, et dépendant de la nature des substances qui composent la bielle et l'excentrique. Si l'on fait attention que, dans l'hypothèse où la bielle demeure sensiblement parallèle à elle-même, le chemin parcouru par le point d'application du frottement sur la gorge de l'excentrique pendant une révolution complète de ce dernier est égal à sa circonférence, et si nous nommons r le rayon du cercle de cet excentrique, $2\pi r \cdot fF$ représentera le travail absorbé par le frottement. Divisant ce travail par l'effet utile $4RF$, on aura, pour leur rapport, le quotient

$$\frac{2\pi r \cdot f \cdot F}{4F \cdot R} = \frac{\pi r \cdot f}{2R}.$$

Si, par exemple, le coefficient $f = \frac{1}{6}$, et que le rayon r de l'excentrique soit sextuple de la distance des centres, ce qui arrive souvent, le rapport précédent devient $\frac{\pi}{2}$. Or, π, ou le rapport de la circonférence au diamètre, $= 3,1415$. Donc, le rapport de l'effet consommé par les frottements, à l'effet utile, $= 1,57$. Par conséquent, l'effet transmis à l'arbre fixe est $= 1 + 1,57 = 2,57$, ou deux fois et demie le travail utile de la bielle. Cet exemple démontre la perte énorme de travail qui résulte de l'emploi de l'excentrique, et combien il a été mal à propos mis en usage dans une machine aux environs de Paris, destinée à scier des pierres, et qui, mue avec la force de dix chevaux, ne produit guère que le travail de quatre. Toutefois, ce système est sans inconvénient pour le rôle qu'il joue dans les machines à vapeur, parce que le travail nécessaire au mouvement des soupapes n'est qu'une fraction fort petite du travail total de la machine. On voit, cependant, d'après ce qui précède, que pour bien juger d'une disposition donnée à tel ou tel appareil, il suffit de comparer le travail des frottements qui se produisent avec celui de la puissance.

Quelquefois, au lieu d'un bras de manivelle, on se sert d'une

roue en fonte (fig. 274), armée d'un bouton qui transmet le mouvement à la bielle. On a, d'ailleurs, la précaution de renforcer le bras près de l'endroit où le bouton est adapté. Il n'est pas difficile de reconnaître que cette disposition est tout à fait analogue à celle de la manivelle.

En général, on nomme *excentrique* toute courbe qui tourne avec un arbre, sans être concentrique à cet arbre ; et elle peut toujours opérer la transformation de ce mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif. Supposez un triangle équilatéral dont le centre coïncide avec celui d'un arbre tournant *A* (fig. 275), fixé invariablement à ce triangle, et dont les trois côtés soient remplacés par trois arcs de cercles décrits de chaque sommet opposé comme centre. Il est évident que si l'arbre tournant passe au travers d'une pièce verticale *BEDF* qui repose sur le système des trois arcs de cercle, cette pièce sera tour à tour élevée et abaissée par la révolution du triangle autour de l'axe *A*. Quant à l'amplitude d'une oscillation, elle sera égale ici à la différence $Ac - Ah$ des parties interceptées par le centre *A* sur le rayon de l'un des arcs de cercle; de plus, pour une révolution complète de l'arbre *A*, il y aura eu trois montées et trois descentes de la pièce *BEDF*.

Considérons encore une pièce verticale *MN* (fig. 276), maintenue par des galets *g*, *g*, entre lesquels elle peut glisser, et agissant par son poids sur une bande courbe en forme de cœur, qui reçoit son mouvement d'un arbre tournant *A*, auquel cette bande est fixée invariablement. Si l'on imagine que la courbe se meuve de droite à gauche, la pièce *MN* s'élèvera verticalement jusqu'à ce que la pointe *P* soit parvenue sur la verticale *AN*, et elle redescendra pendant une demi-révolution jusqu'à ce que le point de rebroussement *Q* soit arrivé dans la verticale *AN*, au-dessus de l'arbre tournant *A*. Dans une révolution complète, la pièce *MN* aura monté et descendu par degrés insensibles, de quantités égales à la différence $AP - AQ$. Enfin, ce mouvement s'opérera de la même manière, quelle qu'ait été la nature de la courbe excentrique. Mais ordinairement, dans une telle transformation qui, par exemple, s'effectue par l'ascension et la descente des tiges de piston et où il faut que le mouvement soit très-régulier, le tracé de l'excentrique doit satisfaire à cette condition que, pour des angles égaux décrits par la courbe autour de l'axe *A*, la tige *MN*

monte ou descende de quantités égales. Cela posé, voici comment le tracé pourra s'effectuer. Soient P et Q (fig. 277) la pointe et le point de rebroussement de la courbe en cœur destinée à soulever et à faire baisser pendant sa révolution complète la tige d'un piston; A le centre de l'arbre tournant. Portons AQ de A en 6' sur la droite QAP; et partageons l'amplitude AP — $A6'$ de l'oscillation, en un certain nombre de parties égales, en six par exemple. Divisons aussi les deux demi-circonférences arbitraires s'appuyant sur la droite QAP comme diamètre, dans le même nombre de six parties. Joignant les rayons à ces points de division, vous décrirez du point A comme centre, et avec des rayons successivement égaux à AP, $A1$, $A2$, $A3$, des arcs de cercle dont les intersections avec les rayons de même numéro détermineront autant de points de la courbe cherchée. Il est facile de voir que les diamètres de cette courbe, qui passent par le centre A de l'arbre tournant, sont tous égaux à la distance QP de la pointe au point de rebroussement de l'excentrique. La figure 278 montre le système d'un pilon que soulève une courbe *abc*, conduite par un arbre tournant A, et qui retombe par son propre poids dès que la courbe l'abandonne. A l'instant où la *came abc* saisit le *mentonnet DE*, elle l'aborde avec une vitesse acquise, et produit un choc violent qui consomme beaucoup de travail; mais ce choc paraît être inévitable, puisque le pilon doit être abandonné à lui-même pour effectuer son travail. De plus, l'action de la came contre le mentonnet est telle que le montant du pilon se déverse de droite à gauche, et presse d'un côté contre la moise supérieure de gauche, et de l'autre contre la moise inférieure de droite. Non-seulement les frottements que font naître ces pressions sont grands, mais il en est encore de même des chemins que parcourent leurs points d'application. Ces deux causes, le choc et le frottement, rendent évidemment ce système très-vicieux. On a cherché à réduire les frottements en supprimant le mentonnet, et en faisant saisir par la came le pilon dans la verticale qui passe par son centre de gravité. Pour cela, on compose le montant de deux parties EE (fig. 279), maintenues à un certain intervalle au moyen de deux moises *bb* boulonnées. Cette portion vide, ménagée entre les deux parties du montant, est traversée par un boulon ou roulette *a*, contre lequel pousse la came, qui a ainsi la faculté de pénétrer dans l'intérieur du montant du pilon. A la vérité, cette roulette *a* finit par ne plus tourner,

et c'est ce qui arrive en général pour les galets de friction, etc.

Il reste à examiner s'il ne serait pas possible de rendre moins influentes les pertes occasionnées par le choc. Supposez que la came soit à la fois tangente en *B* (fig. 280) à la circonférence de l'arbre tournant *A*, et au mentonnet au moment où elle remonte ce dernier à l'état de repos. On conçoit qu'à cet instant, au lieu du choc, il se produit un glissement pendant lequel le mentonnet, et par suite le pilon, est graduellement soulevé. Mais, comme ici la came doit recevoir plus de développement, le frottement, en parcourant plus de chemin, absorbe une quantité de travail qui peut être égale à celle que le choc aurait absorbée. Toutefois, cette disposition est au moins utile en ce sens qu'elle évite, au système, des secousses qui, dans tout état de choses, sont nuisibles à sa solidité. Enfin, on a armé de dents le montant du pilon, ainsi qu'une portion de l'arbre tournant (fig. 281); le pilon monte tant que les dents de ce dernier engrènent dans celles du montant, et descend dès que la portion non dentée de l'arbre se présente au pilon. Ce mouvement alternatif dure tout le temps que la roue continue à se mouvoir. Mais il est facile de voir que les dents n'ont pas assez de force pour résister au choc, et que ce système est encore plus vicieux que celui de cames appliquées à un mentonnet.

Nous ne parlerons pas du plateau tournant autour d'un axe, mentionné dans l'ouvrage de MM. Lanz et Bétancourt, et armé d'un bouton saillant qui, en glissant dans la rainure horizontale suffisamment longue d'un montant forcé de cheminer entre deux moises, communique encore à ce montant un mouvement rectiligne de va-et-vient ; nous n'en parlerons pas, dis-je, parce que, bien qu'ici la vitesse s'éteigne à la fin de la descente et de la montée comme dans la manivelle, le chemin que décrit le bouton et le frottement qui en résulte, absorbent une trop grande partie du travail du moteur.

Nous garderions aussi le même silence à l'égard de la combinaison d'une roue dentée qui roule dans une autre roue dentée intérieurement et d'un rayon double de celui de la première, si la plus petite des deux ne jouissait de cette singulière propriété, qu'un point quelconque de sa circonférence ne décrit constamment, soit en montant soit en descendant, un même diamètre de la grande roue. Voici en quoi consiste cette combinaison : *A* (fig. 282) est un arbre placé à une certaine distance en avant et vis à vis du

centre de la grande roue *C*, fixée invariablement sur deux supports *pp*. *M* est une manivelle qui tourne autour de l'arbre *A*, et dont le bouton *B* se prolonge suivant un axe parallèle à l'arbre *A*. La petite roue *D*, dont le rayon est moitié de celui de la roue fixe *A*, non-seulement peut rouler autour de l'axe *B*, mais encore engrener dans toutes les dents intérieures de la roue *C*, en suivant le mouvement de la manivelle. *E* représente une tige de fer rendant solidaire le prolongement de l'axe *B* avec un bouton *F* qui fait saillie en arrière de la petite roue *D* pour supporter une bielle *FG*. Or, je dis maintenant que la bielle *FG*, ou son point de suspension *F*, restera toujours sur le diamètre *AF*, et que, par conséquent, l'amplitude d'une montée ou d'une descente de cette bielle sera égale au diamètre de la grande roue *C*. En effet, pour que le point *F* reste toujours sur le diamètre *IK* (fig. 283), on a $FAO = IAO$. D'ailleurs,

$$\text{l'angle } IAO = \frac{\text{arc } OI}{AI},$$

et $$FAO = \frac{\frac{1}{2}\text{ arc } FO}{BO} = \frac{\frac{1}{2}\text{ arc } FO}{\frac{1}{2}AI} = \frac{\text{arc } FO}{AI}.$$

D'où $$\text{arc } FO = \text{arc } OI;$$

et cette dernière condition est remplie, puisque le petit cercle en roulant sur le grand, y développe un arc *OI* égal à l'arc *OF*. Toutefois, comme nous l'avons déjà dit, ce système a le grave inconvénient que les fortes pressions éprouvées par les dents sont capables d'en amener la rupture.

29. *Transformation du mouvement circulaire continu en mouvement circulaire alternatif.* — Le premier moyen que nous indiquerons pour transformer le mouvement circulaire continu en mouvement circulaire alternatif, a beaucoup d'analogie avec celui qui a pour objet le mouvement des pilons. C'est encore une roue armée de cames qui pressent les unes après les autres sur l'extrémité d'un levier mobile autour d'un point fixe, de telle sorte qu'après avoir tourné dans un sens pendant qu'une came agit sur son extrémité, il reprend un mouvement en sens contraire dans l'intervalle qui s'écoule depuis l'instant où cette came le quitte, jusqu'à l'instant où la suivante le reprend. Ordinairement le levier dont nous venons de parler est un manche auquel un marteau est

adapté (fig. 284). Tantôt la queue du marteau est poussée par la came de haut en bas contre une pièce inférieure *m*, dite *renvoi*, et, dans ce cas, le point d'application *T* de la came, et la tête *M* du marteau, sont situés de part et d'autre de l'axe de rotation *A* du système. Tantôt la came soulève le marteau immédiatement par la tête, et c'est le cas du marteau frontal (fig. 285). Tantôt enfin le marteau est saisi entre la tête et son axe de rotation (fig. 286). On peut alors, pour éviter le choc, avoir recours à un procédé semblable à celui qu'on a indiqué pour le pilon. C'est de mener par l'axe *A* une droite *AC*, presque tangentielle à une ligne près, à l'arbre tournant, et de tracer une came qui soit tangente dans le même point à l'arbre et à la droite parallèle à *AC*. Ce système a été mis en usage dans les usines de M. Cockerill, à Liége.

De tous les systèmes affectés à la transformation du mouvement circulaire continu en circulaire alternatif, le plus parfait est, sans contredit, celui d'une manivelle *M* (fig. 287), tournant autour de l'arbre *A*, et transmettant, par l'intermédiaire d'une bielle *B*, un mouvement circulaire alternatif à un balancier *CD*, mobile autour d'un axe *O*. Ce balancier, employé dans les machines à vapeur, est une pièce en fonte mince de deux pouces d'épaisseur, renforcée par des côtes. Son objet est de transmettre un mouvement sensiblement rectiligne de va-et-vient à la tige d'un piston *P*. On verra bientôt comment le dispositif du parallélogramme *abcd* remplit ce dernier but. L'appareil de la bielle, de sa manivelle et du balancier n'est qu'une imitation de la pédale des remouleurs ou du tour à filer.

Watt, pour cette même transformation, avait d'abord imaginé la *mouche*, ou mouvement planétaire. Quoique ce moyen ait été totalement abandonné, à cause de son peu de solidité et des frottements énormes qui s'y produisent, nous allons en faire une description succincte.

AB (fig. 288) est un balancier susceptible d'un mouvement circulaire alternatif autour de l'axe *C*; *cd* une tige qui tourne librement sur son axe en *c*, et dont l'extrémité est terminée en patte d'oie, et fixée au moyen de trois boulons au centre d'une roue dentée *E*, qui engrène dans une autre *F* de même rayon que la première, et énarbrée à l'axe du volant *N*. Sur les deux faces opposées au plan du dessin des deux roues, est une tige *ef* qui force la roue *E* à rester à la même distance du centre du volant, et aux

extrémités de laquelle les deux roues peuvent tourner respectivement. Le mouvement circulaire continu du volant fait monter et descendre la roue E, autour de la roue F, et par suite la bielle qui transmet ainsi un mouvement circulaire alternatif au balancier AB.

De ce que les deux roues E et F sont de même rayon, il est facile de conclure qu'une oscillation complète du balancier correspond à deux révolutions du volant. En effet, une oscillation complète du balancier a lieu, lorsque le centre de la roue E a fait une révolution entière autour du centre f du volant. Si on nomme v_1 la vitesse angulaire avec laquelle le premier centre se meut autour de f, R le rayon de chacune des roues dentées, $2Rv_1$ sera le chemin parcouru dans une seconde par le centre de la roue E. Puisque cette roue est fixée invariablement à la bielle, tous les chemins parcourus simultanément par les points de cette roue seront égaux à celui que parcourt son centre. Ainsi $2Rv_1$ sera aussi le chemin parcouru par la roue E à son point de contact avec la roue F. Si je nomme v_1' la vitesse angulaire de cette dernière, le chemin parcouru dans une seconde par ce même point de contact, en tant qu'il appartient à la roue F, sera représenté par Rv_1'. D'où on tire

$$Rv_1' = 2Rv_1, \quad \text{et, par suite,} \quad v_1' = 2v_1.$$

Ce qui nous apprend que la vitesse angulaire, ou le nombre de tours du volant, est double de la vitesse angulaire de la bielle ou du nombre de ses oscillations complètes.

Le levier dit *à la garousse* transforme le mouvement circulaire alternatif en mouvement circulaire continu. Si une fourche A (fig. 289) pousse successivement et toujours dans le même sens les dents crochues en fer d'une roue B, celle-ci prendra autour de son axe un mouvement circulaire. Or, ce dernier, ainsi que l'effort de la fourche A qu'on nomme *pied de biche*, est produit par le mouvement circulaire alternatif d'un levier coudé DCE autour d'un axe C. Si la puissance P s'exerce de haut en bas, le pied de biche fait avancer une dent de la roue B. Lorsqu'au contraire la puissance P fait mouvoir la branche CE du levier de bas en haut, la fourche se désengrène et se porte sur une dent inférieure. Quand ce système est employé à soulever un poids Q, on établit un déclic F pour empêcher la roue de prendre un mouvement contraire, pendant le désengrènement du pied de biche.

Quelquefois ce système est composé. Il consiste alors dans un

levier *AB* (fig. 290) qui a un mouvement circulaire alternatif autour de son axe *C*. Deux crochets, *DE* et *FG*, suspendus par des articulations à ce levier, engrènent tour à tour dans les dents de la roue *H*. Ainsi, lorsque le point *B* s'abaisse, le crochet *DE* s'élève et fait mouvoir la roue, tandis que le crochet *FG* se désengrène pour aller saisir une dent inférieure. Lorsque, par une oscillation contraire, le point *B* s'élève, c'est au tour du crochet *FG* de tirer la roue, et à celui du crochet *DE* de désengrener. On ne peut pas dire à la rigueur que le mouvement de la roue qui prend le nom de *roue à minute*, soit continu, car l'action est intermittente et se transmet par une suite de chocs qui démontrent combien ce système est défectueux lorsqu'il s'agit de lui faire exécuter immédiatement un grand travail. Toutefois, quand la roue à minute ne se meut qu'avec lenteur et qu'elle ne transmet pas l'effet utile, dans ce cas son travail est fort petit, ainsi que les pertes qui résultent de cette combinaison. C'est ce qui justifie l'emploi de la roue à minute pour conduire le chariot *porte-pièce* dans les scieries. Mais un pareil système ne pourrait convenir pour faire mouvoir les roues des vis à pressoirs. Les secousses qui succèdent fatiguent les hommes préposés à la manœuvre.

30. *Transformation du mouvement circulaire alternatif en rectiligne alternatif.*—Le premier exemple que nous offrirons sur la transformation du mouvement circulaire alternatif en mouvement rectiligne *alternatif*, c'est un balancier à secteurs (fig. 291) qui, en tournant sur son axe *O*, tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre, agit pour soulever et baisser des bielles ou des tiges de piston au moyen de chaînes fixées à la fois aux secteurs et à ces tiges, comme il a été indiqué au n° 25. Ce système a été et est encore employé dans les machines à vapeur destinées à épuiser l'eau. Mais on l'a remplacé avec avantage par le système suivant, dû au célèbre Watt, mécanicien anglais, qui, le premier, a rendu la machine à vapeur susceptible de transmettre le mouvement de rotation continu aux machines industrielles.

La figure 292 représente le balancier *AE* des machines à vapeur actuelles, doué d'un mouvement circulaire alternatif autour de son centre de rotation *O*, ou qui le reçoit de la tige *BG*, animée par l'action de la vapeur contre le piston *G*, d'un mouvement vertical de va-et-vient. Si le point d'attache supérieur *B* de la tige *BG* était

fixé à l'extrémité A du balancier au moyen d'un tourillon ou d'une articulation, comme le point A ne peut que décrire un arc de cercle autour de O, la tige BG ne pourrait rester verticale, et puisque le piston G se meut en ligne droite, la tige BG serait forcée ou bridée, à moins qu'il n'y eût une autre articulation à sa naissance en G du côté du piston. C'est ce qui a lieu dans quelques machines, mais alors l'action contre le piston de la part de BG se décompose, et le piston presse plus d'un côté que de l'autre, ce qui occasionne des fuites de vapeur du côté où il presse le moins. Watt a fixé l'articulation B de la tige à l'un des sommets du parallélogramme $ABCD$, articulé dans ses angles, ou plutôt à la traverse qui réunit les sommets des deux parallélogrammes parallèles et égaux, embrassant le balancier de part et d'autre de ses deux faces verticales. Deux sommets A et D de ces parallélogrammes, que désormais nous regarderons comme n'en formant qu'un seul, sont situés sur l'axe de symétrie AE du balancier, et le quatrième C est guidé par une ou deux tiges FC, nommées *brides* et tournant autour du centre F, fixé de façon que B demeure sensiblement sur une même verticale. Voici comment on s'y prend pour fixer la position de F, quand le parallélogramme, la tige du piston et le balancier sont donnés :

Soient $A'O$, $A''O$ (fig. 293) les positions extrêmes du balancier ; AO sa position intermédiaire ou horizontale, $B'G$ la direction indéfinie de la tige du piston. On tracera les trois parallélogrammes $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$ et $ABCD$, correspondant aux positions précédentes, c'est-à-dire tels que les sommets B', B'', B étant sur la verticale $B'G$, les côtés qui réunissent les sommets des mêmes lettres respectivement sur chacun des parallélogrammes, soient égaux. Il en résultera trois positions C', C'', C, de l'extrémité de la bride conductrice FC, et on fera passer par les trois points C', C'', C, un cercle dont le centre F sera pris pour le point fixe de cette bride. Cette solution n'est pas rigoureuse, parce que si on construisait un grand nombre de positions du parallélogramme d'après la condition que tous les sommets B soient sur la même verticale $B'G$, on verrait que le sommet C ne reste pas sur un véritable arc de cercle. Donc, réciproquement, en forçant le sommet C à parcourir le cercle dont F est le centre, le sommet B ne restera pas constamment sur la verticale $B'G$. Mais, en choisissant des données convenables, on peut faire que les déviations du point B, hors de la

verticale, soient alors très-petites, ou ne dépassent pas une ou deux lignes.

Pour obtenir cette déviation, on n'a qu'à imaginer que le sommet B du parallélogramme devienne libre, et qu'à diriger le parallélogramme, en contraignant C à rester sur le cercle $C'C''C$, trouvé ci-dessus; puis on tracera la ligne qui passe par toutes les positions du sommet B intermédiaires aux positions B', B et B'', qui resteront seules forcément sur la verticale. On trouvera que cette ligne forme une espèce d'S (fig. 294), qui coupe la verticale $B'G$ en B, et qui s'en écarte symétriquement, entre les positions extrêmes B' et B'', de quantités cb, $b'c'$, qu'il sera facile de mesurer. On aura d'ailleurs l'attention de construire l'épure de grandeur naturelle, ou même avec des dimensions plus grandes, si on veut procéder avec beaucoup de rigueur.

Il y a quelques règles à observer pour que la déviation soit la moindre possible :

1° La direction verticale $B'G$ (fig. 295) de la tige doit diviser en parties égales la distance Aa comprise entre l'arc et la corde de l'arc $A'AA''$, décrit par l'extrémité A du balancier;

2° La corde $A'A''$, qui est à très-peu près égale à la course du piston, ne doit pas excéder de beaucoup la moitié ou les deux tiers de la longueur AO du balancier, c'est-à-dire que AO doit surpasser une fois et demie au moins la longueur de course de la tige;

3° On fera la longueur des côtés non parallèles au balancier, du parallélogramme, de façon que l'extrémité B' (fig. 293) de la tige soit sur l'horizontale $B'O$ du centre du balancier, quand celui-ci occupe la position supérieure extrême $A'O$;

4° L'horizontale OB' doit partager en deux parties égales l'angle total décrit par le balancier;

5° Quant à la longueur des côtés $A'D'$ et $B'C'$, elle est arbitraire; ou plutôt, si on veut, elle dépend de la distance à laquelle on veut placer le centre F, ou de la longueur de la bride : car plus $C'D'$ se rapproche vers le centre O du balancier, moins l'arc décrit par C' sera grand, et plus la bride FC' sera courte.

Quelquefois, quand on veut faire conduire simultanément deux tiges $B'G$ et $b'g$ (fig. 296), on forme un parallélogramme $a'b'c'D'$ intérieur, qui a deux côtés $c'D'$ et $a'D'$ communs avec le grand, et dont le sommet b', servant de suspension à la seconde tige, est

sur la droite OB', qui joint au centre O du balancier le sommet de suspension B' de la première tige. Car, à cause que les lignes $B'O$ et $b'o$ sont en rapport invariable, b' décrira une droite si B' en décrit une; et il n'y aura besoin que de la même bride $C'F$. On pourrait encore attacher une troisième tige au point b'' de rencontre de $B'O$ avec le côté opposé $C'D'$.

La figure 297 donne une disposition de parallélogramme renversé, dans laquelle $A'O$ est le balancier, et les côtés $A'B'$ et $C'D'$ sont très-longs, parce qu'ici la tige $B'G$ est censée être fort courte et être placée à une hauteur assez grande au-dessus du balancier.

On peut encore simplifier la construction du parallélogramme, en supprimant les côtés AD, DB et BC (fig. 298), et en le bornant au seul côté AC, guidé en C par la bride FC. Le point d'attache de la tige bg, à mouvoir verticalement, se place en b, sur le côté conservé AC, à son point de rencontre avec la ligne menée du centre O du balancier au point B, qui serait le sommet d'un véritable parallélogramme. La construction pour obtenir le centre F de la bride est extrêmement facile. Car $b'g$ (fig. 299) étant la verticale donnée, menez par les positions supérieure, inférieure, et horisontale, A', A'' et A de l'extrémité du balancier AO, des droites telles que le point d'attache soit en b', b'' et b sur la verticale $b'g$, et prolongées chacune de $b'c'$, $b''c''$ et bc, égales au reste bo du côté Ao; le point F de rotation de la bride sera le centre du cercle passant par les extrémités c', c'' et c.

Il existe d'autres systèmes de balanciers à axe mobile et qui peuvent servir à rendre le mouvement des tiges sensiblement vertical. Quoique ces systèmes n'offrent pas des avantages particuliers sur les précédents et soient rarement employés, nous en donnerons une idée succincte : BO (fig. 300) est un balancier oscillant sur l'axe O, placé à l'extrémité d'une forte tige qui tourne autour d'un axe fixe A. FC est une double bride embrassant le balancier, laquelle tourne autour d'un point F. La position de ce point fixe F est à l'intersection de l'horizontale de l'axe O et de la verticale passant par l'extrémité B du balancier, en tant que cette dernière occupe la position la plus basse. BG représente la tige d'un piston dont on veut que le mouvement soit tenu vertical. Les positions extrêmes BO et $B'O$ du balancier sont d'ailleurs toujours symétriques par rapport à sa position horisontale FO. Pour trouver le centre de rotation A de la tige qui sert de support au tourillon O du balan-

cier, on portera $FC + CO = BO$ (à cause de $BC = FC$), de F vers I sur l'horizontale FO. Puis, par les points I et O, on fera passer un cercle, le plus grand possible, dont le centre sera pris pour l'axe A du support. On conçoit, en effet, que, pour que l'extrémité B de la tige BG s'éloigne peu de la verticale BB' avec laquelle elle aura trois positions communes, il convient que OI soit très-petit par rapport au rayon OA. Si on ne peut faire OA très-grand, il faudra éloigner le point de rotation O du balancier de F ou de B, pour que l'angle BOB' décrit par le balancier soit très-petit, et pour qu'il en soit de même de OI ou de la différence entre OB et BO.

Nous terminerons ce que nous avons à dire sur la transformation du mouvement circulaire alternatif, en mouvement rectiligne alternatif, par un système fort simple qui peut être utilement employé pour la manœuvre d'une pompe à eau. Il consiste dans un levier BD (*fig.* 301) mobile autour de l'axe O, et dont une des extrémités B reçoit, par une puissance appliquée, un mouvement circulaire alternatif, tandis que l'autre est engagée dans une tige LM, tenue dans une position verticale, par la partie supérieure au moyen d'un œillet m dans lequel elle glisse, et par la partie inférieure au moyen du piston que cette tige supporte et qui glisse dans son corps de pompe. Reste à expliquer comment le levier moteur est engagé dans la tige LM. La tige est contournée selon une mortaise $opqr$, au bas de laquelle est un axe rs. C'est sur cet axe que tourne une fourche F, dont les deux branches forment une articulation avec le levier OB, au moyen d'un autre petit axe qui traverse à la fois les deux branches de cette fourche et l'extrémité D du levier de manœuvre. Cette disposition est généralement adoptée dans les presses hydrauliques.

31. *Mouvements circulaire ou rectiligne alternatifs, en mouvements de même espèce.* — Il serait peut-être inutile d'indiquer les transformations soit du mouvement circulaire alternatif en circulaire alternatif, soit encore du mouvement rectiligne alternatif en rectiligne alternatif, parce que les moyens qui transforment le mouvement circulaire alternatif ou le mouvement rectiligne alternatif en circulaire continu (3e partie, 28 et 29) résolvent la question parfaitement. Il existe cependant un petit nombre de moyens directs d'opérer cette transformation. Le tour à pédale et à ressort

est un exemple de transformation du mouvement circulaire alternatif en un autre mouvement circulaire alternatif; car la pédale *CD* (fig. 302) qui le reçoit, le transmet au tour *K*, par le moyen de la corde *abc*, enroulée à plusieurs reprises sur le tambour *AM*, et qui s'attache au ressort *B* par son autre extrémité.

Le mouvement rectiligne alternatif se communique par les mouvements connus de sonnettes. C'est une pièce, ou levier coudé, *boo* (fig. 303), tournant autour de l'axe *o*, et dont les deux branches *ob* et *oc* transmettent le mouvement alternatif rectiligne d'un fil de fer ou corde *ab*, à la corde *cd*. Si, au lieu d'être situées dans le même plan, les deux droites *ab* et *cd* (fig. 304), sont dans des plans différents, il faudra les réunir par une droite commune *ef*, et placer deux mouvements de sonnettes, l'un dans le plan de *ab* et de *ef*, l'autre dans le plan de *ef* et de *cd*; ces deux pièces communiqueront entre elles au moyen d'une corde située à l'intersection *ef* des deux plans.

Enfin, ce même mouvement est transmis aussi par des varlets et bielles (fig. 305), ainsi que cela a été pratiqué dans l'ancienne machine de Marly. Mais tous ces systèmes donnent lieu à des frottements énormes; leur jeu augmente, les chocs se succèdent, et la machine finit par se disloquer. C'est pour cette raison que les Anglais ne cherchent point à transmettre directement les mouvements alternatifs; ils préfèrent transformer le premier mouvement alternatif en circulaire continu, et celui-ci dans le nouveau mouvement alternatif qu'on veut produire.

IV.

DES MODIFICATEURS INSTANTANÉS DU MOUVEMENT.

32. *Classification des modificateurs instantanés du mouvement. Définition.* — On appelle *modificateur instantané* du mouvement toute pièce destinée à changer à volonté, et tout d'un coup, le mouvement d'une ou de plusieurs pièces d'une machine. Les modificateurs peuvent se classer en trois espèces distinctes, selon l'objet qu'ils ont à remplir. La première espèce a pour but, ou d'interrompre le

mouvement ou de le reproduire pendant un temps fini, d'opérer, en un mot, ce qu'on entend par *embrayage* ou *désembrayage* des pièces. La deuxième espèce de ces modificateurs doit changer l'état du mouvement de quelque partie, pendant un instant fort court, c'est-à-dire momentanément, et il arrive que c'est la machine elle-même qui remplit la fonction de rendre ou de donner le mouvement par des mécanismes à détente, des ressorts, des encliquetages, par des roues à rochet, etc. Enfin, la troisième espèce sert à modifier, à rendre double ou triple la vitesse d'une machine, sans l'arrêter, pendant qu'elle est en action. Nous allons parcourir succinctement les plus importants modificateurs de chacune de ces trois classes, et qui sont consacrés par l'usage ou par leur bonté. Donnons d'abord quelques définitions indispensables.

On sait qu'un *manchon* n'est autre chose qu'un cylindre creusé intérieurement et susceptible d'embrasser un arbre sur tout son pourtour, et qu'il diffère d'un tambour en ce que le manchon est plein et que le tambour porte des bras. Cela posé, toute roue ou poulie, tout manchon ou tambour qui est lié d'une manière invariable à un arbre de rotation ou qui fait corps avec lui, se nomme *fixe*. Si une roue ne peut que glisser le long de son arbre, sans cesser d'être entraînée dans le mouvement de rotation, on la dit libre *par glissement*. Enfin, quand une roue ne peut que glisser, et que seulement elle peut tourner sur elle-même sans entraîner l'arbre dans le mouvement de rotation, on la nomme *roue folle* ou *poulie folle*.

Nous ne dirons rien sur les roues fixes, attendu qu'il est facile de les concevoir.

Quant aux roues libres par glissement sur un arbre, nous ferons observer qu'on leur donne cette qualité de deux manières, soit en les liant invariablement à cet arbre et en laissant à ce dernier la faculté de glisser longitudinalement sur des coussinets, soit encore en ajustant l'œil par lequel elles embrassent l'arbre, avec cet arbre lui-même, de façon qu'avec très-peu de jeu, la roue et l'arbre puissent glisser à *frottement doux*, l'un sur l'autre, et s'entraîner réciproquement par leurs parties saillantes dans le sens de la rotation. A cet effet, comme toute roue peut être liée invariablement à son manchon, on doit concevoir que l'arbre et l'œil du manchon reçoivent la forme d'un carré (fig. 306, 1), ou d'une figure régulière quelconque (fig. 306, 2) ayant des saillies et des rentrants.

Mais il est très-difficile d'ajuster sans beaucoup de jeu deux pièces ainsi conformées ; il vaut mieux faire l'arbre et l'œil du manchon circulaire, ce qui s'exécute avec perfection sur le tour, et placer en saillie sur l'arbre (fig. 306, 3), ou dans l'intérieur du manchon (fig. 306, 4), un tenon ou languette parallélipipédique ou cylindrique, qui s'engage dans une rainure plus ou moins longue pratiquée à l'une ou l'autre de ces deux pièces (fig. 306, 5). Nous ne saurions entrer ici dans des détails sur la construction de ces pièces, qui donnent lieu d'ailleurs à une grande sujétion.

Nous proposerons seulement, à la place des systèmes précédents, inventés pour le glissement des roues sur leurs arbres, cet autre procédé plus simple. L'arbre *CD* (fig. 307) et l'œil du manchon étant l'un et l'autre parfaitement circulaires, le manchon *M* qui conduit la roue ou qui lui est fixé invariablement, serait terminé extérieurement par une surface parfaitement cylindrique, qui porterait une rainure ou une saillie continue parallèle à l'axe et destinée à glisser le long d'une pièce de fer solide *AB*. La longueur *AB* de cette pièce dépendrait de l'amplitude de la course qu'aurait besoin de prendre la roue sur son arbre, et les extrémités de cette même pièce seraient fixées par ses deux bouts avec l'arbre *CD*, auquel elle serait parallèle et hors duquel elle formerait saillie. En général, la solidité de ce système sera d'autant plus assurée, que la distance de *AB* à l'axe sera plus grande et que la longueur de cette pièce sera plus courte. Au lieu même de pratiquer une mortaise sur toute la surface du manchon, on pourrait se borner à des oreilles embrassant de part et d'autre la pièce *AB* (fig. 308), et placées deux à deux à chaque extrémité du manchon.

Lorsque la roue ou poulie doit être folle, sa disposition est très-simple : l'arbre et l'œil de la roue sont circulaires et concentriques dans la partie en contact, et la roue s'appuie de part et d'autre contre des épaulements de l'arbre. Ceci étant entendu, passons à la première espèce de modificateurs, c'est-à-dire à ceux qui doivent opérer l'embrayage ou le désembrayage.

83. *Embrayage des roues dentées.* — La figure 309 montre le moyen de désembrayer, ou de désengrener deux roues dentées. *A* est une roue fixe, et *B* une autre roue qui peut glisser le long de son axe supposé fixe. Cette dernière roue porte un manchon extérieur *C* avec une gorge dans laquelle s'engage un levier *EF* qui

pousse les épaulements de ce manchon par une partie arrondie *a* et qui tourne autour d'un point fixe *D*. L'extrémité *E* de ce levier est tirée au moyen d'une ficelle. A la place de la partie arrondie *a* du levier, on pourrait substituer une roulette fixée avec le levier. Dans tous les cas il est aisé de voir comment on fait glisser la roue *B* pour la désengrener de la roue fixe *A*. Toutefois, ni ce système, ni tout autre équivalent, ne saurait servir pour rendre le mouvement à une machine au repos, quand la masse et la vitesse des pièces à mouvoir sont très-grandes. Leur inertie à vaincre deviendrait trop considérable, et il se produirait un choc capable de briser les extrémités des dents en prise au moment de l'engrènement. Voilà pourquoi on n'emploie ce mode de rembrayer et de débrayer que dans le repos de la machine ou que quand elle marche avec lenteur.

34. *Embrayages au moyen de plateaux avec saillies ou rentrants.* — Afin d'éviter la rupture dans toutes les circonstances où elle pourrait avoir lieu, on a imaginé de rendre la roue *B* folle et indépendante du manchon (fig. 310). Ce dernier est mobile par glissement sur l'axe, et se rapproche ou s'écarte de la roue *B* par le moyen d'un levier, comme précédemment ; et sans que pour cela la roue soit désengrenée. Mais le manchon s'y engage de diverses manières. Tantôt le manchon *C* est armé d'un plateau qui porte deux mentonnets *dd*, destinés à s'engager dans deux trous de la roue dentée *B* quand on veut que son mouvement devienne commun à l'arbre *EF*. Ici la rupture, si elle avait lieu, ne se manifesterait qu'à l'égard des deux tenons *dd*, et aurait moins d'inconvénient que pour les dents de la roue *B*.

Tantôt la roue *B* est terminée par un plateau *M* (fig. 311), garni de saillies convergentes vers le centre *a, b, c*, qui s'engagent avec les creux égaux à ces saillies, pratiqués dans un plateau *N* qui fait corps avec le manchon *C*. Il est entendu que ce dernier glisse librement le long de l'axe, et que c'est encore par sa réunion avec la roue folle *B*, que l'arbre participe au mouvement de rotation reçu par l'engrènement permanent de cette dernière avec une autre roue dentée fixe. Quelquefois les plateaux du manchon et de la roue sont découpés en crémaillère, ou terminés vis à vis l'un de l'autre par des plans inclinés que limitent la surface extérieure cylindrique des plateaux, et des plans verticaux qui convergent

vers le centre. Les projections de cette dernière espèce d'embrayage sont dessinées dans la figure 312. Enfin, les mêmes systèmes sont encore applicables, en fixant invariablement le manchon *C* (fig. 313) après la roue *B*, qui devient à la fois mobile par glissement et folle. L'autre plateau *D*, qui n'appartient pas au manchon, fait corps avec l'arbre fixé entre des coussinets. Ici la roue motrice *B* doit être fort longue, si on veut encore éviter le désengrènement des roues.

35. *Cônes de friction.* — Au lieu de faire embrayer la roue *R* et son manchon *C* par des pièces à saillies et à rentrants, on fixe à la première un tambour conique creux *A* (fig. 314), et au manchon *C* un pareil tambour *B* qui entre dans l'intérieur de l'autre cône, quand à l'aide du manchon on vient à l'approcher avec force. Ici on peut conduire les choses avec une telle adresse que le mouvement ne soit transmis que peu à peu à celle des deux pièces qui doit recevoir le mouvement de rotation; car on est maître de faire accroître autant qu'on le veut le frottement des cônes par la pression latérale du manchon. Ce système, excellent sous ce rapport, n'est pas bon pour les machines puissantes, attendu que l'effort pour embrayer et débrayer peut être très-grand.

Nommons *F* l'effort qui agit sur le cône *ABCD* (fig. 315), destiné à pénétrer dans l'autre. Ce cône *ABCD* pressera le cône extérieur en des points qui seront répartis le long du cercle moyen de la surface selon laquelle les deux cônes se touchent; et ces points seront autant de points d'appui où seront appliquées des composantes normales partielles et égales q, selon lesquelles la force *F* pourra être décomposée. Ainsi, la pression totale qui résultera entre ces deux cônes, et qui est analogue à celle que le coin exerce sur ses points d'appui dans la matière qu'il est destiné à fendre, peut être représentée par $2\pi rq$, r étant le rayon moyen de la circonférence de contact. On peut supposer d'ailleurs que le cône *ABCD* écarte les parois du cône extérieur, de manière à se mouvoir parallèlement à lui-même et à prendre la position très-voisine *abcd*. Le chemin élémentaire estimé sur la direction de *F* sera alors *Aa*, et le travail de cet effort égal à $F \times Aa$. Si on abaisse la perpendiculaire *ao* sur le côté *AB* du cône, cette perpendiculaire sera le chemin estimé sur une pression normale partielle q; $q \times ao$ exprimera le travail de cette pression normale; et il est évident que la

somme des travaux de toutes les forces q sera $2\pi r \cdot q \times ao$. Or la pression totale résultant $2\pi rq$ est aussi représentée par Q, en sorte que le travail élémentaire dû à toute la pression sera $Q \times ao$. Quant au frottement le long des génératrices des cônes, il sera fQ, et son chemin élémentaire ne sera autre chose que Am. Donc le travail total du frottement aura pour valeur $fQ \times Am$. On aura, par conséquent,

$$F \times Aa = (Q \times ao) + (fQ \times Am).$$

D'où

$$F = Q\,\frac{ao + (f \times Am)}{Aa}.$$

Or, le frottement fQ doit être égal à l'effort P, qui, agissant à la circonférence de contact, est nécessaire pour entraîner les deux cônes dans le mouvement de rotation. Ainsi,

$$P = fQ, \quad \text{ou} \quad Q = \frac{P}{f}.$$

Faisant cette substitution dans la valeur de F, on trouvera

$$F = \left(\frac{Am}{Aa} + \frac{ao}{fAa}\right) P.$$

Cette valeur nous apprend que l'effort à faire F est d'autant moindre, que le rapport $\frac{ao}{Aa}$ est plus petit et le coefficient f du frottement plus considérable. Si, maintenant, on fait attention que le premier rapport est relatif à l'inclinaison de la génératrice du cône, on doit conclure que plus l'angle des cônes sera aigu et plus les surfaces en contact seront raboteuses, plus l'effort F du manchon aura d'action pour produire le frottement nécessaire à l'entraînement des deux surfaces.

86. *Embrayage au moyen de la bride de friction.* — Une roue BB' (fig. 316), faisant corps avec son arbre tournant DD', porte à la couronne une gorge qui est embrassée par une bride en fer *abcde*, composée de deux branches réunies aux extrémités d'un même diamètre par des vis f et e. En serrant plus ou moins les pattes saillantes accouplées en f et e, on augmente à volonté la pression et par suite le frottement de la bride *abcde* contre la gorge de la roue.

C est un manchon à gorge à glissement, muni de deux tenons saillants *A*, *A'*, qui, par le rapprochement du manchon, peuvent s'épauler en sens contraire ou dans des positions diamétralement opposées contre les saillies accouplées de la bande en *e* et *f*. On voit qu'alors le manchon en tournant avec son arbre *FF'* entraîne la bande de fer *abcde* et que celle-ci entraîne la roue qu'elle enveloppe, ainsi que son arbre. A la vérité, lors de l'instant de la prise, la roue résistera d'abord en vertu de son inertie, et le ressort glissera en frottant autour de sa gorge, avec beaucoup de lenteur. Mais bientôt la vitesse augmentera au point que le travail du frottement deviendra assez considérable pour faire marcher la roue avec la bande.

La même figure (316) fait voir qu'avec les moyens qui précèdent, il est possible de suspendre à volonté ou de rétablir le mouvement, entre deux arbres placés bout à bout.

Enfin, si le manchon *C* et la roue *BB'* étaient montés sur le même arbre, et que cette dernière fût folle, on reconnaît combien il serait aisé de la faire participer au mouvement de l'arbre au moyen des deux tenons *A* et *A'*.

37. *Manœuvres des manchons d'embrayage.* — Faisons connaître quelques moyens de manœuvrer les manchons d'embrayage. Déjà nous avons parlé (3e partie, 33) du levier simple avec son mentonnet ou sa roulette; quand un levier simple ne suffit pas, on emploie un système de plusieurs leviers qui augmente le chemin de la puissance et diminue celui du manchon. Le moyen le plus parfait est le suivant pour faire désembrayer par les machines elles-mêmes; il a été inventé à la fonderie de Toulouse par M. le chef de bataillon Aubertin. Ce moyen consiste à creuser dans la gorge du manchon *C* (fig. 317) une hélice, pour y laisser tomber une espèce de levier *abd*, mobile autour de deux supports fixes *a* et *b*, et armé d'un fort bouton *e*, qui doit finir par se loger dans le creux de l'hélice. Dès lors le mouvement de rotation force le manchon à glisser le long de la partie carrée de l'arbre jusqu'à ce que le désembrayage de la roue *D* qui est folle, et de l'arbre *E*, s'ensuive.

38. *Embrayage des tambours à courroie ou poulies à corde.* — *A* (fig. 318) est une poulie folle, ou libre par tournoiement sur l'axe, et *B* une autre poulie fixe ou faisant corps avec l'arbre. Si

on fait passer la courroie *C* sur *A*, le mouvement de l'arbre *A* est suspendu, parce que cette poulie tourne indépendamment de l'arbre ; si, au contraire, on fait passer la courroie sur la poulie *B*, le mouvement est rendu à l'arbre. Pour manœuvrer la courroie, on l'embrasse par une fourche *ab* en fer qui reçoit son mouvement d'une tige ou d'un levier, et qui fait céder facilement la courroie. Cette manœuvre de la fourche simple ne conviendrait plus aux cordes qui ne tarderaient pas à être usées. On y remédie en armant la fourche de deux rouleaux *a* et *b* (fig. 319), qui embrassent la corde ; les axes de ces rouleaux se réunissent sur une même tige qui reçoit autour de *O* un mouvement de rotation au moyen du levier *OL*. Ce dernier mécanisme existe à l'usine des Pucelles, à Metz, où il sert d'embrayage au tour à moyeux de l'arsenal du génie ; le levier *OL* se trouve sous la main de l'ouvrier qui intercepte ou rétablit à volonté la transmission du travail, lequel est communiqué par le moteur général de toutes les machines.

Enfin, on désembraye aussi, en détendant les courroies verticales, au moyen du rouleau de tension. Dès que ce dernier abandonne une courroie *C* (fig. 320), celle-ci quitte la roue inférieure *A* qui sert de moteur, et cesse d'entraîner la roue *B*. Si les courroies n'étaient pas verticales, ce système ne vaudrait rien, parce qu'alors la courroie s'userait contre le rouleau de tension.

39. *Embrayage à axes mobiles.* — On peut encore embrayer ou désembrayer deux roues, en rendant mobile l'axe de l'une d'elles, ou en le rendant susceptible d'un mouvement de translation. Si ces roues se communiquent le mouvement par des courroies, cordes ou chaînes sans fin verticales, il suffit d'élever ou d'abaisser légèrement l'axe de la roue supérieure, ou plutôt le porte-coussinet *a* (fig. 321) de cet axe, au moyen du levier *boc*, mobile autour du point *o*, ou bien encore au moyen d'une corde verticale *ef*. Ce système sert dans les moulins à farine, pour mouvoir les tire-sacs. On emploie aussi à cet objet deux roues sans dents, qui, en se pressant par les couronnes, se conduisent réciproquement (fig. 322). Lorsqu'on diminue la pression ou qu'on écarte l'une des roues de l'autre, le mouvement cesse d'être communiqué.

On fait également usage de ce procédé, pour désengrener deux roues dentées. *AB* (fig. 323) est un pont ou porte-coussinet de la roue d'embrayage porté sur une cale *E*, fixée à l'extrémité d'un

levier *EF*, mobile autour d'un axe qui traverse carrément la cale. En abattant le levier et en lui donnant une position verticale, la cale soulève le pont *AB* qui pose carrément sur elle. Deux systèmes pareils sont adaptés aux deux ponts qui supportent les coussinets de la roue.

Quelquefois aussi on fait marcher l'arbre de la roue parallèlement à lui-même, en faisant glisser les coussinets entre des guides solides. Le mouvement se donne aux coussinets *L* (fig. 324) à l'aide de crémaillères *C*, manœuvrées par des crics. Les crémaillères portent à leurs extrémités des mâchoires *M*, qui embrassent l'arbre extérieurement aux coussinets : ce système est employé à l'usine des Pucelles, déjà citée, pour désengrener la lanterne de la scierie ; les roues des deux crics sont rendues solidaires entre elles. Enfin, une clef *O'*, qui, en passant au travers des brides *b* de chaque coussinet, se loge dans le jeu ménagé pour sa translation, est destinée à maintenir la roue dans son embrayage.

40. *Moyens de changer le sens de la rotation d'un arbre.* — Lorsqu'on veut changer à volonté le sens de la rotation d'un axe, il suffit d'un manchon *à glissement* sur cet axe, susceptible d'embrayer tour à tour par chaque extrémité avec deux roues folles montées sur cet arbre, et douées chacune d'un mouvement de rotation en sens contraire.

C et *D* (fig. 625) sont des roues fixes qui marchent en sens contraire, et qui engrènent dans les roues *A* et *B*, folles sur leur axe ; en sorte que chacune de ces dernières tourne dans des directions différentes et sans entraîner l'arbre sur lequel elles sont montées. *EF* est un manchon armé de deux griffes à ses extrémités, et glissant sur l'arbre des deux roues *A* et *B*. Si on le pousse contre la roue *A*, celle-ci fait tourner le manchon et l'arbre avec lui. Si c'est contre la roue *B*, l'arbre prend alors le mouvement de cette roue. Ce système est établi à Clichy, près Paris, et sert à faire mouvoir, sur un laminoir à plomb, de très-fortes lames, tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre. Ici le mouvement est très-lent et permet d'embrayer ou de désembrayer sans arrêter le moteur, parce que la vitesse est fort petite, ainsi que le moment d'inertie du laminoir.

Le manchon double sert encore à transmettre très-simplement le mouvement de rotation à un axe perpendiculaire à celui de la

roue motrice, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. *A* (fig. 326) est une roue motrice, qui fait tourner l'arbre *BC*, ainsi que la roue conique *D*, fixé invariablement à cet arbre. La roue *D* engrène d'ailleurs dans les deux roues *G* et *H*, qui sont folles sur l'arbre *LM*; mais le double manchon *EF* qui glisse sur ce dernier, en se rapprochant de l'une ou de l'autre roue *G* et *H* au moyen des griffes de ses extrémités, communique à l'arbre *LM* le mouvement propre à chacune d'elles.

41. *Moyens de changer la vitesse du mouvement.* — Pour changer la vitesse du mouvement instantanément, on emploie divers appareils dont nous indiquerons les quatre principaux. Le premier appareil consiste dans deux systèmes de poulies ou tambours alternes, énarbrés sur deux axes parallèles (fig. 327). Leur disposition est telle que si, par exemple, les diamètres supérieurs des rouleaux croissent de gauche à droite, les diamètres inférieurs croîtront de droite à gauche, et que les diamètres de deux rouleaux placés dans le même plan vertical formeront une somme constante. En un mot, les couronnes qui correspondront en face l'une de l'autre, se trouveront à même distance de dehors en dehors. Une courroie sans fin enveloppe deux couronnes correspondantes, et par des moyens qu'on peut voir sur place, elle passe rapidement d'une couple de couronnes à l'autre pendant le mouvement; ce qui modifiera la vitesse de l'arbre inférieur : cette vitesse sera plus rapide que celle de l'arbre supérieur, ou moindre, selon que le diamètre d'un rouleau en prise inférieurement sera plus petit ou plus grand que le diamètre du rouleau correspondant de l'arbre supérieur.

Les cônes alternes sont également montés sur des axes parallèles, et sont embrassés par une courroie sans fin (fig. 328); seulement leurs génératrices opposées extérieurement sont parallèles. On peut faire varier les vitesses d'une manière instantanée, en faisant marcher la courroie au moyen d'une griffe.

A (fig. 329) est une grande roue plane fixée à son arbre, et *B* une petite roue tournant avec son axe *CD*, lequel peut glisser dans ses coussinets. En éloignant plus ou moins la roue *B* du centre de *A*, la vitesse transmise à la première par simple contact est rendue plus forte ou plus faible à volonté.

Enfin, le dernier moyen que nous indiquerons consiste dans une roue *B'* (fig. 330), en contact avec un cône *A'*, dont la généra-

trice est parallèle à l'axe de la roue. Plus le cercle du cône avec lequel la roue *B'* se trouve en contact est grand, plus la vitesse de cette roue devient considérable.

42. *Moyens de changer le mouvement par intervalles.* —Nous avons donné les moyens de modifier d'une manière constante et permanente le mouvement des machines; en voici d'autres qui servent à le changer par intervalles.

1° *Roues à détente.*—Une roue à détente n'est autre chose qu'une roue folle *B* (fig. 331), montée sur un arbre qui reçoit un mouvement de rotation à l'aide d'une manivelle. A cet arbre est fixée la pièce *A*, susceptible de s'accrocher à la saillie *b* d'un levier *ab*, dit *détente*, et mobile autour d'un axe *m* qui fait corps avec le plateau de la roue. Enfin, un ressort *s* maintient l'extrémité *b* accrochée avec la pièce *A*. Si donc on imagine l'arbre en mouvement dans le sens *LM*, la pièce *A* le suit, et ne tarde pas à s'accrocher avec la saillie *b*; puis elle entraîne le levier *ab* avec la roue *B*, qui fait alors monter un poids ou un piston par le moyen d'une corde *D*, enroulée autour de sa gorge. Mais aussitôt que dans sa course la détente *ab* a rencontré une cheville extérieure ou arrêt *E*, cette détente tourne autour de son axe *m*, et est bientôt abandonnée par la pièce *A*, ainsi que la roue *B*. Celle-ci, sollicitée par le poids qu'elle a soulevé, prend un mouvement en sens contraire sur l'axe, qui continue le sien dans le sens de celui de la manivelle, et le poids redescend. On conçoit comment les choses recommencent par chaque tour de manivelle.

2° *Déclics.*—Un système analogue est employé dans les sonnettes à *déclic* pour faire échapper du haut de sa course le mouton destiné à battre les pieux. Seulement le mouvement est toujours rectiligne, au lieu d'être circulaire. *A* (fig. 332) est un mouton en fonte suspendu par son anneau *cd* au crochet *c* d'un levier *ef*. Ce levier tourne autour d'un boulon *g*, logé dans une chape creuse en fonte *LM*, et il est forcé de saisir l'anneau *cd*, par un ressort *s*, également fixé dans la chape *LM*. Une corde *ab*, enroulée à une poulie, soulève la chape *LM*, et par suite le mouton *A*, jusqu'à ce que le levier *ef* ait rencontré dans sa course verticale un arrêt *B*. Alors le levier *ef* tourne autour de son bouton *g*, le crochet *C* se désengrène de l'anneau *cd* du mouton, et ce dernier retombe seul en vertu de son propre poids. Si l'on abandonne ensuite la chape *LM*, il est

évident qu'en retombant sur le mouton, elle forcera, malgré l'action du ressort *s*, le crochet *c* du levier *ef* à s'engager de nouveau dans l'anneau *cd* du mouton. Ce mécanisme est à peu près celui que M. Aimé a exécuté dans la galerie des modèles de l'École d'application, si ce n'est que dans ce dernier, deux leviers semblables au levier *ef* de l'appareil précédent manœuvrent autour d'un même boulon, et sont pressés respectivement chacun par un ressort.

3° *Roue à rochet.* — *C* (fig. 333) est une roue folle sur un arbre ; *B* est une autre roue montée sur la partie carrée de ce dernier, et armée de dents crochues dans lesquelles s'engrène un déclic *dab*, fixé à la roue folle *C*, et poussé à son talon *d* par un ressort *ec*, fixé en *e*. Le jeu de ce déclic est tel que, si vous faites mouvoir de gauche à droite la roue à rochet *B*, ainsi que son arbre, leur système tournera indépendamment de la roue *C*, qui demeurera au repos, parce que les dents de *B* échapperont au déclic *dab*. Mais si, au contraire, la roue *B* reçoit un mouvement de droite à gauche, les dents de celle-ci seront arc-boutées dans le déclic *dab*, et la roue folle *C* sera forcée de suivre le mouvement de la roue à rochet et de son arbre.

La roue à rochet est employée dans les mouvements de pendule. Fixée sur un arbre carré, elle échappe à un déclic dans le sens où il faut la tourner avec une clef pour opérer le bandement du ressort moteur. Mais dès que ce dernier exerce son action, la roue à rochet tourne en sens contraire à celui dans lequel on a monté le pendule et entraîne avec elle la roue folle destinée à transmettre l'action motrice du ressort aux autres pièces.

Ce même moyen peut également servir à suspendre l'action des moteurs dans les grandes machines, sans arrêter le mouvement de ces machines. J'en citerai une application à un moulin de Metz mû par un manége. La meule de ce moulin, qui fait de quatre-vingt-dix à cent tours par minute, agit en même temps comme un volant, et elle ne saurait s'arrêter instantanément. Par conséquent, si le cheval attelé à la barre du manége avait besoin de prendre un repos momentané, de quelques minutes par exemple, la chose ne saurait avoir lieu, puisqu'en vertu de son inertie la meule tendrait à persévérer dans son mouvement, et continuerait à pousser la lanterne, qui s'engrène dans la roue concentrique au manége à la barre duquel le cheval est attelé. Voyons donc s'il serait possible

que cette réaction ne s'étendît pas au delà de la lanterne. Nous commencerons d'abord par rappeler que, pour faire mouvoir le manége d'un moulin, un cheval est attelé à l'extrémité de la barre *AB* (fig. 334), qui fait corps avec un arbre tournant *CD*. Une roue dentée *EF*, invariablement fixée à cet arbre vertical, fait tourner une lanterne *GH*, dont l'axe *M* imprime, par une certaine combinaison de pièces, le mouvement aux meules, de telle sorte que le mouvement de ces dernières peut être regardé comme solidaire avec celui de l'axe *M* de la lanterne. Cela posé, voici comment on doit concevoir la disposition cherchée. La lanterne est folle sur son arbre *M* (fig. 335); mais ses deux plateaux, dont un est représenté par *CD*, sont traversés par une pièce de bois *o*, susceptible de se soulever de bas en haut dans les deux mortaises qui la supportent sur les plateaux. L'arbre *M* porte une frette *pqr*, armée d'un mentonnet *m*, qui s'applique d'un côté selon un plan, contre la pièce de bois *o*, et qui du côté opposé se raccorde tangentiellement avec la surface extérieure de la frette. Enfin, la pièce *o* est pressée fortement contre le mentonnet *m* par un ressort *ab*, fixé à chaque plateau de la lanterne. Supposons maintenant que, par l'action du cheval, la roue du manége tourne de *E* vers *F*, il est évident qu'elle entraînera la lanterne de *C* vers *D*, et que la pièce *o* communiquera le mouvement de cette dernière au mentonnet *m* qui l'arc-boute, et par conséquent à la frette *pqr*, ou enfin à l'arbre *M*, auquel cette frette est fixée invariablement. Mais si le cheval, par une cause quelconque, vient à suspendre son mouvement momentanément, la roue *EF* suspend le sien, et la lanterne *CD* cesse de tourner. Toutefois, l'arbre *M*, entraîné par les meules, continue à se mouvoir, le mentonnet *m* s'éloigne de la pièce *o;* puis, après une révolution complète de l'arbre, il se présente à cette pièce *o* par le côté où il se raccorde tangentiellement avec la frette, et il la soulève peu à peu et sans choc dans ses mortaises. Celle-ci retombe dès que le mentonnet s'en est échappé. Le mentonnet s'éloigne encore dans le même sens que la première fois; de sorte que la pièce *o* se trouve soulevée une fois à chaque révolution, sans que la lanterne *CD*, la roue *EF*, le moteur, participent aux mouvements de l'arbre *M*, ou des meules par lesquelles celui-ci est forcé de se mouvoir encore au moment où le cheval s'est arrêté.

4° *Freins à talon ou à excentrique.*—Soit *a* (fig. 336) un boulon mobile forcé de s'appuyer par sa partie arrondie contre la cou-

ronne *ABC* d'une roue fixée invariablement avec l'arbre *D*. Il est évident que le mouvement est toujours possible de *A* vers *B*. Mais si un accident quelconque faisait revenir la roue sur elle-même, ou de *B* vers *A*, le boulon *a* tournera et s'arc-boutera sur la couronne, jusqu'à ce que le mouvement soit empêché.

Considérons encore une pièce verticale *AB* (fig. 337) portant un plateau *CD*, et glissant entre des guides *a* et *b* à frottement doux; il est possible de maintenir cette pièce à une hauteur déterminée au moyen de l'excentrique *g* à talon et à levier, qui l'empêchera de descendre. La vis de pression produit à la vérité le même effet, mais ici cet effet se produit plus rapidement.

Les *échappements* des montres et des horloges appartiennent aussi à la classe des modificateurs qui nous occupe; mais ils ont plus particulièrement pour objet de régulariser le mouvement.

V.

DES MODÉRATEURS ET RÉGULATEURS.

43. *Objet des modérateurs et des régulateurs.* — Le mouvement tend quelquefois à s'accélérer dans les machines, ainsi que cela peut arriver lorsque le moteur est un contre-poids abandonné à lui-même. La vitesse deviendrait alors tellement rapide, que des accidents graves ne manqueraient pas bientôt de survenir. Aussi, pour maintenir la vitesse dans des limites convenables, certaines pièces ont-elles pour objet soit d'augmenter les résistances quand les puissances deviennent prépondérantes, ou de modifier ces puissances elles-mêmes dès qu'une accélération ou un ralentissement dans le mouvement se manifeste. Ces pièces sont précisément ce que nous entendons par *modérateurs* ou *régulateurs*.

44. *Modérateurs.* — Nous nous occuperons d'abord des modérateurs ou des moyens d'augmenter les résistances pour s'opposer aux

accélérations de vitesse. Ces moyens sont : 1° le volant à ailettes ; 2° le frottement ordinaire ; 3° les freins.

1° *Volant à ailettes.*—Les tournebroches, les horloges qui reçoivent le mouvement par la descente d'un contre-poids, sont armés, comme on sait, d'un volant à ailettes, où d'un système de bras et de surfaces planes, dont l'axe vertical de rotation porte une vis sans fin avec des hélices que conduisent les dents d'une roue de la machine. Les ailettes, en se mouvant circulairement dans l'air (fig. 338), éprouvent de sa part une résistance qui croît à peu près comme le carré de la vitesse (1re partie, 60) que le contre-poids leur imprime. Si leur surface est calculée (*Méc. Ind.*, Cours de la 1re année, 213) de manière que leur résistance, estimée d'après la vitesse permanente à la machine, fasse équilibre à l'action du contre-poids, on voit que l'horloge ou le tournebroche se mouvra uniformément, et que la vitesse restera toujours dans la limite assignée. Cet exemple nous montre une vis sans fin conduite par une roue dentée, et cela paraîtrait contraire à ce qui a été dit au n° 27 ; si l'on ne faisait attention que, pour le tournebroche, les filets de la vis sont très-inclinés, et que le frottement est d'autant plus facilement vaincu que la pente de ces hélices est plus roide ; au lieu que dans les machines puissantes, les filets de la vis sont nécessairement fort peu inclinés.

2° *Frottement ordinaire.* — Lorsque des voitures passent d'une route horizontale à une route descendante très-inclinée, leur poids deviendrait capable de produire une accélération dangereuse dans leur mouvement, et il importe de leur opposer une plus grande résistance. Remarquez que la résistance ordinaire des voitures n'est occasionnée que par celle des roues contre le terrain, laquelle est alors un frottement de la deuxième espèce, ou un frottement de roulement. On la transformera en un frottement de première espèce ou de glissement, en empêchant les roues de tourner et en les laissant frotter contre le terrain. Mais, afin que leurs bandes ne s'usent pas trop vite, on a recours au sabot métallique *s* (fig. 339), lequel, concentrique à la roue, s'interpose entre elle et le terrain ; ce sabot est retenu par une chaîne fixée à l'avant de la voiture.

M. Molard, directeur du conservatoire des arts et métiers, a inventé un procédé plus simple. Il consiste dans un arc de cercle en bois ou en métal, placé derrière une des grandes roues (fig. 340), de manière à pouvoir l'approcher de cette roue au moyen d'une vis

de pression. Quand cette pression augmente, elle crée une résistance de frottement proportionnelle, et bientôt la roue perd à peu de chose près tout son mouvement. Il est évident qu'à l'aide d'un système de cette espèce, on ne peut pas dépasser l'effet de deux sabots. Ce procédé est généralement adopté dans toutes les diligences, et la manœuvre peut être faite par le conducteur du haut de l'impériale des voitures, à l'aide d'une combinaison de leviers.

3° *Le frein.* — Les freins ont pour objet d'arrêter subitement, ou du moins de modérer à volonté, la marche d'une machine. Un frein est un grand arc de cercle *ABC* (fig. 341) en bois, extérieurement garni d'une bande de fer. Une extrémité de cet arc est fixe, et l'autre boulonnée à l'extrémité du petit bras *oc* d'un levier coudé *boc*. Quand on fait force sur le grand bras *ob* de ce levier, le frein se rapproche d'une grande roue qui participe au mouvement général de la machine.

On peut encore se servir d'un levier *BOA* (fig. 342), dont le plus long bras est chargé d'un poids, et dont le plus court porte l'extrémité d'une courroie qui, après avoir enveloppé la couronne de la roue dont on veut arrêter ou modérer le mouvement, est attachée à un point fixe. La roue repose d'ailleurs sur des coussinets *à bride*, afin qu'elle ne puisse pas être soulevée par la courroie quand on la bande. Ici la résistance du frottement n'a point de limites ; non-seulement on peut augmenter le poids *P*, mais encore on peut enrouler à plusieurs reprises la courroie autour de la roue ; et l'on sait (2e partie, 112) que le frottement croît très-rapidement à mesure que l'arc enveloppé est plus grand. Ce moyen est celui qu'on emploie pour ralentir et même pour suspendre le mouvement de l'arbre des ailes du moulin à vent.

Quoique ces freins aient l'inconvénient d'absorber en pure perte une portion plus ou moins grande du travail de la puissance, leur utilité est cependant incontestable dans beaucoup de circonstances. Nous l'avons déjà reconnu d'après le service qu'ils rendent aux voitures. Il en est de même pour ces roues destinées à lever des pierres et que des hommes font marcher en agissant sur des chevilles. Si, par une cause quelconque, ces roues venaient à céder à l'action du poids énorme des pierres qu'on soulève, les accidents les plus graves résulteraient et pour les hommes qui font mouvoir la roue, et pour ceux qui travaillent au fond de la carrière. Aussi, sur l'arbre de ces roues, a-t-on le soin d'établir des freins dont la disposition est

indiquée sur la figure 343 ; où *L* représente l'arbre du treuil, *P* une pierre qu'on élève, *ABC* frein échancré en arc de cercle pour embrasser une partie du treuil, et mobile autour du boulon *A* ; *Q* poids suspendu à l'extrémité du frein pour forcer ce dernier à presser contre l'arbre du treuil.

45. *Régulateurs.* — Les freins, ou modérateurs, peuvent, il est vrai, servir à régulariser le mouvement. Toutefois, comme ils ajoutent des résistances partout où on les emploie, on est convenu d'appeler *régulateurs* tous les dispositifs exempts de ce dernier inconvénient. Ils dépendent d'ailleurs de la nature soit du moteur, soit de l'opérateur, ou des fonctions de la machine. Aussi, leur nombre est trop considérable pour que nous les examinions tous les uns après les autres. Nous nous bornerons donc à exposer les principaux.

46. *Tambours régulateurs, tambours à spirale.* — Dans les machines qui servent à élever des fardeaux ou à tirer de l'eau du fond d'un puits, il arrive souvent que le poids à soulever n'est pas constant, parce qu'il est augmenté de celui de la corde ou de la chaîne à laquelle il est suspendu. Si le puits est profond, on conçoit que ce dernier poids peut être considérable. Comme le moment de la puissance qui fait mouvoir la machine doit être constant, et cela afin que les hommes qui la manœuvrent éprouvent le moins de fatigue possible, il faut faire en sorte que le moment de la somme des poids, tant du fardeau que de la chaîne pendante qui se raccourcit continuellement, soit aussi constant. En conséquence, on trace tous les cercles concentriques répartis sur la longueur du treuil de manière à ce que cette condition soit satisfaite. Si nous appelons *P* (fig. 344) les efforts exercés sur les manivelles du treuil, *R* le rayon de ces manivelles ; $P \times R$ sera le moment de la puissance qui, comme nous venons de le dire, est constant. Désignons par *Q* le poids à soulever, par *l* la longueur de la chaîne pendante *ba* comprise depuis la hauteur de l'arbre du treuil jusqu'à une position particulière et quelconque du fardeau, et par *p* le poids du mètre courant de chaîne. Il est évident que $p \times l$ sera le poids de la partie pendante *ab* de la chaîne, et que $Q + p \,.\, l$ sera la charge totale à soulever à l'instant où le poids *Q* occupe la position que l'on considère. Si je nomme *r* le rayon de la section du treuil sur

laquelle la chaîne s'enroule à ce même instant, $(Q + p \,.\, l)r$ sera le moment de la résistance, et, en vertu de l'équilibre du treuil (2e partie, 127), on aura, abstraction faite du frottement, l'égalité

$$(Q + p \,.\, l)\, r = P \times R;$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{P \times R}{Q + p \,.\, l}.$$

Cette expression, dans laquelle l, ou l'abaissement du poids Q au-dessous du treuil, entre au dénominateur, nous apprend que le rayon du treuil doit être d'autant plus petit que le poids Q est à une plus grande profondeur, ou que la chaîne pendante est plus longue. Ainsi, ce rayon est le plus grand possible, quand le fardeau est parvenu à la hauteur de l'axe du treuil. Pour avoir le rayon du treuil r_0 dans cette dernière circonstance, on fera ab ou l égal à zéro; ce qui donne

$$r_0 = \frac{P \times R}{Q}.$$

Appelons r_1 le rayon de la circonférence du treuil autour de laquelle la chaîne pendante s'enroule; quand celle-ci s'est déroulée d'un premier tour ou quand sa longueur est devenue $2\pi \,.\, r_0$, on trouve

$$r_1 = \frac{P \times R}{Q + p \,.\, 2\pi \,.\, r_0}$$

(π est le rapport 3,1416, de la circonférence au diamètre). Si la chaîne se déroule d'un nouveau tour ou de $2\pi \,.\, r_1$, la longueur de chaîne pendante deviendra

$$2\pi \,.\, r_0 + 2\pi \,.\, r_1 = 2\pi\,(r_0 + r_1),$$

et si je nomme r_2 le rayon du nouveau cercle autour duquel cette chaîne pendante est enroulée sur le treuil, on verra facilement pourquoi

$$r_2 = \frac{P \times R}{Q + p \,.\, 2\pi\,(r_0 + r_1)}.$$

On aurait de même, pour le rayon suivant,

$$r_1 = \frac{P \times R}{Q + p \cdot 2\pi (r_0 + r_1 + r_2)}.$$

La loi devient ainsi facile à saisir. On voit, d'après ce qui précède, que l'enroulement de la chaîne, au moment où le poids commence à être soulevé, doit commencer sur la partie la plus étroite du treuil. Si nous appelons H la profondeur du puits, le rayon r_0 de cette partie, la plus étroite du treuil, sera évidemment égal à . . . . . $\frac{P \times R}{Q + p \cdot 2\pi \cdot H}$. Quelquefois il arrive, afin d'éviter la perte du temps, qu'on fait enrouler le treuil par deux chaînes égales, mais en deux sens différents, de telle manière que, quand celle qui soulève un seau rempli d'eau ou du minerai qu'on veut extraire s'enroule, l'autre, qui conduit un seau vide, se déroule (fig. 345). Mais il n'y a pas lieu de tenir compte du poids des seaux, parce qu'ils sont égaux et se font constamment équilibre. Quant aux longueurs des deux chaînes pendantes, leur somme est constamment égale à la profondeur H du puits. Si donc je nomme l la longueur de chaîne ascendante dont le moment du poids s'ajoute au moment de la résistance, et l' la longueur de la chaîne descendante dont le moment du poids s'ajoute au moment de la puissance, on aura l'égalité

$$\overline{P \times R} + \overline{p \times l' \times r} = \overline{Q \times r} + \overline{p \times l \times r}.$$

Puisque la somme $l + l'$ des longueurs simultanées des deux chaînes pendantes est égale à H, on voit que

$$l' = H - l.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, on trouve

$$\overline{P \times R} + p(H - l)r,$$

ou $\overline{P \times R} + p \cdot H \cdot r - p \cdot l \cdot r = Q \cdot r + p \cdot l \cdot r.$

Réunissant dans un même membre de l'égalité tous les termes multiples de r, on trouve

$$(Q - p \cdot H + 2p \cdot l)\, r = P \times R;$$

d'où

$$r = \frac{P \times R}{Q - p \cdot H + 2p \cdot l}.$$

Dans cette expression générale, r est le rayon des deux cercles auxquels s'enroulent simultanément les chaines pendantes ascendante et descendante quand leurs longueurs sont l'une l et l'autre $H - l$. Ce rayon diminuant à mesure que la quantité l, c'est-à-dire la longueur de la chaîne qui soulève un seau plein, est plus grande, on voit que le treuil doit se composer de deux parties égales qui se renflent au milieu de sa longueur totale, et qui servent chacune au déroulement de la chaîne à vide, et à l'enroulement de la chaîne chargée d'un fardeau. Pour avoir le plus grand rayon, on fera $l = 0$ dans la valeur de r, et on trouvera

$$r_0 = \frac{P \times R}{Q - pH}.$$

Si nous voulons obtenir tous les autres, à partir de r_0, et sur chaque partie symétrique de la longueur du treuil, on trouvera, comme précédemment,

$$r_1 = \frac{P \times R}{Q - p \,.\, H + 2p \,.\, 2\pi \,.\, r_0},$$

$$r_2 = \frac{P \times R}{Q - p \,.\, H + 2p \,.\, 2\pi \,(r_0 + r_1)},$$

$$r_3 = \frac{P \times R}{Q - p \,.\, H + 2p \,.\, 2\pi \,(r_0 + r_1 + r_2)}.$$

La fig. 345 indique d'ailleurs suffisamment la disposition à donner au treuil dans le cas actuel. Il est facile de reconnaître que le point d'attache des deux chaînes doit être sur le plus petit cercle de la partie du treuil où une chaîne s'enroule et sur le plus grand cercle dont l'autre se déroule. De cette manière, en effet, l'une et l'autre des chaînes agiront sur les plus grands rayons égaux des deux parties symétriques du treuil au moment où le seau chargé sera arrivé au haut du puits et le seau vide au fond. Mais, comme les bras du levier de ce dernier, quand il remontera, doivent aller en croissant, ainsi que ceux du nouveau seau vide, il sera nécessaire à chaque course de changer les points d'attache respectifs, des chaînes, pour qu'ils se trouvent sur la partie renflée du côté où la chaîne descendra, et sur le cercle le plus étroit du côté où la chaîne sera ascendante. Voilà pourquoi chaque moitié du treuil AB et BA'

sera munie de deux rochets de suspension, l'une à ses deux extrémités *a*, *b*, et l'autre à ses extrémités *a'* et *b'*.

On régularise plus simplement le travail de la résistance sur le treuil, au moyen d'une chaîne sans fin, enroulée plusieurs fois autour d'un cylindre (fig. 346) : car alors les deux portions de chaîne ascendante et descendante sont égales et se font équilibre, ainsi que le poids des deux seaux, et le rayon du treuil demeure constamment égal au moment de la puissance divisé par le poids absolu du fardeau. Ce système a cependant l'inconvénient d'exiger des chaînes trop longues et d'augmenter ainsi les dépenses, surtout quand on doit l'employer pour des mines très-profondes.

Les fusées de montre ont une disposition analogue aux tambours précédents. Un ressort en spirale est fixé d'une part à l'arbre *L* (fig. 347) et de l'autre à la surface intérieure d'un barillet *A*, qui peut tourner indépendamment de cet arbre. Une chaîne, attachée à la surface extérieure du même barillet, s'enroule autour d'une fusée *C*, qui tourne avec l'arbre *M*, et qui est montée sur une roue motrice *D*, laquelle fait corps avec une roue à rochet. La fusée *C* a la forme d'un cône à spirale ; c'est en la faisant tourner qu'on y enroule la chaîne *H* ; celle-ci communique ce mouvement au barillet, et force le ressort à se bander autour de l'arbre *L*. Ce ressort, ensuite, en vertu de son débandement, fait tourner le barillet *B* dans le sens de la flèche indiquée sur la fig. 347, et transmet son action, par l'intermédiaire de la chaîne *H*, à la fusée dont les rayons inégaux sont les bras de levier de cette action ; mais, comme cette action devient d'autant plus petite que le débandement est plus grand, ces bras de levier croissent à mesure que cette action diminue, et ils sont tels que si on nomme *F* l'action variable du ressort et *r* un bras de levier quelconque, le moment de cette action ou le produit $F \times r$ est toujours une quantité constante. Or, *F* varie suivant une loi que les horlogers trouvent pour chaque espèce de ressort en mesurant les poids capables de résister au débandement qui a lieu pour chaque longueur de chaîne enroulée autour du barillet. D'où l'on voit que l'on aura facilement les bras de levier, un premier bras étant pris pour origine. Tous ces moyens sont bons lorsqu'on connaît la loi de la variation de l'effort, et quand cette loi est continue et régulière pendant plusieurs révolutions.

Nous passerons sous silence les régulateurs des autres moteurs

et opérateurs, régulateurs qui ont pour but d'augmenter ou de diminuer l'action de la puissance ou de la résistance par des dispositifs qui varient avec chaque machine, et nous nous occuperons du régulateur à force centrifuge, qui, à dire vrai, peut être regardé comme le régulateur universel.

47. *Régulateur à force centrifuge.* — Supposez une roue horizontale *AB* (fig. 348) mise en mouvement par la machine et faisant corps avec son arbre *CC*. *DI* est une verge terminée par une boule de fonte pesante *P*, et qui tourne autour d'une articulation *D*. Cette tige est liée invariablement avec un levier *DE*, qui s'engage dans le manchon *E*, mobile par glissement sur l'arbre *CC*. Lorsque la roue *AB* tourne, la force centrifuge écarte d'autant plus la boule *P* de sa verticale, que la vitesse de rotation est plus grande ; de plus, cette même force fait tourner le levier *DE*, qui pousse le manchon *E*. Celui-ci pousse un autre levier, *GF*, mobile autour de l'axe *G* ; de là résulte un mouvement qui sert à fermer soit une vanne, soit une soupape, ou à bander un frein, afin de diminuer l'action du moteur lorsque la vitesse dépasse les limites dont on a besoin. Si, au contraire, la machine se ralentit, la boule *P* se rapproche de la verticale, le manchon *E* s'élève un peu, ainsi que le levier *FG* qui suit le mouvement du manchon ; la vanne ou la soupape s'ouvre un peu plus, ou le frein se débande, et la puissance augmente. Telle est l'idée qu'on peut se faire du rôle que joue le régulateur *PDE* à force centrifuge.

Ordinairement le régulateur à force centrifuge se compose d'un losange à charnières *ABCD* (fig. 349), monté sur un arbre vertical *CH*, mis en communication de mouvement avec une pièce de rotation de la machine ; le losange est fixé à cet axe par l'un de ses angles *C*, et en reçoit le mouvement ; les verges supérieures *CB* et *CD* portent, sur leurs prolongements, des boules égales de métal *P*, *P'* ; l'angle inférieur *A* porte un manchon ou anneau qui embrasse l'axe *CH* et qui peut glisser le long de cet axe. L'effet de la force centrifuge sur les boules est encore de soulever plus ou moins le manchon, qui, par la communication d'un levier *FG*, sert à régler la dépense du moteur en faisant varier l'ouverture d'une vanne, d'un robinet, etc.

L'établissement d'un régulateur à force centrifuge dépend de deux conditions essentielles : l'une que le manchon *A* occupe une

position déterminée pendant que la machine décrit un nombre voulu de révolutions dans un certain temps; l'autre que quand la vitesse de la machine a acquis un excès fixé à l'avance sur celle que lui assigne la nature du travail, la force centrifuge des boules soit capable de régler l'ouverture de la vanne ou du robinet destiné à modérer l'action du moteur.

premières conditions. — Pour plus de simplicité, nous réduirons les diverses parties du losange à des lignes. Si, quand la machine possède la vitesse convenable, le manchon doit occuper une position fixe *A* (fig. 250) sur l'axe vertical, il résulte que ce manchon ne saurait éprouver aucune action de la part des pièces qui le lient aux vannes ou aux robinets, et qu'ainsi, dans la circonstance où cette première condition est satisfaite, le pendule régulateur n'est sollicité que par le poids des boules et par leur force centrifuge, correspondant à la vitesse assignée pour l'axe vertical du régulateur. Il y aura donc équilibre entre le poids des boules et leurs forces centrifuges : ce qui exige que la résultante du poids *P* de chaque boule dont l'action est verticale et parallèle à l'axe *CA*, et de sa force centrifuge dont l'action a lieu selon l'horizontale *KI* du centre de la boule; que cette résultante, dis-je, soit dirigée dans la direction de la tige *CI*, ou passe par le point fixe *C*. Donc, si *CI* représente la grandeur de cette résultante, les côtés *CK* et *KI* du triangle *CKI* seront proportionnels, le premier au poids *P* d'une boule, et le deuxième à sa force centrifuge, que je nommerai *F*; d'où l'on tire

$$\frac{F}{P} = \frac{KI}{CK}.$$

On sait d'ailleurs (2e partie, 68) que la force centrifuge d'un corps, de petites dimensions comparativement à sa distance au centre autour duquel il tourne (et c'est le cas de chaque boule *P* par rapport à la distance *IK* qui la sépare de l'axe vertical du régulateur), est égale à la force vive imprimée à ce corps, divisée par le rayon du cercle que décrit son centre de gravité. Or, en appelant v_1 la vitesse angulaire du poids *P* autour de l'axe lorsque la machine possède la vitesse convenable, et en observant que la vitesse de son centre de gravité est alors $v_1 \times KI$, la force vive de ce poids *P* est égale à $\frac{P}{g} \times v_1^2 \times \overline{KI}^2$ (2e partie, 60). Divisant cette

force vive par le rayon KI, le quotient $\frac{P}{g} \times v_1^2 \times KI$ représentera la force centrifuge F de la boule P. Si nous substituons à F cette dernière valeur dans l'égalité $\frac{F}{P} = \frac{KI}{CK}$, on trouvera, après avoir supprimé le facteur commun P aux deux termes de la fraction du premier membre, et le facteur KI commun aux deux termes de l'égalité, cette autre

$$\frac{v_1^2}{g} = \frac{I}{CK},$$

et, par suite,

$$CK = \frac{g}{v_1^2}.$$

On sait que la vitesse angulaire v_1^2, ou le chemin parcouru autour de l'axe à l'unité de distance pendant une seconde, équivaut au produit de 2π (π étant le rapport 3,1416 de la circonférence au diamètre) multiplié par le nombre n de révolutions que le régulateur doit parcourir en une minute, lorsque la machine marche convenablement, et divisé par 60, c'est-à-dire que

$$v_1 = \frac{2n \cdot \pi}{60} = \frac{n \cdot \pi}{30}.$$

Ainsi, dans la valeur de CK, v_1 est connu, aussi bien que la gravité $g = 9^m,81$. Donc, on aura déterminé CK, c'est-à-dire l'abaissement des boules au-dessous du sommet supérieur C du losange. Or, ce losange ayant reçu des côtés d'une grandeur jugée convenable, et le sommet inférieur A, c'est-à-dire le manchon, devant avoir une position fixée d'après la constitution du moteur, et d'après ce dont la vanne ou le robinet seront ouverts pour vaincre toutes les résistances nuisibles et utiles de la machine mue avec la vitesse qui correspond à v_1, on voit ainsi que l'ouverture des verges se trouve entièrement déterminée, et, par conséquent, aussi la position de chaque boule sur les prolongements de ces verges. Car si leur ouverture est l'angle BCA, la perpendiculaire à l'axe menée par le point K, rencontrera les verges aux points I et I', qui seront les centres des boules. On peut encore assigner une règle plus simple pour la détermination de CK. Nommons t la durée d'une révolution du régulateur à l'état du régime qu'on veut maintenir dans la

machine, il est évident que 2π est le chemin parcouru pendant ce temps à l'unité de distance de l'axe, que $\frac{2\pi}{t}$ est le chemin parcouru à cette même distance, mais pendant l'unité de temps, et qu'enfin

$$v_1 = \frac{2\pi}{t}.$$

Faisant cette substitution dans l'égalité précédente $CK = \frac{g}{v_1^2}$, nous aurons

$$CK = \frac{g}{\frac{4\pi^2}{t^2}} = \frac{gt^2}{4\pi^2};$$

d'où on tire $$t^2 = 4\pi^2 \times \frac{CK}{g};$$

et, par suite, $$t = 2\pi \sqrt{\frac{CK}{g}}.$$

Maintenant, si on se reporte à ce qui a été donné sur la durée des oscillations du pendule simple (2e partie, 76), on trouve que cette durée, pour un pendule d'une longueur égale à CK, équivaut à $\pi \sqrt{\frac{CK}{g}}$; ce qui nous apprend que la durée d'une révolution du régulateur est double de celle de l'oscillation du pendule qui aurait pour longueur la distance verticale des boules du régulateur au sommet supérieur de son losange. Si donc on veut trouver cette même distance, il suffira de suspendre une balle de plomb à un fil, et d'allonger ce fil au-dessous de son point de suspension jusqu'à ce que la durée de ses oscillations soit moitié de la durée d'une révolution complète du régulateur ; la longueur du fil qui remplira cette condition sera précisément la distance verticale cherchée.

SECONDE CONDITION. — Ce qui précède indique seulement que tant que la machine marche avec la vitesse qu'on s'est donnée, les boules demeureront par rapport au sommet supérieur du losange, à la distance verticale trouvée plus haut ; qu'elles ne s'écarteront ni ne se rapprocheront, et qu'en un mot, le manchon qui conduit les leviers

de manœuvre des vannes, robinets, etc., demeurera dans la même position. Mais si la vitesse venait à se ralentir, ce serait une preuve que les résistances auraient de la prépondérance sur la puissance, et que, cette dernière devant être augmentée, le régulateur aura besoin de faire ouvrir les vannes ou les robinets, pour rétablir la vitesse moyenne qu'on désire maintenir. De même, si la vitesse augmente, il faudrait, au contraire, diminuer l'action du moteur, c'est-à-dire fermer plus ou moins les vannes, et il est évident que le manchon ne saurait opérer ces divers effets, sans éprouver une certaine résistance que je nommerai p. C'est de cette résistance déterminée à l'avance, et qu'il est facile d'évaluer au moyen de poids capables de faire mouvoir les vannes ou soupapes régulatrices; c'est de cette résistance, dis-je, que nous allons conclure le poids P à donner aux boules.

Supposons, par exemple, qu'une petite accélération de vitesse ait été produite; les boules, en s'écartant, soulèveront le manchon, en sorte que la résistance p de ce dernier agira de haut en bas, ou dans le même sens que le poids des boules. Cette action ayant lieu précisément sur l'axe vertical CA (fig. 351), imaginons qu'elle soit représentée par la grandeur Aa. Elle se décomposera en deux autres composantes égales, Ab et Ad, qui, dirigées sur les côtés inférieurs du losange $ABCD$, pourront, à cause de la rigidité des verges, être regardées comme appliquées en B et en D selon les directions $Bb' = AB$, et $Dd' = Ad$. Décomposons de nouveau la force Dd' en deux autres : l'une, hD, concourant au point fixe C; et l'autre, Df, verticale. La première de ces deux composantes sera d'un effet nul, puisqu'elle passe par le point fixe C. Quant à la deuxième, Df, elle redeviendra égale à Aa, ou à p, par suite de l'égalité des triangles Adh et $d'Df$, qui ont chacun un côté égal compris entre deux angles égaux. On démontrerait, par une décomposition analogue en B, que la force p s'y produira. Ainsi, cette résistance se répétera aux articulations B et D, tout en y conservant sa valeur primitive. Je fais observer que la force verticale Df ou p peut se décomposer en deux autres forces parallèles, appliquées, l'une au sommet invariable C, et l'autre au centre I de la boule P, attendu que les trois points C, D et I sont situés sur une même verge rigide CI. La première est évidemment d'un effet nul pour le mouvement; il ne reste que la deuxième, dont la valeur (2e partie, 20 et 21), d'après la composition des forces paral-

lèles, équivaut à $Df \times \frac{CD}{CI}$ ou à $p \times \frac{CD}{CI}$, et qui s'ajoute au poids P de la boule. La même chose aurait lieu à l'égard de la boule P'.

Dès lors nous retombons dans un cas semblable à celui du paragraphe précédent, c'est-à-dire que chaque boule est sollicitée par sa force centrifuge F et par une force verticale $P + p\frac{CD}{CI}$, au lieu de la force verticale P. Ainsi, au lieu de la relation d'équilibre précédent, $\frac{F}{P} = \frac{KI}{CK}$, nous aurons ici cette autre

$$\frac{F}{P + p\frac{CD}{CI}} = \frac{KI}{CK}.$$

Remplaçons la force centrifuge F par sa valeur correspondante à la vitesse angulaire v_1 de régime, et que nous avons trouvée dans le paragraphe précédent égale à $\frac{P}{g} \times v_1^2 \times KI$; notre égalité deviendra

$$\frac{\frac{P}{g} \times v_1^2 \times KI}{P + p\frac{CD}{CI}} = \frac{KI}{CK};$$

ou, en supprimant le facteur KI, et en multipliant les deux termes de l'égalité par $CK \times \left(P + p\frac{CD}{CI}\right)$, nous aurons, en définitive,

$$\frac{P}{g} \times v_1^2 \times CK = P + p\frac{CD}{CI}.$$

Dans cette relation, CK est connu d'après la première condition, p ou la résistance du manchon est également donnée, et il en est de même de CD et de CI. Donc, cette relation donnerait le poids P de chaque boule métallique. Mais il est impossible que le régulateur cède instantanément; car il y a nécessairement un intervalle pendant lequel la vitesse augmente ayant que les tiges ne bougent,

Donnons-nous cette limite de vitesse, et supposons que son excès sur la vitesse moyenne v_1 soit de $\frac{1}{10}$ de cette dernière, en sorte que la vitesse sera $v_1\left(1+\frac{1}{10}\right)$, ou $\frac{11}{10}v_1$, au moment où la vanne s'ouvrira. Si, avant l'instant où cette vitesse est acquise, le mouvement n'a pas lieu, il est visible que la relation . . . . . $\frac{P}{g}\times v_1^2\times CK = P + p\,\frac{CD}{CI}$ ne sera satisfaite qu'autant que v_1 y sera remplacée par $\frac{11}{10}v_1$, puisque, d'après notre hypothèse, c'est seulement pour cette dernière vitesse que la résistance p du manchon se manifeste. Nous aurons, par conséquent, après avoir divisé par P,

$$\frac{CK\times v_1^2\left(\frac{11}{10}\right)^2}{g} = 1+\frac{p}{P}\times\frac{CD}{CI},$$

et, par suite, $\frac{p}{P} = \frac{CI}{CD}\times\left(\frac{CK\times v_1^2\times\left(\frac{11}{10}\right)^2 - g}{g}\right)$.

Or, d'après la première condition, CK est réglé de telle sorte que

$$CK = \frac{g}{v_1^2}, \quad \text{ou que} \quad \frac{CK\times v_1^2}{g} = 1.$$

Notre nouvelle relation se réduit donc à

$$\frac{p}{P} = \frac{CI}{CD}\times\left\{\left(\frac{11}{10}\right)^2 - 1\right\}$$

$$= \left(\frac{121}{100}-1\right)\times\frac{CI}{CD} = \frac{21}{100}\times\frac{CI}{CD}.$$

Dans les machines à vapeur où la résistance du manchon, ou p, est très-petite, on ne vise pas à donner à P, ou au poids de chaque boule, une valeur très-faible. On fait CI (fig. 352) de moitié en sus plus long que le côté CD, c'est-à-dire que $\frac{CI}{CD} = \frac{3}{2}$. On aura donc

$$\frac{p}{P} = \frac{3}{2}\times\frac{21}{100} = \frac{63}{200};$$

et, par suite, $\frac{200}{63} \cdot p = 3{,}17 \cdot p.$

Si, par exemple, la résistance p du manchon est de 3 kilogr., on aura, pour le poids de la boule,

$$P = 3{,}17 \times 3^k = 9^k{,}51.$$

Si nous revenons à la relation $\frac{p}{P} = \frac{21}{100} \times \frac{CI}{CD}$, on voit que, plus le rapport de $\frac{p}{P}$ est grand, plus est grand aussi le rapport de CI à CD. Voilà pourquoi, quand la résistance p devient un peu considérable, on change le système pour le disposer de telle sorte que le manchon se trouve au sommet supérieur du losange, et le point fixe C du régulateur au sommet inférieur. Mais, afin que les verges ne puissent fléchir, CI ne dépasse guère trois à quatre fois CD.

S'il s'agit d'une vanne qui, pour être levée, exigerait l'effort d'un homme, on conçoit que la force centrifuge deviendrait insuffisante. Cette force est alors employée uniquement à soulever le manchon A, et, par suite, à faire mouvoir, par l'intermédiaire du levier AL (fig. 353), un manchon L armé d'une double griffe et mobile par glissement sur un arbre EF. Il faut, en outre, concevoir que l'arbre EF est mis en mouvement par la machine elle-même, et que la translation du manchon L a pour objet d'embrayer avec lui l'une ou l'autre des deux roues coniques N et N' folles sur l'axe FE, et qui s'engrènent sur une troisième roue P, dont l'arbre QR, auquel elle est fixée, est susceptible de soulever ou de fermer la vanne au delà du point assigné pour le travail ordinaire, selon que cet arbre tourne dans un sens ou dans l'autre.

Lorsque la vitesse de régime de la machine a lieu, le manchon L prend une position moyenne pour laquelle il n'embraye dans aucune des deux roues N et N' ; l'arbre EF tourne sans entraîner ces dernières, et il n'y a aucun mouvement de rotation sur la roue P, ni aucun changement dans l'ouverture de la vanne. Mais si la vitesse s'accélère, le manchon embraye l'une des roues N qui se meut avec l'arbre EF; la roue d'angle P fait fermer la vanne, mais en vertu du travail de cet arbre EF, et non en vertu de celui de la force centrifuge des boules. Dans le cas d'un ralentissement, le manchon L embraye dans la roue N', et son engrènement avec la roue P fait

tourner celle-ci, et par conséquent l'arbre QR, dans une direction contraire à celle qui provenait de l'engrènement de la roue N; ainsi, la vanne s'ouvrira, dans ce deuxième cas, au lieu de se fermer. Ce système, quoique très-ingénieux, ne remplit cependant pas tout à fait le but, à moins que, par suite de la diminution apportée à la résistance, ou de l'augmentation apportée à la puissance, la vitesse ainsi accélérée ne doive durer pendant un espace de temps très-long. Sous ce rapport le régulateur serait très-propre à régler le travail du moteur. Mais l'accélération provient le plus souvent d'une cause qui ne peut durer longtemps, et le régulateur ne peut opérer, ni fermer la vanne, etc., qu'après que la vitesse s'est accélérée de $\frac{1}{10}$ ou de $\frac{1}{20}$. Il se passe donc un certain temps entre l'instant où la cause de l'accélération a commencé et l'instant où le régulateur doit la faire cesser. Par conséquent, l'inconvénient du régulateur à force centrifuge est qu'il ne peut augmenter ou diminuer l'action du moteur instantanément, c'est-à-dire au moment même où une cause vient à déranger le régime de la vitesse le plus avantageux à la machine.

48. *Régulateur à ressort en spirale.* — Parmi les moyens qu'on pourrait employer pour régulariser instantanément l'action des machines, en voici un que nous proposons et qui nous semble assez convenable. Concevez que l'arbre moteur AB (fig. 354), qui transmet le mouvement à des mécanismes tels que ceux d'une filature, etc., soit interrompu en C et C'; que le mouvement d'une partie de l'arbre à l'autre soit communiqué à l'aide de deux manivelles, dont les boutons E et F sont réunis par une bielle EF, articulée et perpendiculaire au bras CE, énarbré sur la partie AC de l'arbre adjacente aux résistances. Remplacez maintenant ce même bras CE par un tambour cylindrique renfermant un ressort en spirale lié d'une part à l'axe AC et de l'autre à la surface du tambour comme dans le barillet des montres (fig. 355); enfin, supposez que le tambour puisse tourner librement autour de son arbre arrondi à cet effet. Il est évident que le bouton E, attaché à la base du cylindre du côté de la puissance, sera tiré par la bielle EF, avec un effort égal à celui qui est nécessaire pour vaincre les résistances de l'arbre AC; par suite, le ressort spiral sera bandé; le barillet tournera plus ou moins autour de son arbre; et l'angle qu'il aura

décrit mesurera l'effort exercé en *E*, parce qu'en ce point la bielle *EF* se trouve perpendiculaire au rayon *EC*. Imaginez à côté du tambour une aiguille *ab* fixée à l'arbre ; elle pourra servir à mesurer la tension du ressort à chaque instant, ou l'effort de la résistance : de là résulte un nouveau dynamomètre qu'on rendra sensible à volonté.

Maintenant, rien n'est plus facile que de communiquer le mouvement du tambour autour de son arbre, à un manchon *fg* (fig. 356), monté sur *CA*, et dont la surface intérieure est creusée en écrou, tandis que la surface de *CA* est taillée en vis. *IK* représente une tige saillante fixée au tambour et qui pénètre dans l'œil d'une tige saillante *fo*, fixée au manchon. Ainsi, dès que la résistance de la machine augmentera ou diminuera, le manchon *fg* avancera ou reculera par suite du mouvement relatif du tambour sur son arbre, et il poussera le levier *gl* destiné à ouvrir ou à fermer une vanne plus ou moins. Connaissant le rapport de la puissance motrice à la résistance ou effet utile qu'on veut produire sur l'opérateur, on pourra régler le mouvement du manchon ou de la vanne de façon qu'il y ait à chaque instant équilibre, malgré les changements des résistances de l'opérateur, et cela presque instantanément. Ce système, qui est en même temps un dynamomètre, nous paraît devoir être utilement appliqué aux machines. Le ressort spiral recevra d'ailleurs une force proportionnelle aux efforts qui doivent être exercés, et sa construction n'offrira aucune difficulté.

VI.

DES MANIVELLES SIMPLES.

49. *Manière dont varie le travail élémentaire des manivelles simples, dans un premier demi-tour.* — Toutes les fois qu'il s'agit de transformer un mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif, ou même en circulaire alternatif, nous avons vu (3e partie, 28 et 29), que ce qu'il y a de plus avantageux c'est d'employer la manivelle quand les machines sont puissantes, ou l'excentrique (3e partie, 28)

quand les efforts ne sont que médiocres. Mais, comme le travail élémentaire produit sur une manivelle varie à chaque instant, sous un effort même constant, il est utile d'étudier la loi de cette variation, parce qu'elle nous conduira au principe de l'établissement des volants. Une manivelle est formée, comme on sait, d'un coude ou bras AB (fig. 357), fixé à un arbre tournant AE, et à l'extrémité duquel agit une puissance douée d'un mouvement alternatif, par l'intermédiaire d'une bielle BF. Ordinairement on s'arrange de façon que la direction de la bielle varie très-peu ou ne fasse que des angles fort petits avec la verticale qui passe par le centre de l'arbre; et cela pour qu'après la décomposition de l'effort de la bielle en deux autres, l'un parallèle et l'autre perpendiculaire à cette verticale, ce dernier soit fort petit et ne produise que peu de frottement. Cette condition est suffisamment remplie quand la longueur de la bielle est quatre ou cinq fois celle du bras AB. Ainsi, nous admettrons que la direction de la bielle et de la force qui la sollicite soit invariable, verticale par exemple, et que cette force soit constante, hypothèse qui facilitera beaucoup la considération du travail. Cela posé, cherchons le travail élémentaire produit par la force F, pendant que le bouton B, c'est-à-dire son point d'application, décrit le très-petit arc de cercle BB'. Il est évident, d'après le quatrième principe du n° 1, que ce travail se mesure par le produit de l'effort multiplié par le petit chemin parcouru, mais estimé sur la direction de cet effort. Si par le point B' (fig. 358) on mène l'horizontale $B'B''$, laquelle est perpendiculaire à la direction BF de la force, BB'' sera ce chemin estimé, et, par suite, le produit $F \times BB''$ donnera la mesure du travail élémentaire de la bielle. Mais, en observant que BB'' est égal à bb', c'est-à-dire à la projection de l'arc BB' sur le diamètre EG, ce même travail sera exprimé par $F \times bb'$. Si, maintenant, on cherche toutes les quantités de travail élémentaire produites pendant un intervalle fini, qui sera compris, par exemple, entre les points E et B, et qu'on en fasse la somme, celle-ci donnera le travail dépensé sur la bielle pendant ce même intervalle. Mais remarquons que, dans cette somme, l'effort F constant se trouve multiplié par la somme des projections, telles que bb', sur le diamètre EG de tous les petits arcs élémentaires BB'; c'est-à-dire par la projection Eb de l'arc total Eb parcouru par le bouton. En général, le travail de la bielle, pour un arc parcouru quelconque, a pour valeur le produit de la projec-

tion de cet arc sur le diamètre vertical, et de l'effort de la bielle. D'où l'on voit que si cet effort a agi sur le demi-tour total ECG, le travail pendant cet intervalle équivaut à l'effort F multiplié par le diamètre EG, ou à $2F \cdot r$, r désignant la longueur AB du bras de la manivelle. Voyons maintenant comment varie le travail élémentaire à chaque instant pour de très-petits arcs égaux à BB', travail que nous avons exprimé tout à l'heure par le produit $F \times BB''$. A cet effet nous remarquons que, si du point d'application B, on abaisse la perpendiculaire BD au rayon horizontal AC, on aura formé un triangle ABD, semblable au petit triangle $BB'B''$; d'où résulte la proportion

$$BB'' : BB' :: AD : AB,$$

qui donne

$$BB'' = \frac{BB'}{AB} \times AD.$$

Appelant s le petit arc élémentaire BB', et nous rappelant que r représente le rayon ou le bras AB de la manivelle, on trouvera

$$BB'' = \frac{s}{r} \times AD.$$

Le travail instantané devient, par conséquent, $F \times \frac{s}{r} \times AD$. Si nous imaginons la demi-circonférence GCE partagée en une suite de petits arcs égaux à s, et que, des points de division, on mène des perpendiculaires au rayon horizontal AC, je dis que la distance AD du pied de chaque perpendiculaire au centre A du cercle décrit, continuera la variation du travail instantané produit sur chaque petit arc décrit BB', ou lui sera proportionnelle. Car, dans la valeur de ce travail, F, s et r sont des quantités constantes pour chaque travail instantané, et il n'y a que AD qui soit variable dans l'expression $F \times \frac{s}{r} \times AD$. Si le bouton est parvenu en E, la longueur AD est nulle, aussi bien que le travail instantané de la bielle; puis, à partir de ce point jusqu'au rayon horizontal AC, cette perpendiculaire AD augmente jusqu'à devenir égale à r. Le travail instantané est alors parvenu à son *maximum*, et il a pour

valeur, dans la position C du bouton, le produit $F \times \frac{s}{r} \times r$, ou $F \times s$. Enfin, au-dessous du point C, la perpendiculaire AD décroît de nouveau, et devient encore nulle au point le plus bas G. Le travail instantané passant par toutes ces variations, on voit combien sont grandes les inégalités qu'il éprouve, puisque de $F \times s$ qu'il se trouve en C, il se réduit à zéro en G et E.

Cherchons maintenant à quelle distance AX il faudrait appliquer l'effort F de la bielle pour que, agissant tangentiellement à une roue de ce rayon AX que nous représenterons par X, elle produise dans un demi-tour le même travail que celui de la bielle dans cette même demi-révolution. Nous avons reconnu que ce dernier était égal à $2r \,.\, F$. Quant au premier, il est évidemment égal à $F \times \pi X$, puisque πX est la mesure de la demi-circonférence dont X est le rayon, et que cette demi-circonférence est en réalité décrite sur les directions partielles de F, en tant que cette force est tangente à cette circonférence. On aura, par conséquent,

$$2r \,.\, F = F \times \pi X, \quad \text{ou} \quad X = \frac{2r}{\pi} = \frac{2r}{3,1416} = 0,637 \,.\, r.$$

Cette longueur X, qu'on nomme le bras de levier moyen de la manivelle, se trouve ici être les $\frac{2}{3}$ environ du bras de cette dernière. Si nous nous rappelons que le travail instantané de la bielle est représenté par $F \times \frac{s}{r} \times AD$, et que, pour le bras de levier moyen, il est égal à $0,637 \,.\, s \times F = F \times \frac{s}{r} \times 0,637 \,.\, r$, on reconnaît sans peine que le premier est proportionnel au moment variable $AD \,.\, F$, et le deuxième au moment moyen et constant $0,637 \,.\, r$. Aussi, les calculs relatifs à la manivelle sont-ils susceptibles de simplification, parce que, sans erreur sensible, cette manivelle peut être remplacée par une roue d'un rayon égal à $0,637 \,.\, r$, que sollicite la force F tangentiellement à sa circonférence. De ce que le plus grand travail instantané de la bielle est proportionnel à $F \,.\, r$, son plus petit à 0, et le travail moyen instantané à $0,637 \,.\, Fr$, on en conclut que le premier étant 1, le deuxième sera 0, tandis que le travail instantané moyen sera représenté par 0,637. Par conséquent, les écarts du plus grand travail instantané et du plus petit hors du travail moyen, comparés au plus grand

travail pris pour unité, seront représentés, l'un par 1 — 0,637 ou 0,363, et l'autre par 0,637 : autrement dit, le travail moyen diffère des deux extrêmes des 0,363 et des 0,637 du plus grand travail.

50. *Manière dont varie le travail instantané dans le deuxième demi-tour.* — Nous n'avons encore considéré que ce qui se passe dans un demi-tour de la manivelle, voyons maintenant ce qui a lieu quand elle achève l'autre demi-tour EHG. Or, il peut arriver l'une de ces trois choses : 1° La puissance F cesse entièrement d'agir; 2° ou elle agit dans une direction contraire à sa direction primitive; 3° ou enfin elle continue d'agir dans la même direction.

Dans le premier cas, qui est celui des pédales ou des pistons de pompe à simple effet, le travail total de F est $2F \cdot r$, tandis que celui de la même puissance appliquée au bras de levier moyen X pendant un tour entier, sera $2\pi X \cdot F$. On aura

$$2\pi X \cdot F = 2r \cdot F, \quad \text{ou} \quad X = \frac{r}{\pi} = 0{,}318 \cdot r.$$

Le plus grand travail étant toujours proportionnel à $F \cdot r$, et le plus petit à 0, tandis que le travail moyen instantané sera ici $0{,}318 \cdot Fr$, on voit que les écarts du plus grand et du plus petit sur le travail instantané moyen seront représentés ici par 1 — 0,318 et 0,318, ou par 0,682 et 0,318. Par conséquent, l'écart du plus grand travail sur le travail moyen, écart qui est ici 0,682, sera plus considérable que dans le cas précédent, où il était représenté par 0,637.

Dans le deuxième cas, où la puissance F change de direction à chaque demi-tour, et où elle agit toujours pour faire tourner dans le même sens, elle développera dans le tour entier un travail égal à $4r \cdot F$. On aura donc

$$4r \cdot F = 2\pi X \cdot F, \quad \text{ou} \quad X = \frac{2r}{\pi} = 0{,}637 \cdot r,$$

comme pour le cas où la puissance agit à chaque demi-tour. Les écarts du plus grand travail et du plus petit en dehors du travail moyen sont donc représentés par 0,363 et 0,637. Par conséquent, le plus grand écart dans le deuxième cas est plus petit que celui du premier cas.

Dans le troisième cas, le travail total fourni par la puissance, pendant un tour entier de la manivelle, sera nul, et il en sera de même du travail instantané moyen, en sorte que les écarts du plus grand travail et du plus petit, en dehors du travail moyen, seront proportionnels à ces travaux eux-mêmes, ou représentés par 1 et 0. Ces écarts deviendront dans ce cas les plus grands possibles.

Ce dernier cas ne peut être que relatif à l'action de la pesanteur qui agit toujours dans le même sens, et qui ne produit aucun travail pendant une révolution complète (3e partie, 14). Mais, comme cette action se joint toujours à celle d'une autre force qui agit dans la direction de la bielle comme les précédentes, il convient d'examiner son influence dans les inégalités du travail instantané.

51. *Manière de régler le poids des équipages de la manivelle.* — Nommons p le poids de la bielle BF et de son équipage, qui agit suivant la direction de F. On observera que le poids p s'ajoute à la force F ou s'en retranche selon qu'il agit ou non dans le sens de cette force, de telle sorte que la quantité de travail dans un tour entier n'est nullement altérée par ce poids. Par conséquent, son influence est également nulle et sur le bras de levier moyen et sur le travail instantané moyen, et comme le travail élémentaire de la puissance est toujours nul pour la position verticale du bouton de la manivelle en E et G, on voit que l'effet du poids p se réduira à augmenter ou à diminuer le plus grand travail instantané en C et H, toujours proportionnel à rF, selon le sens de la puissance F.

Cela posé, il est aisé de voir que les écarts du plus grand travail instantané dû aux forces F et p sur le travail moyen, seront dans le cas où F agirait dans les deux demi-tours, et dans celui où elle n'agirait que dans le premier demi-tour en s'ajoutant à p, plus considérables que dans les cas précédents où on faisait $p = 0$: donc, dans ces circonstances, il sera essentiel de mettre l'équipage en équilibre autour de l'arbre de rotation. Mais il pourra en être tout autrement du cas où F agit seulement dans le premier demi-tour et dans une direction contraire à celle du poids p. En effet, la plus grande valeur du travail instantané ayant toujours lieu pour la position horizontale du bras de la manivelle, elle sera proportion-

nelle à $r(F - p)$ pour le premier demi-tour et à rp pour le second. On devra donc prendre la première ou la dernière de ces quantités pour la limite supérieure du travail instantané, selon qu'on aura $F - p >$ ou $< p$, ou $F >$ ou $< 2p$. Le cas le plus avantageux aura lieu évidemment quand la valeur de p sera telle que $r(F - p)$ sera égal à rp, ou que p sera égal à $\frac{1}{2}F$, en sorte que le plus grand travail instantané, réduit ici à la moitié, sera représenté par $\frac{1}{2}F \cdot r$. Mais, comme au premier cas, le travail moyen demeure toujours proportionnel à $0{,}318 \cdot r \cdot F$, et le plus petit à 0. Les écarts du plus grand et du plus petit travail instantané, en dehors du travail moyen, deviennent donc $\frac{1}{2} - 0{,}318$ et 0,318, c'est-à-dire 0,182 et 0,318, et ils sont alors moindres que pour les cas précédents.

52. *Différence d'une manivelle à simple effet et d'une manivelle à double effet.* — Nous avons dit que la puissance appliquée à la bielle d'une manivelle agit tantôt pendant un seul demi-tour et n'agit plus pendant le demi-tour suivant, et tantôt agit pendant un tour entier en changeant d'un demi-tour à l'autre, le sens de sa propre direction. De là résultent deux distinctions à faire dans la manivelle, selon ces deux circonstances, c'est-à-dire qu'elle peut être ou *à simple effet* ou *à double effet*.

Pour se faire une idée de la manivelle à simple effet, imaginez un moteur tirant de haut en bas sur une corde attachée au bras d'une manivelle; il ne pourra que faire décrire un demi-tour descendant à ce bras, sans l'élever pendant le demi-tour ascendant, et un volant devient nécessaire pour que la manivelle continue à marcher pendant ce demi-tour où l'action du moteur cesse forcément. Mais si, au lieu d'une corde, on a une bielle inflexible, alors le moteur peut travailler sur cette bielle aussi bien de bas en haut que de haut en bas; et toute manivelle ainsi disposée pour que le moteur exerce son action dans le sens descendant pendant un premier demi-tour, et dans le sens ascendant pendant le second demi-tour, est ce qu'on nomme une manivelle à double effet.

VII.

DES MANIVELLES COMPOSÉES.

53. *Effet des manivelles doubles, et leur disposition la plus avantageuse.* — On applique souvent sur un même axe deux manivelles dirigées en sens contraire, et situées dans des points différents de l'axe, afin que les bielles qui manœuvrent chacune d'elles ne puissent point se rencontrer. Lorsque ces manivelles sont comprises dans un même plan passant par l'axe, leur disposition ne peut servir à régulariser l'action de la puissance, quand elle est constante en grandeur et en direction. Il faut nécessairement, pour que cette régularisation ait lieu, que les deux manivelles soient dans des plans différents passant par l'axe et formant un angle quelconque. Tantôt deux manivelles sont montées sur un même arbre (fig. 359); tantôt l'arbre est interrompu par des coudes faisant fonction de manivelles, et il est supporté par trois appuis dont les intervalles servent au jeu de chaque bielle (fig. 360); toutefois, les projections latérales de ces deux systèmes sont représentées en commun par la figure 361. Lors donc que les deux bras de manivelles montés sur un même arbre forment entre eux un angle quelconque (et dans ce cas le système s'appelle une manivelle double), voyons s'il y a de l'avantage à répartir une seule puissance en deux autres égales et parallèles sur ces deux bras. Si je nomme F chaque puissance partielle appliquée à chaque bielle, et que ces puissances n'agissent que pendant un demi-tour, on reconnaît que l'action est presque aussi irrégulière que si une puissance égale à $2F$ se trouvait appliquée à une manivelle simple d'un bras égal à ceux de la manivelle double. Car la résultante $2F$ des deux premières peut être censée appliquée au milieu I (fig. 362) de la corde BB', qui réunit les deux boutons projetés dans un même plan ; et bien que cette résultante agisse sur un bras AI moindre que l'un des bras AB ou AB', néanmoins les variations du travail auront des écarts par rapport au travail moyen, qui seront entièrement les mêmes que pour la manivelle simple. Donc, dans le cas où les deux puissances égales n'agissent que pendant un demi-tour sur une

manivelle double, le travail n'est pas plus régulier que celui d'une puissance double de l'une d'elles qui travaillerait sur une manivelle simple.

Mais, quand chaque puissance F agit en montant et en descendant, ou que chaque bras est à double effet, on peut se demander l'inclinaison des deux bras entre eux, pour que l'irrégularité soit la moindre possible. Soient AB, AB' (fig. 363) les deux bras de la manivelle double dans laquelle les puissances agissent également aux deux demi-tours, et BAB' l'angle constant que forment ces deux bras entre eux. Il est aisé de s'assurer que le travail instantané total des puissances F atteindra sa limite supérieure pour les positions verticales et horizontales de la corde BB', et sa limite inférieure pour les quatre positions symétriques où l'un des bras AB, AB' se confondra avec la verticale.

Observons que le travail instantané total pour ses limites supérieures, en appelant s l'arc élémentaire constant décrit, et r le rayon AB, sera exprimé par $2F \times \frac{s}{r} \times AI$, et par $2F \times \frac{s}{r} \times BI$; que si la première valeur devient très-grande lorsque AI est très-grand, la grandeur de BI est alors très-petite, aussi bien que la deuxième valeur de la limite supérieure du travail instantané. Par conséquent, les écarts de ces deux limites en dehors du travail moyen instantané, quel que soit ce dernier, seront réduits le plus possible si $AI = BI$, c'est-à-dire si l'angle BAB' est droit. On a alors

$$AI = BI = \frac{AB}{\sqrt{2}},$$

et les limites supérieures du travail instantané deviennent, l'une et l'autre,

$$2F \times \frac{s}{r} \times \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Quant aux quatre valeurs des limites inférieures du travail instantané, il est évident qu'elles sont, dans le cas de l'angle droit BAB', égales à $F \times \frac{s}{r} \times r$.

Pour avoir le travail instantané moyen, il faut remarquer que

les puissances, dans un tour entier, développent un travail égal à $2F \times 4r$, et que le même travail produit par elles quand elles sont appliquées à la circonférence dont X est le rayon sera égal à $2F \times 2\pi X$. On aura donc

$$X = \frac{2r}{\pi} = 0{,}6366 \ . \ r.$$

Le travail moyen instantané sera donc exprimé par

$$2F \times 0{,}6366 \ . \ s.$$

Si maintenant nous comparons le plus grand travail instantané et le plus petit avec ce travail moyen, on trouve que leurs écarts en dehors de ce dernier pris pour unité, sont environ le $\frac{1}{9}$ et le $\frac{1}{5}$ de ce travail moyen. Les manivelles coudées à angle droit sont donc très-avantageuses pour la régularité du mouvement.

54. *Effets et inconvénients des manivelles triples.* — Pour une manivelle triple dont les bras AB, AB', AB'' (fig. 364) partageraient dans leur projection sur un plan perpendiculaire à l'axe, la circonférence en trois parties égales, et qui seraient sollicitées par trois forces égales F agissant seulement dans le demi-tour EBG, on trouve que le travail instantané total a sa plus grande et sa plus petite valeur quand l'un quelconque des bras est horizontal ou vertical; que le bras de levier moyen donné par l'équation $6F \ . \ r = 2\pi X \ . \ F$, a pour expression $\frac{3r}{\pi} = 0{,}955 \ . \ r$, et qu'enfin le travail moyen instantané ne diffère que de $\frac{1}{2}$ du plus grand et de $\frac{1}{11}$ du plus petit, pourvu toutefois que les équipages des manivelles soient ici censés en équilibre autour de l'axe A. Enfin, si les puissances agissent sur les deux demi-tours de chaque bras, le plus grand travail instantané et le plus petit ont lieu quand l'un des bras est successivement horizontal et vertical. Le bras de levier moyen est donné par la relation

$$6\pi X \ . \ F = 12r \ . \ F, \quad \text{ou} \quad X = \frac{2r}{\pi} = 0{,}6366.$$

On reconnaîtra, d'ailleurs, que le travail instantané moyen est proportionnel à 1,910, que le plus grand travail instantané est proportionnel à 2 et le plus petit à 1,732. Par conséquent, les écarts hors du travail moyen, rapportés à ce dernier pris pour unité, sont $\frac{1}{21}$ et $\frac{1}{10}$.

Ainsi, dans les manivelles triples à double effet, le mouvement est presque aussi régulier que si les puissances agissaient tangentiellement à une roue. Mais ces manivelles sont inexécutables par la difficulté de maintenir en ligne droite les appuis d'un arbre quand il en a plus de deux (et il en faut quatre au moins pour les manivelles triples énarbrées à un seul axe). Toutefois, voici comment à Moyeuvre on a cherché à éviter ce dernier inconvénient pour une manivelle triple destinée à faire jouer trois soufflets, et dont l'utilité est incontestable non-seulement pour que ces soufflets produisent un jet d'air continu, mais encore pour régulariser le plus possible la résistance qui, dans l'établissement, se trouve vaincue par la puissance uniforme d'une roue hydraulique.

L'arbre des manivelles se compose de deux parties *ab* et *cd* (fig. 365), dont la première porte deux manivelles et l'autre une troisième, de manière que les projections de ces manivelles sur un même plan perpendiculaire à l'axe partagent la circonférence en trois parties égales. Un autre arbre *AB*, parallèle aux deux parties précédentes, reçoit le mouvement du moteur, et le transmet au moyen de deux roues égales *C* et *C'*, qui engrènent chacun dans deux autres roues *D*, *D'*, aussi égales entre elles, et montées respectivement sur les deux parties *ab* et *cd* de l'arbre de la manivelle triple. Il est évident que les roues *C* et *C'* recevront des vitesses égales, et que, si dans le principe les trois bras de manivelle sont à angles égaux, les choses se passeront comme pour une manivelle triple ordinaire.

VIII.

THÉORIE ET ÉTABLISSEMENT DES VOLANTS.

55. *Forme ordinaire des volants et expression de leur force vive.*— Il n'est pas toujours possible de régulariser le travail d'un moteur ou d'une résistance par l'emploi des manivelles doubles ou triples, et quand on est réduit à se servir d'une manivelle simple, on a vu, au chapitre précédent, que les variations du travail instantané ne laissaient pas que d'être assez sensibles. Il en est de même dans toutes les circonstances où tantôt le mouvement alternatif a lieu, tantôt la puissance ou la résistance, ou toutes deux à la fois agissent par intermittences. Le moyen le plus général de satisfaire à la condition de la régularité du travail, est sans contredit le *volant*. Il se compose ordinairement d'un anneau en fonte à section rectangulaire (fig. 366), relié à l'axe au moyen de bras de même matière ou de bois qui s'assemblent sur un *noyau* ou *moyeu* commun, monté sur la partie carrée de cet axe. Quelquefois aussi on se contente de placer à l'extrémité des bras, des masses métalliques auxquelles on donne, quand elles sont isolées, une forme lenticulaire, dans la vue de diminuer la résistance de l'air; mais ce dernier moyen doit être proscrit à cause des dangers qu'il présente. Pour avoir la force vive d'un volant, nous renverrons au n° 67 de la 2e partie, duquel il résulte que si on nomme P le poids du volant, V la vitesse de sa circonférence moyenne ou l'espace qui y est décrit dans une seconde, $\frac{P}{g} \times V^2$ est la force vive de ce volant, en se rappelant que V' équivaut au produit de la vitesse angulaire et du rayon moyen.

56. *Volant pour une manivelle à simple effet.* — Nous commencerons par l'établissement du volant dans le cas le plus fréquent qui se rencontre pour les machines, c'est-à-dire dans celui de la manivelle dont le bras AB (fig. 367), sollicité de haut en bas par la force F agissant sur une bielle verticale pendant le premier demi-tour EBG, fait tourner l'arbre A, ainsi qu'une roue M, dont la réaction

en *N* en fait mouvoir une autre destinée à vaincre l'effet utile. J'appelle *Q* la résistance de haut en bas que cette dernière roue oppose et qui sera mesurable en poids sans être cependant pour nous un poids véritable à soulever. Dans ce calcul nous ne tiendrons aucun compte de l'inertie de la roue *M*, parce que son diamètre est peu de chose par rapport à celui du volant, dont la grande masse est toujours rejetée le plus loin possible de l'axe de rotation, afin qu'il puisse acquérir une grande force vive. Cela posé, considérons le système à un certain état de mouvement, et observons que, d'après ce qui a été dit au n° 49, le travail instantané de la puissance *F* sur la bielle est variable; que ce travail croît de *E* en *C*, décroît de *C* en *G* où il devient 0, et qu'enfin il est nul pendant toute la demi-révolution ascendante *GHE*. Quant au travail instantané de *Q*, comme cette résistance est constante et qu'elle demeure tangente à la circonférence de la roue *M*, il est nécessairement constant. Tant que le travail instantané de la puissance *F* l'emporte sur celui de *Q*, la vitesse s'accélère; mais elle ne saurait s'accélérer indéfiniment, parce que le travail instantané de la puissance finit par diminuer, et qu'il arrivera un moment où il sera devenu égal à celui de la résistance. A cet instant la vitesse aura acquis sa plus grande valeur, ou sera parvenue à son *maximum*. Le travail instantané de la puissance décroissant encore, deviendra moindre que celui de la résistance, et de cette nouvelle inégalité, contraire à la première, résultera un ralentissement tel que la vitesse diminuera de plus en plus.

Mais, comme le travail de la puissance ne peut décroître indéfiniment, et qu'il arrive un instant où il croît de nouveau, on voit que tant qu'il demeure inférieur à celui de la résistance, le ralentissement se continue, mais de moins en moins, jusqu'à l'instant où le travail instantané de la puissance est devenu égal à celui de la résistance. A ce moment la vitesse a cessé de décroître; mais elle est parvenue à son *minimum* : car, au delà, le travail de la puissance l'emporte de plus en plus sur celui de la résistance; la vitesse augmente alors, et arrive enfin de nouveau à son *maximum*.

Si maintenant nous supposons sur l'arbre *A* un volant capable d'une grande force vive, et qu'on se reporte aux deux époques où la vitesse du système est la plus grande et la plus petite, il est évident que la force vive du volant se sera aussi, à ces mêmes époques, accrue ou diminuée, et on sait que l'accroissement ou la diminu-

tion de la force vive de ce volant devra être égale (puisqu'on fait abstraction de l'inertie des autres pièces) au double de la différence absolue entre le travail dépensé par la puissance et le travail absorbé par la résistance pendant l'intervalle des deux époques correspondantes au *maximum* et au *minimum* de vitesse (3e partie, 1, dixième principe). Cette relation à établir n'offre aucune difficulté, puisque nous savons calculer les quantités de travail des diverses forces. Examinons maintenant quel est l'effet du volant. Sa force vive, avons-nous dit, est $\frac{P}{g} \times V^2$, ou $\frac{P}{g} \times A^2 v_1^2$, A étant son rayon moyen, et v_1 sa vitesse angulaire, laquelle est proportionnelle au nombre de tours du volant dans un temps déterminé, nous reconnaissons déjà que, pour un même nombre de tours, la force vive du volant croît proportionnellement à son poids, et au carré de son rayon : autrement dit, pour un rayon *double, triple,* la force vive du volant devient *quatre, neuf* fois plus grande. D'où il suit que cette force vive sera considérablement augmentée, surtout par le rayon. Si nous nous reportons vers les instants où la machine s'accélère, la force vive qu'absorbe le volant est toujours égale au double du travail de la puissance diminuée de celui de la résistance, et en supposant que toutes les circonstances de ce travail soient les mêmes, n'est-il pas évident que la vitesse angulaire s'accroîtra d'autant moins que le poids et le rayon du volant sont rendus plus considérables? Il y a donc lieu de régler le poids et les diminutions d'un volant de telle façon que sa vitesse angulaire ne dépasse pas une certaine limite, ou pour qu'elle varie seulement de $\frac{1}{10}$ en plus ou en moins. Telle est aussi la marche que nous suivrons dans l'exemple de la manivelle à simple effet. Nous admettrons que dans la résistance Q on ait compris celle du frottement, c'est-a-dire que ce frottement, déterminé à l'avance par le calcul, sera multiplié par le rapport du rayon du tourillon de la roue M au rayon AN, et que ce produit sera ajouté à la résistance variable de l'autre roue. Cette somme sera pour nous ce que nous entendrons désormais par Q.

La première condition à remplir, c'est qu'au bout de chaque révolution, le travail total de la puissance F soit égal à celui de la résistance Q. Car si le premier était plus grand, la vitesse s'accroîtrait de révolution en révolution, et la machine serait mal réglée.

Or, nous nous vu (3e partie, 49) que le travail de F dans la première demi-révolution ECG est $F \times EG$, ou $F \times 2r$; et comme la puissance ne travaille point pendant l'autre demi-révolution ascendante GHE, il est évident que le produit $F \cdot 2r$ représente encore le travail de la puissance pendant une révolution complète. D'ailleurs le travail de la résistance Q qui ne cesse d'agir pendant toute la durée d'une révolution tangentiellement à la roue M dont on représentera le rayon par R, ce travail, dis-je, aura pour valeur $2\pi \cdot R \cdot Q$ (π étant le rapport 3,1416 de la circonférence au diamètre). Ainsi, en vertu de notre première condition énoncée, on aura

$$F \cdot 2r = 2\pi \cdot R \cdot Q,$$

et, par suite,

$$Q = \frac{F \cdot r}{\pi R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Telle est la valeur de la résistance pour que le mouvement puisse se maintenir.

Cherchons actuellement les dispositions de la manivelle pour lesquelles la vitesse du volant devient la plus grande et la plus petite. A cet effet nous nous rappellerons que le travail instantané de la puissance F, en un point quelconque B, a été trouvé (3e partie, 49) égal à $F \times \frac{s}{r} \times AD$. Supposez que le bouton de la manivelle soit en E, et que celle-ci tourne de gauche à droite. Il est évident qu'en cette position le travail instantané de la puissance est nul, quoique la résistance agisse toujours; toutefois la manivelle tourne, et si la puissance n'agit pas encore avec prépondérance, son travail instantané augmente; ainsi la vitesse ne cessera de décroître jusqu'à ce que le bouton soit parvenu dans un point B, où le travail instantané de la puissance sera devenu égal à celui de la résistance. Mais, pendant que le bouton parcourt le petit arc bB que j'ai nommé s, le point d'application de la résistance Q parcourt sur la circonférence de la roue M un arc lL semblable à bB, et tel qu'on a

$$lL : bB \quad \text{ou} \quad s :: R : r,$$

ou

$$lL = \frac{R}{r} \times s.$$

Le point B, où les deux travaux instantanés sont égaux, est d'ailleurs celui où la vitesse du volant cesse de décroître, et il sera déterminé par cette relation, due à l'égalité des travaux instantanés de la puissance et de la résistance,

$$F \times \frac{s}{r} \times AD = Q \times Ll,$$

ou, en remplaçant Ll par sa valeur trouvée tout à l'heure,

$$F \times \frac{s}{r} \times AD = Q \times \frac{s}{r} \times R.$$

Cette relation se réduit, en définitive, à

$$F \times AD = Q \times R.$$

Mettons à la place de Q sa valeur donnée (a), on trouve encore

$$F \times AD = \frac{F \cdot r}{\pi R} \times R,$$

ou

$$AD = \frac{r}{\pi} = 0{,}318 \cdot r.$$

Telle est la valeur de AD, c'est-à-dire la distance au centre A, du pied de la perpendiculaire abaissée du point cherché B, sur le rayon horizontal AC. Cette distance est, comme on voit, environ le tiers du rayon de la manivelle.

Lorsque ensuite le bouton quitte le point B, le travail instantané de la puissance l'emporte sur celui de la résistance, et la vitesse s'accélère jusqu'à ce que de nouveau ces deux travaux instantanés soient devenus égaux ; alors la vitesse du volant a acquis son *maximum*. Ce point doit être évidemment au-dessous du rayon horizontal AC, parce que sur ce rayon le travail instantané de la puissance est le plus grand possible, et qu'il a dû décroître pour redevenir égal à celui de la résistance. Du reste, la position B' de la manivelle pour laquelle la vitesse du volant est un *maximum*, s'obtient par le même calcul que tout à l'heure, et elle est déterminée par la valeur AD encore égale à $0{,}318 \cdot r$; ce qui prouve que les points B et B', pour lesquels la vitesse du volant est un *minimum* et un *maximum*, sont sur une même corde BB' perpendiculaire au rayon horizontal AC, et dont la distance au centre

est 0,318 . r. Passé le point B', le travail instantané de la puissance est plus petit que celui de la résistance; il reste même nul pendant toute la demi-révolution ascendante, de sorte que la vitesse décroît et reprend son premier *minimum* quand le bouton est parvenu en E. En d'un mot, l'action de la puissance variant de la même manière à chaque révolution, les vitesses redeviennent les mêmes, quand le bouton arrive aux mêmes positions.

Pour calculer le poids du volant, nous considérerons ce qui se passe dans l'intervalle de la position B à la position B'. Désignons par V la vitesse *maximum* du volant comptée sur son rayon moyen, et qui a lieu quand le volant est en B' : $\frac{P}{g} \times V^2$ sera la force vive du volant pour cette position de la manivelle; de même, $\frac{P}{g} \times v^2$ sera la force vive du volant à l'instant de la position B de la manivelle, v représentant la vitesse *minimum* de ce volant. Ainsi, $\frac{P}{g} V^2 - \frac{P}{g} v^2$, ou $\frac{P}{g} (V^2 - v^2)$ exprimera l'accroissement de force vive qu'aura absorbé le volant pendant l'intervalle des positions B et B' de la manivelle. Le travail de la puissance F pendant ce même intervalle sera $F \times$ corde BB'. D'ailleurs, on a

$$\text{corde } BB' = 2BD,$$

$$BD = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{r^2 - (0{,}318 \,.\, r)^2} = 0{,}948 \,.\, r,$$

d'où $$BB' = 2 \times 0{,}948 \,.\, r = 1{,}896 \,.\, r.$$

Le produit $F \times$ corde BB' deviendra donc 1,896 . r . F. Si nous voulons avoir le travail de la résistance Q pendant l'intervalle dont il s'agit, on remarquera que ce travail n'est autre chose que le produit de Q multiplié par l'arc que son point d'application décrit pendant que le bouton décrit l'arc BB', ou que ce travail sera égal à $Q \times$ arc $BB' \times \frac{R}{r}$. Or, à l'aide de la *table des arcs et des cordes correspondantes*, et sachant que la corde $BB' = 1{,}896 \,.\, r$, on trouve que l'arc $BB' = 2{,}4938 \,.\, r$. Par conséquent, le travail cherché de la résistance deviendra

$$Q \times 2{,}4938 \,.\, r \times \frac{R}{r}, \quad \text{ou} \quad Q \times 2{,}4938 \,.\, R.$$

Remplaçant dans cette expression Q par la valeur donnée d'après la condition première et qui est $\frac{Fr}{\pi R}$, on trouve que le travail résistant équivaut à

$$\frac{F \cdot r}{\pi R} \cdot 2{,}4938 \cdot R, \quad \text{ou à} \quad F\,\frac{2{,}4938 \cdot r}{\pi}, \quad \text{ou à} \quad F\,\frac{2{,}4938 \cdot r}{3{,}1416},$$

ou enfin à $\qquad 0{,}7938 \cdot r \cdot F.$

L'excès du travail de la puissance sur celui de la résistance sera évidemment

$r \cdot F\,(1{,}896 - 0{,}7938)$, c'est-à-dire, $1{,}102 \cdot r \cdot F$,

dont le double $2{,}204 \cdot r \cdot F$ équivaut à l'accroissement de la force vive du volant, ou à $\frac{P}{g}(V^2 - v^2)$. On aura donc, en définitive, cette égalité,

$$\frac{P}{g}(V^2 - v^2) = 2{,}204 \cdot r \cdot F \quad \ldots \quad (b)$$

Je nomme V_1 la vitesse moyenne du volant, c'est-à-dire celle qui correspond au régime voulu pour le système. Si le poids de ce volant doit être tel que sa vitesse ne croisse ni ne décroisse de plus de $\frac{1}{10}$ de la moyenne ou en général de $\frac{1}{n}$, il est évident que les vitesses *maximum* et *minimum* du volant seront représentées, l'une par $V_1 + \frac{V_1}{n}$, et l'autre par $V_1 - \frac{V_1}{n}$. Ainsi, les trois vitesses V, V_1 et v formeront entre elles une proportion par différence dont la raison sera $\frac{V_1}{n}$; si d'ailleurs V surpasse de cette quantité $\frac{V_1}{n}$ la vitesse V_1, et que celle-ci surpasse la vitesse v de la même quantité, c'est comme si V surpassait v du double $\frac{V_1}{n}$. On aura donc

$$V = v + \frac{2V_1}{n}, \quad \text{ou} \quad V - v = \frac{2V_1}{n}.$$

Mais il est visible que si $V = V_1 + \frac{V_1}{n}$ et $v = V_1 - \frac{V_1}{n}$,

on a aussi $V + v = 2V_1$. Donc, si on multiplie $V + v$ par $V - v$, et qu'on se rappelle que le produit de la somme de deux quantités par leur différence est égal à la différence de leurs carrés, on en conclut

$$V^2 - v^2 = \frac{4V_1^2}{n}.$$

Substituons cette dernière expression dans la relation (b) du volant, on trouvera

$$\frac{P}{g} \times \frac{4V_1^2}{n} = 2{,}204 \,.\, r \,.\, F,$$

et, par suite, $$PV_1^2 = 2{,}204 \times \frac{g \,.\, n}{4} \,.\, r \,.\, F.$$

On voit ainsi que PV_1^2 sera connu. Mais on obtient la vitesse moyenne V_1 du volant d'après le nombre de tours qu'il doit faire dans un temps déterminé et d'après le rayon de son anneau. Par conséquent, l'équation finale à laquelle nous venons d'arriver, nous donnera le poids P du volant.

On peut parvenir à l'expression du produit PV_1^2 sous une autre forme, et la définir par le nombre des chevaux de force qui constitue le travail du moteur et par le nombre de tours que doit faire le récepteur dans un temps déterminé, dans une minute par exemple. Si nous appelons, en effet, m ce dernier nombre, $2m \,.\, r \,.\, F$ sera le travail du moteur pendant une minute, et $\frac{2m \,.\, r \,.\, F}{60}$ ou $\frac{m \,.\, r \,.\, F}{30}$ ce même travail pendant une seconde. Désignant par N le nombre de chevaux-vapeur contenus dans le moteur et capables d'un travail de 75 kilogr. élevés à 1 mètre pendant une seconde, on aura

$$\frac{m \,.\, r \,.\, F}{30} = 75^{k.m} \times N, \quad \text{ou} \quad r \,.\, F = \frac{30 \,.\, 75 \,.\, N}{m} = \frac{2250 \,.\, N}{m}.$$

Après avoir remplacé $r \,.\, F$ par cette nouvelle valeur, dans l'expression de PV_1^2, on trouve

$$PV_1^2 = 2{,}204 \times \frac{g \,.\, n}{4} \times \frac{2250 \,.\, N}{m};$$

et, en mettant pour g sa valeur $9^m,81$, on trouve, tout calcul fait,

$$PV_1^2 = \frac{24324}{m} \times n \times N. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (o)$$

Ainsi que nous l'avons dit, le nombre m est relatif à la bielle à laquelle la puissance est appliquée, et non au volant, si ce dernier était, comme cela arrive quelquefois, monté sur un arbre différent de l'axe de la puissance. Il n'y a que le nombre n qui soit arbitraire. A la vérité plus n sera grand, moins sera considérable la variation de la vitesse, et si l'on veut que la vitesse ne varie que très-peu, ce ne pourra être qu'à l'aide de très-grandes valeurs données au poids P du volant. Si $n = 1000$, ou si la vitesse varie seulement de $\frac{1}{1000}$ en plus ou en moins, le poids P sera dix fois plus considérable que quand $n = 100$. Or, les volants coûtent cher, et une augmentation de leur poids produit sur leurs appuis des pressions d'où résultent des frottements capables d'absorber à eux seuls plus de la moitié du travail du moteur. Par exemple, un volant du poids de 20 000 kilogr. éprouvera sur son tourillon un frottement de 2 000 kilogr., lorsque le rapport f du frottement à la pression est $\frac{1}{10}$. Que ce volant fasse 30 révolutions par minute ou une demi-révolution par seconde, et que son tourillon ait 20 centimètres de diamètre, c'est-à-dire $0^m,60$ de circonférence, le travail absorbé par le frottement du volant pendant 1″ équivaudra à

$$2000^k \times \frac{0^m,60}{2}, \quad \text{ou à } 600^{k \cdot m};$$

c'est-à-dire que cette résistance absorberait à elle seule le travail de huit chevaux à $75^{k \cdot m}$ chaque, par seconde.

On ne peut donc arbitrairement choisir le nombre n, et sa détermination dépend de la comparaison qu'il faut faire des avantages et des inconvénients qui y sont inhérents. Au reste, cela dépend du but qu'on veut remplir. Si des machines doivent marcher avec beaucoup de régularité, on fera $n = 15$ ou 20, et on réduira ce nombre à 10 quand les machines ne doivent avoir qu'une régularité médiocre. Les Anglais, pour les machines à vapeur destinées à faire mouvoir des filatures, élèvent le nombre n à 30, mais il y a exagération.

57. *Volant des manivelles à double effet.* — Lorsque la manivelle est à double effet, le calcul du volant est analogue, si ce n'est qu'ici le travail de la puissance dans une révolution s'élève à $4r \,.\, F$. Par conséquent, pour que ce travail fût égal à celui de la résistance au bout d'une même révolution, on poserait $4r \,.\, F = 2\pi R \,.\, Q$. Les positions du bouton de la manivelle où les vitesses *maximum* et *minimum* sont également différentes, sont ici fixées par une autre valeur de $AD = 0{,}64 \,.\, r$. Calculant enfin la corde qui joint, dans une même demi-révolution, la position où une vitesse *minimum* a lieu à celle qui correspond à une vitesse *maximum*, ainsi que l'arc sous-tendu par cette corde, on sera à même de trouver, comme précédemment, la différence du travail de la puissance et du travail de la résistance pendant l'intervalle d'une vitesse *minimum* à une vitesse *maximum*. Si on égale le double de cette différence à l'accroissement de force vive que le volant a absorbé, si de plus on fait attention que le travail de la puissance pendant une seconde est représenté par $\frac{4r \,.\, F \,.\, m}{60}$, on aura, pour le volant de la manivelle à double effet, cette relation,

$$PV_1^2 = \frac{4645}{m} \,.\, n \times N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Maintenant, si on compare cette expression à celle qui est relative à la manivelle à simple effet, tout s'y trouve semblable à l'exception du facteur numérique, qui est cinq fois plus considérable pour la manivelle à simple effet que pour la manivelle à double effet. Donc à vitesse égale la première exige un poids de volant cinq fois plus grand. Cette conclusion démontre tout l'avantage qu'il y a à régulariser autant que possible le mouvement indépendamment de l'emploi du volant : car le poids de ce volant se réduirait au quart si la puissance était répartie sur les deux bras d'une manivelle double à simple effet; et il ne serait plus que de $\frac{1}{10}$ si la puissance agissait sur une manivelle triple, etc.

58. *Idée sur le calcul d'autres volants.* — L'exemple précédent de la manivelle pour lequel nous avons déterminé les dimensions du volant, et qui se rapporte aux machines à vapeur, cesse d'être applicable dans une infinité de circonstances. Tout à l'heure la résis-

tance était supposée constante et continue, et la direction de la puissance variait à chaque instant par rapport au bras de la manivelle. Or, il arrive souvent que l'action du moteur demeure constante, et que la résistance qui varie, soit parce que l'outil, comme la scie, est doué d'un mouvement alternatif, soit parce que la direction de la résistance change continuellement, soit encore parce que la résistance éprouve des intermittences. Les calculs sont alors différents les uns des autres pour la détermination du volant nécessaire à la régularisation du mouvement. Il conviendra toujours d'étudier comment les choses se passent dans une révolution ou plutôt dans une période complète, et de rechercher les deux positions d'équilibre, ou celles pour lesquelles le travail instantané de la puissance et celui de la résistance sont égaux, parce que ces deux positions correspondent à l'instant où la vitesse est devenue *maximum* et *minimum*. Si, en outre, on calcule les quantités de travail dépensées par la puissance et absorbées par la résistance pendant l'intervalle de ces positions, et qu'on égale le double de leur différence absolue à l'augmentation ou à la diminution de force vive du volant, cette relation traitée, comme on l'a fait, avec la condition que les plus grande et plus petite vitesses ne dépassent point de certaines limites, conduira à l'estimation convenable des dimensions du volant. Mais, comme ces calculs doivent être renouvelés autant de fois qu'il y a de cas particuliers, il est impossible d'assigner une règle générale. Nous allons donner quelques exemples qui serviront de guides dans la marche qu'on doit suivre.

1° *Laminoirs.* — Un laminoir consiste dans deux cylindres en fonte, tournant, chacun, sur deux tourillons, selon un mouvement convergent du côté où une barre de fer rouge est présentée à leur intervalle, et divergent du côté où cette même barre s'en échappe (fig. 368). Le fer se trouve aplati et allongé par l'effet de ces deux cylindres; mais comme il ne peut être d'une longueur indéfinie, et que la barre, après avoir passé une première fois entre les deux cylindres, doit être replacée au-dessus du cylindre supérieur pour être ramenée à l'ouvrier chargé de la présenter de nouveau, il arrive que le travail du laminage n'est point continu et qu'il éprouve des interruptions. Le moteur continuant à agir pendant la durée de ces intermittences, la vitesse augmente graduellement et acquiert sa limite supérieure au moment où la barre va être présentée, puis elle diminue, parce que le travail instantané de la résis-

tance du fer l'emporte sur celui du moteur, et elle se réduit à sa limite inférieure à l'instant où la barre est entièrement sortie du laminoir. La détermination des dimensions du volant est ici fort simple, attendu que la vitesse *maximum* correspond à l'instant où la barre est présentée, et la vitesse *minimum* à l'instant où la barre s'est échappée des deux cylindres. Si, par l'observation ou par le calcul, on pouvait trouver la quantité de travail nécessaire pour faire passer la barre et qu'on en retranchât celle du moteur dépensée pendant la durée de ce passage, le double de cette différence sera égal à la perte de force vive du volant pendant que sa vitesse descend du *maximum* au *minimum*. Nommant donc S la différence absolue de ces deux quantités de travail, parmi lesquelles celle de la résistance du fer est ici la plus grande, V et v les vitesses *maximum* et *minimum* de la circonférence moyenne du volant, P le poids de ce dernier, on aura la relation

$$\frac{P}{g}(V^2 - v^2) = 2S.$$

Ce volant doit être monté sur l'axe de l'un des cylindres, et comme chacun de ces derniers doit faire environ moyennement vingt tours par minute, on connaîtra la vitesse moyenne V_1 du volant. Si, d'ailleurs, on se donne pour condition que les vitesses *maximum* et *minimum* ne dépassent point la vitesse de régime, ou V_1, de $\frac{V_1}{n}$, en plus ou en moins, on pourra effectuer le calcul comme pour la manivelle, en faisant $n = 15$ ou 20. On se donnera, en outre, pour première condition, que le travail du moteur dépensé pendant une période complète, ou pendant l'intervalle où une barre est présentée deux fois, soit égal au travail de la résistance consommée par la barre, augmenté de celui des frottements.

2° *Scierie.* — Le volant d'une scierie exige des considérations qui ne ressemblent plus à celles du laminoir. On sait que le mouvement vertical de va-et-vient est transmis au châssis de la scie, par l'intermédiaire d'une bielle, au moyen d'une manivelle énarbrée à un axe qui reçoit son mouvement de la puissance (fig. 369). Dans ce travail la scie ne mord qu'en descendant, et elle remonte à vide. Ainsi, le bouton de la manivelle, dans la demi-révolution ascendante, est chargé du poids de la bielle et du châssis ; en descendant, au contraire, le bouton favorise l'action de la puissance, et est

poussé de haut en bas par le poids de la bielle et du châssis, diminué de la résistance de la scie contre le bois. Cette dernière, qui augmente avec l'épaisseur et la nature du bois, sera supposée d'une valeur moyenne, ou telle qu'elle conviendrait pour une pièce de bois de chêne, sans nœuds et d'un pied d'équarrissage. Cela posé, vous examinerez de point en point et pour tous les petits arcs élémentaires égaux décrits par le bouton, comment varient le travail instantané de la puissance et celui de la résistance pendant une révolution complète; les positions où ces travaux deviendront égaux seront évidemment celles où les vitesses sont devenues *minimum* ou *maximum*. Si on calcule ensuite la quantité totale de travail dépensée par la puissance et par les résistances pendant l'intervalle du *minimum* au *maximum* de vitesse, et qu'on égale le double de cette différence absolue à l'accroissement de force vive du volant, on déduira encore le poids de ce dernier pour que les vitesses demeurent dans une limite assignée.

3° *Filatures.* — Il y a certaines machines dont toutes les pièces sont douées de mouvements continus, et dans lesquelles il s'opère des variations qui rendent leur action fort irrégulière. Telles sont les filatures, dont tous les métiers sont mus à la fois par un même moteur, et où quelques-uns d'entre eux sont souvent arrêtés momentanément par leurs ouvriers respectifs sans qu'on puisse immédiatement modifier le travail du moteur. Il serait alors difficile de régler le mouvement, si on ne voyait par soi-même ce qui se passe dans l'atelier, et si on n'observait moyennement le nombre des métiers dont le mouvement est suspendu, ainsi que la durée de cette interruption. Supposons, par exemple, que le travail de tous les métiers réunis soit de 24 chevaux, et qu'il soit réduit à 20 quand on suspend trois ou quatre métiers pendant un nombre moyen de secondes représenté par t. Le travail de la résistance ainsi réduit pendant ce temps équivaut à $20 \times 75 \times t^{k \cdot m}$; car n'oublions pas que le cheval représente le travail de 75^k élevés à un mètre pendant une seconde. Supposons, en outre, que le travail du moteur qui fait marcher l'établissement soit de 23 chevaux. L'excès de ce travail sur celui de la résistance réduite par l'interruption des quatre métiers sera de $23 - 20$ ou 3 chevaux; cet excès répété pendant t secondes, équivaudra à $3 \times 75 \times t$, et produira au bout de ce temps sur le volant une vitesse V plus grande que la vitesse V_1 correspondant au régime ordinaire de la

machine. Donc $\frac{P}{g}(V^2 - V_1^2)$ sera l'accroissement de force vive du volant, et il sera égal à $2 \times 3 \times 75 \cdot t$. On aura donc

$$\frac{P}{g}(V^2 - V_1^2) = 2 \cdot 3 \cdot 75 \cdot t = 450 \cdot t;$$

imaginons qu'on veuille que la vitesse V n'excède pas V_1 de $\frac{1}{10}$, on posera $V = \frac{11}{10} V_1$, ou $V^2 = 1{,}21 \cdot V_1^2$; d'où

$$\frac{P}{g} \times 0{,}21 \cdot V_1^2 = 450t, \quad \text{ou} \quad PV_1^2 = \frac{981 \times 450t}{21}.$$

De cette relation rien n'est plus facile que de conclure le poids du volant. Au lieu de $\frac{1}{10}$ il sera bon de prendre pour l'excès de la limite $\frac{1}{15}$ ou $\frac{1}{20}$.

Quand, au lieu d'un moteur quelconque, la filature est mue par une machine à vapeur, on détermine le volant de cette dernière, indépendamment de la considération des métiers, et en faisant $n = 30$, pour rendre ce volant un peu puissant. Telle est au moins la méthode des Anglais. Nous croyons, au contraire, qu'il vaut mieux d'abord chercher ce premier volant, en faisant $n = 15$, et calculer ensuite un autre volant pour régulariser la machine filante. Si le poids de ce nouveau volant est plus considérable que celui de la machine à vapeur, c'est une preuve que n doit dépasser 15 et qu'il faut l'augmenter ; s'il est moindre, c'est une preuve qu'on doit se borner au premier volant de la machine à vapeur. La régularisation d'action dans les filatures est d'autant plus essentielle, que la perfection du travail en dépend.

S'il s'agit d'un moulin mû par une roue hydraulique, il n'y a point à établir de volant, parce que la meule agit symétriquement sur le grain et qu'elle fait elle-même fonction de cette pièce. Mais si le moulin marche au moyen d'une machine à vapeur, celle-ci n'aura pas besoin d'un volant à beaucoup près aussi puissant, et en général ce genre de machine doit être régularisé indépendamment de l'outil, sauf à régulariser ce dernier, si ses intermittences étaient trop fortes.

IX.

DES ENGRENAGES.

59. *Tracé des engrenages; conditions.* — Lorsqu'on se propose de transmettre le mouvement circulaire continu d'une manière uniforme et régulière, nous avons vu (3e partie, 26) que cette transformation pouvait s'opérer à l'aide de chaînes ou courroies enroulées sur des tambours. Mais quand les machines sont puissantes, il vaut mieux armer les couronnes de dents qui s'engrènent et conduisent les couronnes de la même manière que celles-ci roulaient l'une sur l'autre par simple contact primitif. Pour trouver les circonférences de deux roues destinées à rouler l'une sur l'autre, nous avons vu qu'il suffisait de connaître le rapport qui existe entre les nombres de leurs révolutions simultanées, ainsi que la position de leurs axes dont l'intervalle peut d'ailleurs être quelconque, et cependant tel que les diamètres des roues consécutives soient compris entre deux pieds et six pieds, parce qu'en effet en dehors de ces limites les roues exigent beaucoup de sujétion pour être exécutées. Enfin, si les axes sont parallèles (et c'est le cas dont nous nous occuperons d'abord), on partage leur intervalle CC' (fig. 370), en parties CT et $C'T$, réciproquement proportionnelles aux nombres de révolutions qui s'opèrent en même temps autour de ces axes, et on obtient ainsi les rayons des circonférences primitives. Si, maintenant, on monte des tambours égaux à ces circonférences sur les axes CC' de manière à se presser l'un et l'autre, et qu'on fasse tourner le premier autour de C, il entraînera l'autre tambour autour de C', et celui-ci décrira deux ou trois révolutions pendant que l'autre n'en décrira qu'une seule, selon que son rayon sera la moitié, le tiers, etc., du rayon du second. Pour remplacer ces tambours par des roues dentées dont les vitesses leur soient proportionnelles, les dents ne sont point placées sur les circonférences primitives, mais sur des couronnes intérieures à ces circonférences, et elles s'étendent au dehors de ces dernières. Chaque circonférence primitive est la séparation de ce qu'on nomme le *creux* et la *saillie* d'une dent,

Le tracé des engrenages est soumis aux conditions suivantes : 1° que les dents d'une même roue soient égales; 2° que leurs espacements soient les mêmes sur les deux roues; 3° que leur forme extérieure soit symétrique par rapport à la ligne milieu de chacune d'elles; 4° qu'elles ne se pressent point avant d'arriver à la ligne des centres *CC'*, ou plutôt que ce soit sur cette ligne que les dents commencent à se toucher; 5° enfin, que les courbes par lesquelles les dents se poussent ou se conduisent soient tellement tracées que les roues se conduisent avec des vitesses angulaires qui soient constamment dans un même rapport ou dans celui qui a lieu pour les circonférences primitives, si ces dernières se conduisaient par leur simple contact.

PREMIÈRE CONDITION. — La simplicité de la solution et la facilité de l'exécution matérielle des engrenages exigent que les dents d'une même roue soient toutes égales et disposées régulièrement autour de la couronne. Mais il n'est pas nécessaire que l'épaisseur, c'est-à-dire la dimension comptée sur la circonférence primitive, soit la même d'une roue à l'autre. Pour une roue en fer, la dent sera moins épaisse que pour une dent en bois : il faudra, au contraire, plus d'épaisseur aux dents de la roue qui tourne le plus vite, parce qu'elles sont plus exposées à l'usure.

DEUXIÈME CONDITION. — On nomme *pas* d'un engrenage la distance mesurée sur la circonférence primitive de la racine d'une dent à la racine de sa consécutive. Ce pas doit être le même non-seulement d'une dent à l'autre, mais encore sur les deux roues. Car, puisque l'engrènement est successif d'une roue à l'autre, ces dents se gêneraient réciproquement, si les espaces décrits simultanément par les circonférences primitives pendant l'engrènement n'étaient égaux entre eux. Il résulte de cette condition que les nombres des dents des roues sont proportionnelles aux diamètres des circonférences primitives, de sorte que l'une d'elles ayant, par exemple, 15 dents, l'autre en aura 30 si le rayon de celle-ci est double de celui de la première. C'est ordinairement sur ces circonférences primitives, dites aussi circonférences *de passes*, que la division s'effectue, et nous reviendrons sur les méthodes les plus convenables à cet effet. Nous ferons remarquer qu'une dent pendant son engrènement avec une roue se trouve logée entre deux dents de celle-ci, et qu'elle a besoin d'un certain jeu qu'on réduit au douzième de l'épaisseur des dents pour des roues bien faites et à un sixième pour des roues

plus grossières. L'intervalle vide entre deux dents d'une roue équivaut, par conséquent, à l'épaisseur des dents de l'autre roue, augmentée du jeu, en sorte que le pas est égal à la somme des épaisseurs de chaque dent de l'une et l'autre roue plus le jeu.

TROISIÈME CONDITION. — Comme il arrive souvent dans les machines, que les roues ne tournent pas toujours dans le même sens, il faudra que chaque dent soit terminée symétriquement par deux courbes semblables, afin qu'elle soit propre à conduire les dents de l'autre, ou à en être conduite indifféremment.

QUATRIÈME CONDITION. — Lorsque les dents de deux roues s'approchent de la ligne des centres CC', ces dents vont à l'encontre l'une de l'autre. Lorsqu'au contraire ces dents engrenées s'éloignent de CC', elles tendent à s'écarter. D'après cela, conformément à la 4e condition, il faut faire en sorte, autant que possible, que les dents ne commencent à se pousser qu'à partir de l'instant où elles sont arrivées à la ligne des centres CC'. On évitera ainsi l'effet des aspérités et des arcs-boutements, en vertu desquels deux dents viennent à se froisser ou à se heurter en avant de la ligne des centres, en présentant la pointe ou la tête, et se brisent si elles ne suspendent entièrement le mouvement. La forme des dents n'est, en général, point arbitraire ; jamais on ne leur donnera celle d'une courbe concave, ou d'un carré ou d'un trapèze, non pas parce que les roues ne sauraient encore se transmettre le mouvement uniforme, mais bien à cause des arcs-boutements dangereux qui résulteraient si deux dents de cette espèce se rencontraient avant la ligne des centres. On voit, en effet, qu'en A (fig. 371), où le sommet commun des dents tend à se rapprocher de CC', il est impossible que le mouvement se continue sans qu'il y ait rupture, parce que la somme des distances $CA + CA'$ est $> CC'$. Au delà de la ligne des centres, où l'angle B tend à s'ouvrir, le mouvement peut s'opérer librement.

CINQUIÈME CONDITION. — Les dents doivent toujours avoir une forme arquée qui leur permette de se mettre en tangence l'une à l'autre dès qu'elles sont en prise. On tient de plus à cette condition dans le tracé des faces qui se poussent, que la vitesse d'une roue soit transmise à l'autre dans un rapport constant, afin que les engrenages soient bien déterminés. Mais on y satisfait encore d'une infinité de manières. Car on peut se donner à volonté la courbe des dents de l'une des roues, de la roue C, et on trouvera toujours pour l'autre

C une courbe analogue qui sera conduite uniformément par la première, ou comme si les deux roues roulaient par leurs cercles primitifs. En effet, si $a'mb'$ (fig. 372) est la courbe attachée à la couronne de C', et que amb soit la courbe correspondante sur l'autre roue, cette dernière courbe devra être constamment touchée par la première pendant que les deux cercles C et C' tournent simultanément, ou bien encore, ce qui revient au même, pendant que le cercle C demeure fixe, l'autre C' roule autour de la circonférence primitive du premier, en roulant lui-même sur son propre cercle primitif. Dans ce dernier mouvement la courbe $a'mb'$ changera de place, et de point de contact avec la courbe amb, de sorte que cette dernière sera précisément l'enveloppe de toutes les positions de la première. Si on fait attention que, dans le roulement du cercle C' autour du cercle C demeuré fixe, tous les points du cercle C', ainsi que ceux de la courbe $a'mb$, décrivent de petits arcs élémentaires autour du point de contact T des deux cercles primitifs, et que les éléments de contact des deux courbes de dents se confondent avec l'un de ces arcs, c'est une preuve que les normales communes à l'une et l'autre dent pendant qu'elles se touchent, doivent passer par le contact des deux circonférences primitives.

60. *Méthode générale pour le tracé des courbes des dents.* — Lorsque, se donnant la courbe des dents de l'un des cercles, on veut trouver la courbe correspondante sur l'autre cercle, la question est susceptible de se résoudre physiquement. Prenez en effet deux cercles de planches, égaux aux circonférences primitives, que vous appliquerez tangentiellement l'un à l'autre sur la surface d'un plan. Armez le cercle dont la courbe est donnée d'un *patron* ou modèle égal à cette courbe, et fixez l'autre cercle invariablement. C'est autour de ce cercle que vous ferez rouler le cercle qui porte un patron, vous rendrez d'ailleurs ce mouvement non susceptible de glissement, 1° en liant les deux centres par une verge ayant un jeu autour des axes de ces centres ; 2° en enveloppant le cercle mobile d'une bande de parchemin dont les extrémités sont fixées sur les circonférences de ces cercles. Quand le mouvement sera donné au cercle mobile, tracez sur le plan ou table avec un crayon toutes les positions du patron, et l'enveloppe de toutes ces positions vous représentera la courbe de la dent du cercle fixe. Mais un pareil sys-

tème devient d'une exécution trop difficile pour en espérer une exactitude suffisante.

Voici un procédé graphique qui s'applique à tous les patrons de dents imaginables donnés à l'un des cercles. Soit *aTb* (fig. 373) la courbe du patron fixée au cercle *C*, et *a't'b'* la même courbe embrassant entre elle et la première sur la circonférence primitive de *C* un arc de cercle *Tt'*, égal au pas de l'engrenage. Soit de même *Tt* le même pas sur la circonférence primitive *C*; ici on suppose que les dents des deux roues se pousseront à partir de la ligne des centres. Ainsi on a arc *Tt'* = arc *Tt*. On divisera ces deux arcs en un même nombre de parties égales, en 3 par exemple; nous aurons sur le premier les points de division *T*, 1', 2' et *t'*, et sur le deuxième arc *Tt* les points de division *T*, 1, 2 et *t*. Maintenant de *T* comme centre on décrira un arc de cercle dont le rayon est la plus courte distance de ce point à la courbe *a't'b'*. Cette plus courte distance est donnée par une ouverture de compas telle que l'arc de cercle touche la courbe sans la couper. Cherchez de la même manière la plus courte distance de la division 1' sur l'arc *Tt'*, à la courbe *a't'b'*, et du point 1 correspondant sur l'arc *Tt*, décrivez avec cette plus courte distance un nouvel arc de cercle. De même, du point 2 de cet arc *Tt* décrivez un troisième arc de cercle dont le rayon est donné par la plus courte distance de la division 2' à la courbe *a't'b'*. Sachant en outre que la courbe de dent cherchée pour le cercle *C* doit passer par le point *t*, on n'aura plus qu'à tracer l'enveloppe à tous ces arcs de cercle ainsi obtenus.

En pratique, on peut se contenter de diviser les deux pas des cercles primitifs en deux parties égales, de tracer deux arcs de cercle, et de faire passer la courbe par le point *t* et tangentiellement à ces deux arcs. Veut-on agir plus simplement encore? cherchez l'intersection *i* de la première normale *Ti* (fig. 374) avec la courbe *a't'b'*; joignez *t*, et par le milieu *n* de cette droite, élevez une perpendiculaire *no* qui coupe le cercle primitif *C* en *o*. Ce point *o* sera le centre d'un cercle ayant pour rayon *oi* = *ot*, et l'arc décrit représentera d'une manière suffisamment exacte la courbe de la dent du cercle *C* qui doit conduire la courbe donnée du cercle *C'*. En y réfléchissant, on verra sans peine que ce procédé est fondé sur ce que la ligne qui joint le contact des dents au point de contact *T* des circonférences primitives, est, comme nous l'avons fait voir, en même temps

une normale commune aux courbes des deux dents en prise.

61. *Divisions des circonférences primitives.* — La plus grande difficulté consiste à obtenir sur chaque circonférence primitive les points de division dont l'intervalle constitue le pas. En se rappelant d'abord que les nombres de ces points sont proportionnels aux rayons des cercles primitifs, on connaîtra d'abord en combien de parties ces circonférences doivent être partagées pour satisfaire aux conditions du mouvement. Si ces nombres sont des multiples de 3, de 4, de 5, et de 6, on partagera d'abord les cercles dans le nombre de parties indiqué par l'un de ces derniers facteurs, et cela à l'aide des procédés que la géométrie enseigne; puis on agira séparément sur chacune de ces grandes divisions, de manière à avoir les nombres de dents voulus sur les cercles primitifs. En général, r étant le rayon de l'un d'eux, $2\pi r$ sera sa circonférence; et si le nombre des dents doit être 17, 31 ou n, l'arc qui mesurera le pas de l'engrenage sera représenté par $\frac{2\pi r}{17}$, ou par $\frac{2\pi r}{31}$, ou enfin par $\frac{2\pi r}{n}$. La difficulté n'est pas ici d'avoir l'arc, mais plutôt la corde qui le sous-tend. On y parviendrait en divisant 360 par 17, par 31, ou par n, et le quotient représenterait le nombre de degrés d'un tel arc, de sorte qu'avec un rapporteur, on pourra marquer sur chaque cercle primitif les points de division. Mais les rapporteurs ne sont jamais assez divisés pour que l'opération se fasse avec précision. Connaissant les angles au centre de ces arcs, on pourrait encore employer une table de cordes. Mais de tous ces moyens, le meilleur est le suivant quand l'arc est fort petit, ainsi que cela arrive à l'égard du pas des dents. Désignons par s le quotient $\frac{2\pi r}{n}$, la corde qui sous-tend cet arc est égal à $s\left(1-\frac{1}{24}\cdot\frac{s^2}{r^2}\right)$. Ce calcul fait, donnera le degré d'ouverture de compas pour tracer le pas sur chaque circonférence primitive.

62. *Des courbes génératrices dans les engrenages.* — Nous appellerons courbe génératrice celle que, dans un engrenage, on se donne sur une des deux roues, pour en déduire la courbe convenable à chaque dent de la roue qui doit engrener avec la première. Toutefois, le nombre des courbes génératrices employées dans la pratique est fort petit; ces courbes sont (fig. 375) : 1° Un cercle

entier dont le centre est sur la circonférence primitive de la couronne à laquelle il est attaché ; 2° une droite dirigée au centre de la couronne ; 3° la développante dont le tracé s'obtient en divisant le cercle dont elle dérive en une infinité de parties égales très-petites, en menant des tangentes par chaque point de division égales en longueur à la somme des divisions comprises entre les points de contact et celui d'origine de la courbe, et en faisant passer une courbe par les extrémités de ces tangentes. Cette courbe est d'ailleurs engendrée par l'extrémité d'un fil tendu qui se déroule le long d'une circonférence. Les formes des dents correspondantes d'une roue pour les trois espèces de courbes génératrices fixées à celle qui engrène avec elle, s'obtiendraient aisément à l'aide du tracé indiqué dans le précédent numéro.

63. *Lanterne à fuseaux cylindriques.* — On appelle lanterne une petite roue armée de *cylindres* ou *fuseaux* parallèles à l'axe dont la section est un cercle, et dont les axes sont sur la circonférence primitive de la roue ; ces fuseaux s'assemblent par les extrémités sur deux *plateaux* ou *tourteaux* (fig. 876). Pour tracer les dents de l'autre roue, on disposera la lanterne *C* (fig. 877) de telle sorte que l'un de ses fuseaux touche la ligne des centres au point *T* de contact des cercles primitifs ; ce point sera aussi la racine de la dent qui doit saisir le fuseau sur la ligne des centres ; et si *Tt* est le pas de la roue *C* sur sa circonférence primitive, le point *t* sera également la racine de la dent qui doit quitter un fuseau de la lanterne lorsque celui qui le suit doit être saisi dans la ligne des centres. Joignons le point *T* au centre *a* du fuseau en avant, la droite *Ta* sera une normale au cercle de ce fuseau, et, par conséquent, *Tb* la plus courte distance du point *T* à ce cercle. Par le point *t* et le point *b* nous ferons passer un cercle dont le centre se trouve sur la circonférence *C* en *o* : on aura ainsi la courbe de dent qui doit conduire un fuseau ; le point *b* sera en outre la saillie de cette dent, parce que, si elle était plus courte, la dent quitterait le fuseau qu'elle a engrené, avant que le fuseau consécutif ne fût parvenu dans la ligne des centres où il doit être en prise. Ainsi, l'arc décrit du point *C* comme centre, et d'un rayon égal à *Cb*, limitera extérieurement les dents de la roue *C*. Il est entendu que le pas de l'engrenage a été réglé d'après le diamètre des fuseaux, l'épaisseur des dents et le jeu qu'on juge convenable. Cette épaisseur étant

d'ailleurs mesurée sur la circonférence primitive, rien n'est plus facile que de terminer la dent par une courbe égale et symétrique à celle qu'on vient de trouver. Les dents ne s'étendent ici que jusqu'à la circonférence primitive de *C;* on les termine au dedans de cette circonférence par un creux où les fuseaux puissent se loger avec un jeu d'autant moindre que la matière de la roue est plus dure. Ces creux sont définis soit par des courbes arbitraires, soit par des rayons qui partent des racines de deux dents consécutives.

Dans les *crics,* le mouvement se transmet par l'engrènement de la lanterne; mais comme elles sont fort petites, les fuseaux (fig. 378), au lieu de s'appuyer sur des tourteaux, sont liés au centre de rotation par des bras arbitraires qui n'enveloppent pas les points de *touche* des dents contre ces fuseaux.

On remarquera qu'en conservant le tracé précédent, une lanterne ne peut conduire une roue qu'en poussant ses dents avant l'arrivée sur la ligne des centres; si on voulait que l'action du fuseau sur la dent eût lieu encore à partir de la ligne des centres, il faudrait que la dent eût une forme concave du côté du fuseau qui la conduit, ce qui n'est pas admis en pratique. On doit donc éviter de faire conduire une roue par une lanterne. Les fuseaux des lanternes frottant plus souvent que les dents, leur diamètre doit être des $\frac{4}{5}$ aux $\frac{5}{5}$ de l'épaisseur de ces dernières, supposées de même matière. Les fuseaux ne doivent avoir que la longueur nécessaire pour le jeu des dents entre les plateaux de la lanterne. Il n'y a que la simplicité de construction qui puisse faire adopter les lanternes dans les machines, attendu leurs divers inconvénients. Un des plus graves c'est que le point de contact de la dent avec le fuseau ne varie presque pas sur le fuseau, tandis que le contraire arrive sur la dent; le frottement ne s'exerçant, par conséquent, que sur l'étendue d'un très-petit arc sur les fuseaux, ceux-ci s'useraient très-promptement, s'ils n'étaient construits en fonte. Les fuseaux mobiles autour de leur axe sont très-défectueux; ils acquièrent du jeu à la longue et occasionnent des secousses.

Si, dans les constructions ci-dessus, on suppose que le rayon de la lanterne devienne infini, on aura le cas d'une crémaillère droite avec fuseaux cylindriques (fig. 379); le centre de tous les fuseaux est la ligne primitive de la crémaillère, et la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre sur cette droite équivaut au rayon de la circonférence primitive du cercle destiné à engrener avec cette

crémaillère. Il est facile de voir que la forme des dents de la roue est une développante; car cette courbe serait engendrée par la droite primitive des fuseaux en roulant autour de la circonférence primitive de la roue. On voit encore que, d'après les raisons déjà spécifiées, on ne doit employer ce système qu'autant que ce serait la roue qui conduirait la crémaillère.

Lorsqu'au contraire une crémaillère est destinée à conduire une lanterne, le tracé des dents de cette crémaillère droite s'effectue absolument de la même manière que pour une roue; la courbe obtenue par la méthode générale devient une *cycloïde* dont la génération est due à un point d'une circonférence qui roule sur une droite. On tracera d'abord le cercle primitif de cette lanterne, c'est-à-dire celui qui contient les centres des fuseaux (fig. 380); une tangente à ce cercle sera la ligne primitive de la crémaillère, et devra contenir les naissances des dents de cette dernière. La profondeur des creux de la crémaillère sera déterminée par une droite parallèle à la ligne primitive, et passant à une distance égale au jeu qu'on veut donner. La saillie des dents sera enfin fixée par la condition que chacune d'elles abandonne un fuseau, au moment où la consécutive saisit un nouveau fuseau. Ce système est quelquefois employé (par exemple, dans les scieries) pour faire mouvoir une crémaillère, à dents courbes, par une lanterne; mais cela est défectueux, attendu qu'ici, comme dans le cas général, les fuseaux ne peuvent pousser les dents qu'en avant de la ligne des centres. Si on voulait que ces fuseaux n'agissent encore qu'à partir de la ligne des centres, il faudrait donner aux dents une forme concave, ainsi qu'il a déjà été expliqué plus haut.

64. On appelle *pignon* toute roue où la génératrice adoptée pour ses dents est une droite convergente au centre (fig. 381). Les dents d'un pignon ne sont autre chose que des prismes renfermés entre deux rayons, et qui se terminent extérieurement à la circonférence primitive de ce pignon. Ces droites sont ainsi limitées parce qu'elles doivent être conduites par les dents de l'autre roue; mais, pour ne pas laisser d'*arête vive* à la partie extérieure des flancs, on les termine du côté de la circonférence primitive par un arc de cercle peu bombé. Quant au tracé des dents, il s'effectue en cherchant l'enveloppe de plusieurs arcs de cercle, dont les centres sont sur les divisions du pas de l'autre roue et dont les rayons sont égaux

aux plus courtes distances des divisions correspondantes du pas du pignon à la droite génératrice de sa dent. Si les dents de la roue doivent être courtes, on se bornera à un seul arc de cercle. En un mot, le tracé s'effectuera par la méthode générale indiquée au n°59, et en admettant que le pignon ne doit être poussé qu'à partir de la ligne des centres. Mais il en est ici du pignon comme de la lanterne; ce pignon doit être conduit par l'autre roue. Si le contraire arrive, et qu'il soit lui-même destiné à conduire la roue, il faudra alors armer ce pignon de dents qui devront la pousser en agissant contre des flancs droits pratiqués sur cette roue et convergents à son centre. On s'arrangera de manière que cette action ne commence qu'à partir de la ligne des centres. C'est même quand deux dents se pousseront sur la ligne des centres, qu'on fixera le creux de l'une et l'autre roue au moyen d'un creux suffisant qui empêche que le creux ne soit atteint par la pointe des dents engagées. Enfin, les saillies seront telles que chaque dent conduise le flanc de l'autre roue jusqu'au moment où les deux dents suivantes se trouveront sur la ligne CC'.

On passe aisément du cas général qui précède à celui d'une crémaillère, en supposant infini le rayon de la circonférence primitive du pignon; les flancs de ce dernier deviennent alors perpendiculaires à la direction de la crémaillère et se terminent extérieurement à sa ligne primitive. Le cercle primitif de la roue est tangent à cette dernière ligne, et ses dents sont des développantes produites par le roulement de la droite AB (fig. 382) autour du cercle C. Si on veut que la crémaillère conduise à son tour la roue C, on armera la crémaillère de dents courbes, et la roue C de flancs droits assez creux pour que les dents de la crémaillère n'y soient pas arrêtées par leur pointe.

65. *Tracé des cames en général.* — Les considérations précédentes sont applicables aux cames qui soulèvent les pilons, ou à celles qui agissent sur des leviers mobiles autour de points fixes. Le premier cas est celui d'une roue qui conduit une crémaillère, et le deuxième celui d'une roue qui conduit ce pignon. Mais comme les cames doivent conduire longtemps, et que leur développement est beaucoup plus grand que celui des dents d'un engrenage, on conçoit pourquoi leur tracé doit être plus rigoureux que celui de ces dernières.

1° *Came de pilon.*—Une tige verticale *L* (fig. 383) porte en saillie un mentonnet *BE*, que soulève une came, ou courbe, fixée à une circonférence primitive tangente à la droite verticale *AB* décrite par l'extrémité du mentonnet. Toutefois, le véritable cercle qui porte la came doit être *en retrait* avec un certain jeu en arrière du cercle primitif. Maintenant, pour que le mouvement de l'arbre *C* transmette son mouvement uniforme au mentonnet, il faudra tracer la came comme on en agit d'après la méthode générale. Le chemin parcouru par le mentonnet devra être égal au chemin décrit sur la circonférence primitive, en sorte que la courbe de cette came sera une développante dérivée de la circonférence primitive tangente à la droite *AB*. *T6* (fig. 384) étant la hauteur verticale dont le mentonnet doit être soulevé à partir de la ligne des centres, on cherchera l'arc *T6'* que doit décrire la circonférence primitive pendant le soulèvement; on partagera la hauteur *T6* et le pas *T6'* dans le même nombre de parties égales; l'enveloppe des cercles décrits avec les rayons *6T*, *5T*, *4T*, etc., et des points *T*, 1', 2', 3', etc., sera la courbe cherchée, qui n'est autre qu'une développante. Tantôt la came est pleine et armée d'un tenon pour être fixée sur la roue qui doit la porter (fig. 385); tantôt elle est évidée (fig. 386); tantôt enfin c'est une simple lame courbe (fig. 387).

2° *Came d'un levier mobile.* — Supposons un levier *AT* (fig. 388) mobile autour de l'axe *C*, et destiné à imprimer un mouvement uniforme à la tige *AB* d'un piston. Imaginons que le levier *AT* doive en outre recevoir son mouvement de l'arbre *C'*; on demande quelle sera la forme de la came de ce dernier. On supposera d'abord qu'à la position initiale du levier *AT*, son mentonnet *TO* soit sur la ligne des centres *CC'*. Connaissant la vitesse de rotation du levier *AT* d'après les conditions du problème, ainsi que celle de l'arbre *C'*, on partagera d'abord l'intervalle *CC'* en deux parties *CT* et *C'T*, réciproquement proportionnelles à ces vitesses; ces parties seront les rayons des deux cercles primitifs tant du levier que de l'arbre; le mentonnet du premier est ici une droite dirigée vers *C*. Si la position la plus basse du levier correspond à l'instant où le mentonnet prend la position *Ct*, on partagera l'arc primitif *Tt* en un certain nombre de parties égales très-petites, en quatre, par exemple; on portera ces mêmes parties de *T'* en *t'* sur le cercle primitif de l'arbre; puis on tracera l'enveloppe de tous les arcs décrits des points *T*, 1, 2,

3, t' de l'arc Tt' comme centres avec des rayons égaux aux plus courtes distances des points de division de l'arc $Tt(T, 1', 2', 3', \ldots)$ à la droite Ct. La courbe $o't1''2''3''. \ldots$ sera la forme cherchée de la came, en tant que celle-ci transmettra le mouvement uniforme au levier AT. L'amplitude OT du mentonnet sera obtenue en rapportant l'extrémité o' de la courbe par un arc de cercle sur la ligne CT en O.

Quand la came doit rester peu de temps en contact, ainsi qu'il arrive pour les marteaux à choc, la forme de la came est indifférente, et il est inutile de chercher à rendre momentanément le mouvement uniforme, parce que le choc détruit la régularité du mouvement. A la vérité, dans les deux exemples précédents, il y a également choc ; mais la came conduit longtemps, et d'ailleurs on a le soin de rendre la vitesse du mouvement très-faible.

66. *Tracé des cames dans le cas où l'on veut éviter le choc.* — Quand on veut éviter le choc, il n'est plus possible de satisfaire à la condition de l'uniformité du mouvement. Il suffit de faire en sorte que la came et le mentonnet se prennent et se quittent tangentiellement à la direction du mouvement de l'arbre moteur qui porte la came. Si, par exemple, l'arbre C (fig. 389) doit faire tourner le levier CD sans choc, et l'abaisser jusqu'à la position CD', on disposera l'arbre C très-près de la position initiale du levier, et la perpendiculaire Ca donnera le point a de contact de la came avec la face supérieure du levier. De même, en abaissant la perpendiculaire Cb pour la position extrême du levier, le point b sera le point de contact d'*échappée* de la came. Mais on connaît aussi l'angle aCb' que décrit l'arbre C pendant que le levier passe de CD en CD' : si donc on rapporte le point b en b' sur le rayon Cb' qui fait avec Ca l'angle décrit par l'arbre, on aura les deux éléments extrêmes de la came.

Un système analogue s'emploie pour faire mouvoir un pilon sans choc ; le montant du pilon est fendu par une disposition moisée (fig. 390) et semblable à celle du n° 28, afin de laisser passer la came. Ici la vitesse du mentonnet est nulle à l'instant où il est saisi par la came, mais elle croît progressivement. On pourrait donc encore se proposer de tracer la came de façon que la vitesse du mentonnet ou du levier soit accélérée suivant une loi donnée. On voit à l'avance que plus la came sera courbée, plus la vitesse variera avec douceur. Si on veut que la vitesse soit éteinte à l'instant

où la came abandonne, il suffira, comme nous l'avons fait, que la came soit encore tangente à l'extrémité du mentonnet ou du levier. On aura soin, tout en donnant beaucoup de courbure à la came, que le mentonnet ou le levier, en s'échappant, ait le temps d'arriver à sa position de repos avant que la came suivante soit arrivée en contact, autrement il y aurait choc et une partie de la course anéantie. C'est par cette raison qu'on enlève de la came en arrière tout ce qui pourrait s'opposer au mouvement du mentonnet ou du levier devenu libre. Ces dispositifs de cames où l'on cherche à éviter le choc ont, pour le cas des leviers, l'inconvénient que, vers la fin du contact, il y a repos ou interruption ; parce que l'extrémité b de la came doit parcourir le bout bD' du mentonnet (figure du levier) qui a déjà été parcouru pendant la durée de la rotation du levier. Mais cet inconvénient est insensible, lorsque le centre de rotation C' de l'arbre est très-éloigné de l'extrémité des cames ; car la perpendiculaire bD' diffère d'autant moins de l'arc décrit par l'extrémité b de la came que la longueur $C'b$ est plus grande relativement à bD'.

67. *Engrenage à développantes.* — On se donne la développante $a'mb'$ (fig. 391) d'un certain cercle $C'K'$ assez peu distant de sa circonférence primitive, développante qui est la courbe d'une dent fixée au cercle dont C' est le centre ; je dis que l'autre courbe du cercle primitif en C qui touche le cercle primitif C' en T sera une autre développante amb, tangente à la première en un point m sur la normale commune KK' passant par T, et que cette développante amb appartient au cercle CK touché par la normale KK', et concentrique au cercle primitif C. C'est ce qu'il serait facile de reconnaître en employant encore le procédé du n° 60, pourvu qu'en prolongeant les points de division des circonférences primitives en avant et en arrière de la ligne des centres, et au delà du point où la courbe $a'mb'$ rencontre son cercle primitif. Mais il est plus simple d'avoir recours à cette propriété que la courbe amb est aussi une développante. Voici comment on peut la démontrer. Toutes les normales à la développante $a'mb'$ sont tangentes au cercle $C'K'$; on sait en outre que l'autre courbe cherchée amb touche continuellement $a'mb'$ en des points m tels que la normale commune KK' en chacun de ces points passera par T, point de contact des cercles primitifs. Donc ces normales communes se

confondront toutes avec la tangente invariable TK' au cercle CK', ou avec la tangente au cercle CK, ou bien encore avec la tangente commune aux deux cercles CK' et CK. Partant aussi, les normales à la courbe amb se confondront aussi successivement avec la tangente TK de ce dernier cercle ; ce qui n'appartient qu'à une développante produite par l'enroulement d'un fil Kpa de K en a autour du cercle CK. On peut d'ailleurs démontrer, réciproquement, qu'en prenant pour courbes de dents les développantes amb et $a'mb'$ des cercles CK et CK', tangents à une droite KK' passant constamment par le point de contact T des cercles primitifs, la condition de l'uniformité de mouvement est satisfaite, car les tangentes mK et mK' étant, d'après la propriété des développantes, toujours égales aux arcs aK et $a'K'$, on voit que a cheminera autant que a'. Mais on a la proportion

$$CK \ : \ CK' \ :: \ CT \ : \ CT'.$$

Donc les circonférences primitives, décrivant des arcs proportionnels à ceux que décrivent les cercles CK et CK', décriront elles-mêmes simultanément des arcs égaux.

Voici maintenant une propriété particulière aux dents à développante. Nommons P l'effort sur l'une et l'autre roue suivant la tangente en T, à leurs cercles primitifs; N la pression normale exercée par les deux dents suivant la direction invariable KK'; il y aura, à cause du mouvement uniforme, équilibre entre l'effort P et la résistance N : autrement dit, le moment de la puissance $P \times CT$ sera égal au moment de la résistance $N \times CK$; d'où l'on tire

$$N = P \times \frac{CT}{CK}.$$

Mais le rapport $\frac{CT}{CK}$ est constant en vertu de la propriété géométrique des développantes, P reste le même à cause du mouvement uniforme. Ainsi la pression N demeure constante dans tous les points de contact de deux dents à développantes. Voilà pourquoi le frottement qu'elles exercent l'une contre l'autre est toujours le même. Cependant il n'en résulte pas que les dents s'useront régulièrement, comme il a été dit à tort pour la première fois dans le cours de mécanique de l'École d'application, et comme d'autres

auteurs l'ont répété depuis. Car les dents qui auraient la propriété de s'user également dans tous leurs points sont celles pour lesquelles le travail du frottement serait constant, et il faudrait que les arcs de glissement fussent égaux pour l'une et l'autre de celles qui engrènent ensemble. Or, il arrive qu'à la racine les arcs ou chemins parcourus sont plus petits qu'à la pointe. Donc les dents à développantes tendent aussi davantage à s'user à la racine qu'à la pointe. Toutefois, comme la pression est constante sur ce genre de roues, elle est nécessairement moindre que la plus grande des pressions variables exercées sur les autres espèces de dents, cette plus grande pression aura nécessairement lieu, d'après ce qui précède, toujours à la pointe, et c'est un inconvénient d'autant plus réel qu'à cet endroit il y a plus de chances à la rupture.

Pour trouver la limite des creux des dents, il faut considérer deux dents sur la ligne des centres CC', parce qu'en cet endroit les dents se croisent le plus possible. Les saillies des dents de la roue conductrice et de la roue conduite, sont déterminées par les intersections m et m' (fig. 392) de la normale invariable commune avec la dent antérieure et la dent postérieure de la roue qui conduit. Toutefois ces dents prendront toujours avant la ligne des centres et d'autant plus en avant que la normale commune est plus inclinée par rapport à cette dernière ligne. Si on voulait que les dents de la roue C ne prissent celles de la roue C' que sur la ligne des centres, il faudrait arrêter la saillie de ces dernières à la circonférence primitive C' à laquelle elles appartiennent, et ce serait la roue C qui conduirait la roue C'.

68. *Engrenage des roues d'angle.* — Passons aux engrenages coniques ou des roues d'angle ; toute la difficulté consiste à transporter dans l'espace ce que nous avons dit pour le cas du plan. La position des axes (3e partie, 26) CS et $C'S$ (fig. 393) étant fixée, nous avons dit (3e partie, 26) qu'il fallait diviser l'angle CSC' compris entre eux en deux autres CST, $C'ST$ par une droite ST, telle que les perpendiculaires TC et TC' soient réciproquement comme les vitesses de rotation à imprimer à ces axes. En faisant tourner ces angles autour des axes respectifs qui leur correspondent, on a vu qu'on obtenait ainsi les cônes primitifs se touchant suivant l'arête commune ST. Cela posé, tout ce que nous avons pu dire pour le cas des roues comprises dans un plan, sera applicable à

l'espace, pourvu qu'on remplace les lignes dont il a été question par des plans passant par le sommet S des cônes primitifs, et les lignes courbes par des cônes ayant ce même point pour sommet. On remarquera que les couronnes ou jantes $ADBT$ et $BTFG$, qui portent des dents ou fuseaux, sont et doivent être en général terminées, du côté opposé au sommet S des cônes, par d'autres surfaces coniques $DEHT$ et $TGKI$, dont les sommets S_1 et S_1' sont sur les axes SC et SC' des roues, et dont les arêtes S_1T et $S_1'T$, comprises dans le plan de ces axes, sont perpendiculaires à l'arête de contact ST des cônes primitifs, en sorte qu'elles forment le prolongement de l'une et l'autre, et sont comprises dans le plan perpendiculaire à ST et tangent à la fois aux cônes S_1 et S_1' : c'est sur la surface de ces cônes qu'on applique les panneaux des dents et qu'on vérifie le tracé général de l'engrenage. Or, je remarque que, vu le peu d'étendue qu'occupe sur ces cônes, le profil de la courbe d'une dent et de celle qui la conduit, on peut, sans erreur sensible pour la pratique, regarder les petites portions des surfaces coniques S_1, S_1', correspondantes à ces dents, comme se confondant avec le plan tangent S_1TS_1' lorsqu'elles se poussent en T, où a lieu leur contact mutuel.

Développons donc les deux surfaces de cônes $DETH$ et $TGKI$ sur le plan tangent dont il s'agit. Ce développement n'offre aucune difficulté, puisqu'on a la longueur des arêtes S_1T et S_1H pour l'une, et celle des arêtes TS_1' et IS_1' pour l'autre. On connaît aussi le périmètre des bases DT et GT. On observera d'ailleurs que, dans ce développement, les longueurs dans le sens des arêtes et les largeurs dans le sens des cercles méridiens concentriques aux sommets, ne sont nullement altérées. De cette manière on ramènera de suite le problème des engrenages coniques à celui des engrenages cylindriques ou sur un plan, car les cercles primitifs DT et TG sur la surface des cônes seront devenus des arcs de cercle TM et TN sur le développement, tangents entre eux et qu'on pourra regarder comme les cercles *primitifs* de deux roues planes à tracer par les méthodes ci-dessus, selon le genre d'engrenage que l'on désire adopter. On aura aussi obtenu tous les panneaux nécessaires pour tracer les dents sur la surface des cônes limites S_1 et S_1' ; d'après quoi l'on exécutera facilement les dents tout entières. Ces dernières ayant une certaine saillie au delà des cercles primitifs du développement, on portera cette saillie de D en P pour l'un des

cônes primitifs et de G en Q pour l'autre, les couronnes premières devront ainsi être terminées par les profils EPS_1 et $R'QK$, afin qu'il devienne possible d'y entailler les dents entières de chaque roue d'angle. On pourra d'ailleurs préparer un nouveau panneau développé pour les surfaces coniques U_1 et U_1', qui terminent intérieurement les couronnes du côté du sommet S; ces cônes ont leurs arêtes parallèles à celles des premiers cônes limites, et donnent pour les dents des profils ou figures exactement semblables, en sorte qu'il suffira, comme l'indique la figure 393, de réduire les premiers panneaux dans le rapport de ST à SB.

69. *Exécution des engrenages.* — Lorsque les dents des deux roues d'engrenage se prennent avant la ligne des centres, ou quand leurs divisions, leurs formes ont été tracées par des ouvriers inhabiles, il peut se produire des arcs-boutements, et par suite des ruptures, si ces dents ne sont pas susceptibles de résister aux efforts que les deux roues exercent l'une contre l'autre. Pour obvier aux inconvénients de l'arc-boutement, les anciens praticiens ont cherché à faire en sorte que les dents ne puissent jamais se prendre que sur la ligne des centres, ou même après, et ils ont eu l'idée d'agrandir un peu le rayon de la roue qui conduit, sans augmenter pour cela le nombre des dents qui convient à son rayon primitif. De cette manière il n'y avait qu'une seule dent de cette roue en prise avec une dent de la roue conduite, tant que la première poussait la seconde, toutes les autres dents de la roue conductrice demeuraient en arrière des autres dents de la seconde roue. Les deux dents se quittant seulement après la ligne des centres et au moment où la dent consécutive de la roue conduite avait son flanc inférieur dans cette ligne, ce n'était aussi qu'au delà de cette ligne que deux nouvelles dents pouvaient se saisir. Mais il arrivait que le mouvement de la roue qui conduisait l'autre, s'accélérait et parcourait un certain intervalle qui la tenait en arrière de celle qu'elle devait saisir, et qui est à peu près égal à la différence des pas de dent des roues. On voit ainsi que cette accélération produisait un choc, ou que chaque dent conductrice arrivait sur chaque dent conduite avec une vitesse acquise; mais c'était remplacer l'inconvénient de l'arc-boutement par un autre pour le moins aussi grave.

Un second moyen consistait à monter sur leurs tourillons les

roues dentées, à les faire engrener entre elles, et à corriger avec la lime les endroits défectueux ; ce ne serait plus alors la peine de porter tant de soin au tracé des engrenages pour le déformer ensuite d'une manière si arbitraire.

Aujourd'hui on procède avec plus de rigueur. Les modèles ou *moules* dans lesquels les roues en fonte sont coulées, donnent d'abord à celles-ci des dents un peu plus épaisses. Quand les roues sont revenues de la fonderie, on les monte sur un arbre bien concentriquement, ce dont on s'assure au moyen d'une pointe fixe qui, touchant l'extrémité d'une première dent, doit ensuite toucher celles de toutes les autres. La roue étant bien posée et bien établie, on la fait tourner avec son axe, pour en dresser le *plat* autour. Après quoi on marque sur ce plat la circonférence primitive. C'est sur cette dernière qu'on opère avec précision la division dont les points représentent les lignes milieux des dents. Ces points milieux servent de repères à un patron métallique qui porte plusieurs dents d'une forme parfaitement régulière et qu'on présente à la roue de telle manière que les milieux des dents du patron coïncident avec les divisions de la circonférence primitive. Enfin, on trace sur le plat, avec une pointe d'acier qui suit les contours du patron, et on enlève soit au ciseau soit à la lime les parties excédantes, selon qu'elles sont plus ou moins considérables. En général, dans les modèles qui servent au coulage des roues, on laisse environ une ligne de *gras* aux dents.

Ce qui précède concerne les roues entièrement métalliques ; mais souvent l'anneau seul des roues est en fonte, et leurs dents sont en *bois*. Cet anneau est percé de mortaises (fig. 393) ; et si elles sont bien faites on y met en place les dents découpées à l'avance. La dent traverse toute la jante de fonte ; les deux faces de la mortaise *parallèles* à l'axe convergent vers le centre ; les deux autres demeurent parallèles au plan de la roue et sont munies d'un épaulement qui empêche la dent de descendre. Ces dents se nomment *peignes* ou *aluchons* et sont retenues au-dessous de la jante par une clef qui les traverse un peu de biais. Lorsque les roues sont très-petites ou qu'elles ont beaucoup de courbure, les dents, après avoir traversé la jante, laissent entre leurs extrémités inférieures un intervalle dans lequel on chasse un coin avec force au-dessous de la jante (fig. 394) ; ce coin ne peut évidemment tendre à tomber. Enfin, parlons encore d'une disposition moins assujettissante que la

première de toutes, et qui consiste à remplacer la mortaise prismatique par une autre qui renferme un évidement dans lequel la dent de bois plus épaisse, après avoir été chassée avec force, se renfle par suite de la compression qu'elle éprouve au dehors de la jante.

70. *Épaisseur des dents.* — Autrefois on avait coutume de donner aux dents une très-forte épaisseur et une largeur dans le sens de l'axe de la roue qui ne dépassait pas le double de leur épaisseur. Le pas de ces engrenages était grand et s'élevait de quatre à six pouces; l'épaisseur des dents était de dix-huit lignes à quatre pouces, c'est-à-dire de 4 à 8 centimètres. Aujourd'hui on les fait plus minces et en même temps plus larges, de façon à ce qu'elles aient la même force pour résister à la rupture. Les dents ont actuellement six centimètres d'épaisseur et jusqu'à 25 à 30 centimètres de largeur dans les plus fortes machines ou dans celles de quarante à cinquante chevaux; pour les machines médiocres ou de la force de dix à douze chevaux, les dents se réduisent à 2 et 3 centimètres d'épaisseur sur 12 à 16 centimètres de largeur ordinaire. Enfin, on fait les dents de bois, d'épaisseur égale à celle des dents de fonte seulement pour plus de commodité. Ces dimensions sont établies plutôt par l'usage que par des règles certaines; leur emploi est néanmoins très-avantageux, afin de diminuer les résistances des frottements des engrenages; car les dents, par cela seul qu'elles ont moins d'épaisseur, deviennent, à rayon égal de roue, plus multipliées. On a vu (2e partie, 135) que la résistance du frottement de deux dents l'une contre l'autre pouvait être représentée par une force tangentielle à l'une ou l'autre des circonférences primitives, et égale à

$$f \cdot Q \cdot \pi \left(\frac{m + m'}{mm'}\right), \quad \text{ou à} \quad f \cdot Q \cdot \pi \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right).$$

Dans cette expression, f est le coefficient du frottement dépendant de la nature des substances des roues et donné par l'un des tableaux du n° 106, 2e partie; Q est l'effort ou la réaction des deux roues l'une contre l'autre; π exprime le rapport 3,1416 de la circonférence au diamètre, et m et m' sont les nombres des dents dont les deux roues sont armées à leur circonférence. Si je nomme V le chemin que parcourt dans une seconde un point de la circonférence

primitive d'une roue, c'est-à-dire sa vitesse à la distance de son rayon primitif, le produit du frottement des dents par V sera le travail absorbé par ce frottement dans une seconde, lequel aura pour expression

$$f.Q.\pi\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\times V, \quad \text{ou} \quad f.\pi\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\times QV.$$

Je remarque que, dans ce dernier résultat, QV ou le produit de la puissance motrice de la roue par le chemin que parcourt son point d'application dans l'unité de temps, n'est autre chose que le travail transmis à cette roue, travail qui est indépendant du diamètre de cette roue, et qui est donné une fois pour toutes. Mais, pour un même travail, il est visible que plus V est considérable, plus Q est petit. Or, la vitesse à la circonférence d'une roue qui doit parcourir un certain nombre de révolutions pendant un temps déterminé, augmente proportionnellement avec son rayon. Ainsi, en augmentant le rayon, on diminue, ou rend plus faible la puissance Q qui réagit contre la roue à travail égal. Revenant maintenant à l'intensité de la résistance du frottement d'un engrenage, ou à $f.Q.\pi\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)$, on a deux manières de la diminuer, soit en augmentant les nombres de dents m et m' qui entrent en dénominateurs dans cette expression, soit encore en affaiblissant Q. Or, on peut rendre plus grand le nombre des dents en réduisant leur épaisseur, et on peut rendre Q plus faible, en agrandissant le rayon de la roue. Remarquez que cet agrandissement est toujours possible dans les engrenages, pourvu que les rayons de l'une et l'autre roue soient augmentés tous deux de manière à conserver le rapport suivant lequel leurs deux axes doivent se transmettre la vitesse angulaire. Il y a donc avantage à diminuer l'épaisseur des dents, et à augmenter la grandeur des rayons des roues; il ne faut pas oublier que si, le travail demeurant constant, les bras de levier des puissances et des résistances sont agrandis, les frottements produits sur les tourillons, et qui sont proportionnels à la résultante de ces forces, deviennent eux-mêmes moins considérables.

Les pièces d'une machine, ou les engrenages, ont, comme on sait (3e partie, 4 et 6), pour objet de transmettre de proche en proche le travail du moteur jusqu'à l'outil destiné à fabriquer l'ouvrage; que chacune d'elles absorbe par ses résistances passives, par

ses frottements, une portion de travail qui peut être le quart ou le cinquième du travail qu'elle communique à la pièce du côté de l'outil. Si donc on connaît *à priori* ce dernier travail, ou même encore celui qui est dépensé par le moteur, il est facile de conclure celui qui fait mouvoir chaque pièce séparément, soit en diminuant d'un quart ou d'un cinquième le travail qui fait mouvoir la pièce qui la précède du côté du récepteur, soit en augmentant dans le même rapport environ celui qu'elle doit laisser à la pièce du côté de l'outil. Cette quantité de travail ainsi obtenue pour chaque pièce ou roue d'engrenage est précisément ce que représente le produit QV; et si nous le divisons par V ou par la vitesse de la circonférence, nous aurons Q, c'est-à-dire la pression motrice qui réagit sur cette pièce. C'est d'après la connaissance de cet effort que les Anglais règlent les dimensions des dents des engrenages. Voici le tableau donné à cet égard par Tredgold, dans son *Traité des machines à vapeur :*

TABLEAU des dimensions des dents des engrenages.

PRESSION Q en kilogrammes.	PAS DES DENTS en centimètres.	ÉPAISSEUR en centimètres.	LARGEUR en centimètres.
k.	c. m.	c. m.	c. m.
10	0,63	0,30	2,00
40	1,27	0,60	3,27
80	2,00	0,90	4,54
158	2,54	1,20	5,81
244	3,17	1,50	7,08
336	3,80	1,80	8,35
430	4,43	2,10	9,62
580	5,08	2,40	10,89
730	5,71	2,70	12,16
870	6,34	3,00	13,43
1100	6,97	3,30	14,70
1210	7,62	3,60	15,97
1500	8,25	3,90	17,24
1750	8,88	4,20	18,51
2200	9,51	4,50	19,58
2300	10,16	4,80	20,85
2660	10,79	5,10	22,12
2840	11,42	5,40	23,39
3220	12,05	5,70	24,66
3500	12,68	6,00	25,93

Ce tableau paraît d'autant moins fondé en principe, que les épaisseurs y sont croissantes, on ne sait pourquoi, suivant une progression arithmétique dont la raison est trois millimètres; néanmoins il donne des dimensions qui s'éloignent peu de celles que l'usage a consacrées. Il n'y est pas fait mention de la saillie des dents, parce qu'en effet cette détermination consiste à amener deux dents sur la ligne des centres et à rogner ce qui excède le contact des dents suivantes. En général, l'épaisseur des dents dépend de deux circonstances : 1° de l'effort qu'elles ont à supporter par leur pointe sans se rompre; 2° de l'usure qu'elles éprouvent au bout d'un certain temps. La surface qui résiste à l'effort exercé contre la pointe est évidemment la section transversale de la dent faite à sa racine; plus cet effort est considérable, plus devra être grande l'épaisseur de la racine. Or, ce même effort agira avec un bras de levier dont la longueur dépend de la saillie de la dent, en sorte que l'épaisseur devra croître avec cette saillie. Mais nous avons reconnu l'avantage qu'il y avait à diminuer cette épaisseur : on doit donc s'attacher à réduire la saillie des dents au strict nécessaire, quoique quelques auteurs aient cherché à faire engrener plusieurs dents à la fois, sous le prétexte qu'elles répartissent entre elles la réaction que les deux roues exercent. Quant à l'usure, elle est surtout sensible près de la racine des dents conduites et à la pointe ou courbe des dents conductrices. On s'en rend raison en observant que c'est à ces endroits que le contact a lieu pour des dents à flancs droits; il en résulte que les dents de la roue conduite sont sujettes à se rompre au bout d'un certain temps à la racine. Celles de la roue conductrice s'usent moins vite, à cause du développement de leur courbe qui est plus grand que celui du flanc conduit de l'autre dent. Donc il faut principalement régler les dimensions des dents sur la roue conduite et, d'après la condition que, malgré l'usure qu'elles doivent éprouver au bout d'un certain temps, elles ne puissent encore rompre. D'après des observations recueillies à Anzin, l'usure des dents en fonte, de pignons ou petites roues conduites, était de trois à cinq millimètres pour six années d'un travail journalier de douze à dix-huit heures. Quant aux dents en bois de la roue conductrice, elles ne s'usaient guère plus vite. Ainsi, il convient de calculer l'épaisseur d'un pignon en la supposant réduite à ce qu'elle devient au bout de six ans; cette épaisseur ainsi calculée, et augmentée de celle que l'usure doit consommer, sera également don-

née aux dents de la roue conductrice. Lorsque les roues sont très-grandes et qu'elles appartiennent à des machines puissantes, on peut se dispenser de faire engrener des dents en bois avec des dents en fonte, et les construire en fonte les unes et les autres. Cela a peu d'inconvénient, à cause que l'influence du frottement est rendue très-faible par l'agrandissement des rayons. Le calcul des dimensions des dents se fonde d'ailleurs sur la théorie de la résistance des matériaux à la flexion et à la rupture dont il est nécessaire de donder ici un exposé succinct.

X.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LE CALCUL DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX.

71. Les pièces d'une machine destinées à transmettre de l'une à l'autre jusqu'à l'opérateur le travail d'un moteur quelconque, se composent de diverses parties dont les sections transversales sont pour l'ordinaire de grandeur constante dans leurs longueurs respectives, et qui peuvent, par conséquent, être regardées comme des corps prismatiques ou cylindriques. La réaction exercée réciproquement entre ces corps peut avoir lieu de quatre manières différentes : tantôt elle confond la direction de son effort dans la direction même de l'axe longitudinal du corps prismatique, soit en étendant soit en rapprochant les fibres de ce corps; tantôt oblique par rapport à cet axe, elle fléchit le corps ou elle le tord transversalement. La résistance que le corps oppose à ces divers modes d'action est *directe* dans les deux premières circonstances, et relative dans les deux dernières.

Nous avons donc à considérer quatre espèces de résistances des matériaux, c'est-à-dire leurs résistances à la traction, à la compression, à la flexion, et à la torsion. Toute force, selon son intensité, peut seulement changer la forme d'un corps ou altérer son élasticité, ou même encore le rompre ou l'écraser. Si l'action produisait ce dernier effet, ce serait une preuve qu'il n'aurait pas reçu les dimensions convenables; et si même elle était capable de dé-

truire l'élasticité du corps de telle sorte qu'après un changement de forme produit par la force, le corps ne reprît plus sa forme primitive lorsque cette force aurait cessé d'agir, l'altération qu'il aurait ainsi subie serait une véritable cause de destruction que l'on doit toujours éviter. Aussi dans les calculs des dimensions des pièces d'une machine, aurons-nous le soin de choisir pour limite supérieure l'effort au delà duquel l'élasticité devient imparfaite, effort qui est une fraction déterminée par l'expérience, de celui qui amène la rupture. Mais il n'arrive pas toujours que les corps soient sollicités par l'effort limite capable d'altérer leur élasticité; des efforts moindres produisent également sur ces corps des déformations avant que ces derniers aient acquis la roideur nécessaire pour communiquer le travail qui leur est transmis, et ces déformations ont dû évidemment absorber un certain travail qui, pour être évalué, exige qu'on connaisse la grandeur de ces déformations, afin d'en conclure le chemin parcouru par le point d'application des forces qui les ont produites, et par suite le travail absorbé.

Or, soit qu'il s'agisse de trouver les allongements, accourcissements, flexions ou torsions qu'un corps de forme donnée éprouve de la part d'une force qui lui est appliquée, soit qu'il s'agisse de calculer ses dimensions pour que son élasticité ne soit point altérée, les formules auxquelles on est conduit, et que nous allons rapporter sans chercher à les démontrer, renferment des coefficients constants que l'expérience a donnés et qu'il convient au préalable de définir.

72. *Définition des forces de traction, de compression, de flexion, de torsion.* — *Valeur des coefficients d'élasticité et de résistance.* — Lorsqu'une force tire un corps dans le sens de sa longueur, comme un poids suspendu à une corde ou à une barre de fer verticale, cette force est dite de *traction*. Elle devient de *compression*, lorsqu'elle presse le corps ou qu'elle tend à en refouler toutes les fibres dans le sens de leur longueur, ainsi qu'en agit un poids sur des soutiens posés debout. La force est une force de *flexion*, lorsqu'elle est perpendiculaire à la longueur d'une pièce, et qu'elle la courbe de telle sorte que les fibres situées du côté de la partie convexe s'allongent, et que celles situées du côté de la partie concave s'accourcissent. Par conséquent, dans toute pièce soumise à la flexion, il y a une fibre intermédiaire qui ne s'allonge ni ne s'accourcit; on la nomme

fibre invariable. Enfin, supposez une pièce encastrée par un de ses bouts, et recevant à l'autre extrémité un levier perpendiculaire à sa longueur sur lequel une force exerce son action ; cette force se nomme force de *torsion*. Son effet est tel que les divers points de ses fibres se déplacent perpendiculairement à leur longueur, de quantités proportionnelles à la fois à leur distance de l'axe de la pièce et à leur distance de la partie encastrée. Toutes les fois que ces forces sont en deçà de l'effort capable d'altérer l'élasticité d'un corps prismatique, le coefficient constant qui entre dans les formules relatives à cette circonstance, est le même, pour une même nature de substances, à l'égard des forces de traction, de compression et de flexion. Nous le désignerons par E ; et nous l'appellerons simplement *coefficient d'élasticité*. Quant au cas où il s'agit d'une force de torsion toujours en deçà de la limite dont il s'agit, le coefficient constant sera désigné par t et sous le nom de *coefficient de torsion*. Mais si ces quatre forces sont considérées comme très-voisines des efforts qui produisent l'altération du corps, ou qu'il s'agisse de calculer les dimensions de ce dernier, le coefficient constant qui entre dans les formules, non-seulement est différent de ceux d'élasticité ou de torsion, mais encore il a une valeur particulière pour chacune des quatre espèces de forces. Nous aurons alors un *coefficient de résistance à la traction*, un *coefficient de résistance à la compression*, un *coefficient de résistance à la flexion*, et un *coefficient de résistance à la torsion*. Nous désignerons le premier par A, le deuxième par B, le troisième par R, et le quatrième par T. Voici maintenant le tableau de ces coefficients numériques pour les diverses substances employées dans les constructions en général.

TABLEAU

DES COEFFICIENTS D'ÉLASTICITÉ ET DE RÉSISTANCE

POUR LES DIVERS MATÉRIAUX

EMPLOYÉS DANS LES CONSTRUCTIONS.

TABLEAU des coefficients d'élasticité et de résistance

	NATURE DES MATÉRIAUX.
PIERRES.	Basalte.
	Granit dur.
	id. ordinaire.
	Marbre le plus dur
	id. blanc veiné
	Grès le plus dur.
	id. tendre.
	Brique très-dure.
	id. ordinaire.
	Pierre calcaire ordinaire
	Plâtre
	Bon mortier de dix-huit mois.
	Mortier ordinaire de dix-huit mois
BOIS.	Chêne le plus fort.
	id. faible.
	Sapin fort.
	id. faible.
	Orme.
CORDES.	Cordes en chanvre sèches.
	id. mouillées.
	id. goudronnées.
FERS.	Fer forgé, le meilleur de mince échantillon.
	id. faible, ou de gros échantillon.
	Fonte grise.
	id. douce
	Acier, le meilleur.
	id. le plus mauvais
	Chaîne ordinaire de fer forgé.
	id. de fer forgé, renforcée par un tenon transversal.

(*a*) Les coefficients *E* servent à mesurer les allongements, accourcisse ou flexions des pièces.

(*b*) Les coefficients *t* sont relatifs aux solides dont les sections sont rectan On leur ajoutera le $\frac{1}{3}$ en sus, si les sections sont circulaires.

(*c*) Les coefficients *A* représentent les tractions en kilogrammes que doi plus subir les matériaux par centimètre carré de surface de section tran En les multipliant par 10, par 5, par 6 ou par 4, on a les mêmes forces capabl rompre, selon qu'il s'agit de pierres, de bois, de fer ou de cordes.

(*d*) Les coefficients *B* représentent la charge que les pièces debout doivent supporter dans les constructions par centimètre carré de section transversal

divers matériaux employés dans les constructions.

COEFFICIENTS					
ASTICITÉ, E (a).	DE TORSION, ou t (b).	DE RÉSISTANCE à la traction, ou A (c).	DE RÉSISTANCE à la compress., ou B (d).	DE RÉSISTANCE à la flexion, ou R (e).	DE RÉSISTANCE à la torsion, ou T (f).
k.	k.	k.	k.	k.	k.
			200		
			70		
			40		
			100		
			30		
			90		
			0,40		
		2,00	15		
		»	4		
		6	50		
		0,40	6		
		0,90	4		
		0,50	2,50		
000.000	8.117.592	196	80	850.100	405.800
000.000	5.284.000	140	50	586.200	167.200
000.000	6.218.000	»	100	709.700	310.900
000.000	2.683.000	167	26	511.100	134.100
			18		
		125			
		82			
		95			
000.000	120.225.000	1533	1250	24.513.000	20.037.000
000.000	72.130.000	667	1250	13.710.000	12.022.000
000.000	43.420.000	167	2500	4.493.000	7.233.000
000.000	51.230.000	167	2500	7.355.000	8.600.000
		1500			
		333			
		2000			
		2667			

ut de forme cubique. On les réduira aux $\frac{2}{3}$ et à $\frac{1}{2}$ pour les pièces de bois dont la ur sera 12 et 24 fois le plus petit côté de la base, aux $\frac{2}{3}$ et à $\frac{1}{2}$ pour des barreaux de ré dont la hauteur sera 12 et 24 fois le plus petit côté de la base, et aux $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ du fer fondu selon que la hauteur sera 4 fois, 8 et 36 fois le plus petit côté. On ltipliera par 10, par 5 ou par 4 le coefficient B pour conclure la pression par centimètre ré capable d'écraser les pièces debout, selon qu'elles sont en pierres, en bois ou en fer.

(f) Les coefficients R et T de résistance à la flexion et à la torsion deviennent des ficients de rupture en les multipliant par 10, par 3 ou par 4, selon que la pièce est bois ou en fer forgé, ou en fer fondu. On ajoutera aux valeurs de T le $\frac{1}{7}$ en sus si les bois sont circulaires, au lieu d'être rectangulaires.

73. *Déformation et résistance d'une pièce soumise à une force de traction.* — Si on considère une barre prismatique tirée dans le sens de son axe par une force P en kilogrammes en deçà de celle qui peut altérer l'élasticité du corps, il faut admettre que cette force est proportionnelle au rapport de l'allongement l produit à la longueur primitive L de la barre, c'est-à-dire à $\frac{l}{L}$. Cette même force devant croître avec le nombre des fibres du corps parallèles à sa longueur, ou avec la grandeur de son équarrissage, ou plus généralement avec l'aire de sa section transversale O, nous aurons

$$P = E \times \frac{l}{L} \times O.$$

Dans cette formule, E n'est autre chose que le coefficient de l'élasticité donné par le tableau du n° 72; l et L sont exprimés en mètres, et l'aire O en mètres carrés.

La quantité de travail dépensé par la force P, pour produire sur le corps l'allongement dont elle est susceptible, s'estime en multipliant cet allongement par la force elle-même, ou l par $E \times \frac{l}{L} \times O$; ce produit équivaut à $E \times \frac{O}{L} \times l^2$: ce qui nous apprend que la quantité de travail de la force ou de la résistance de la pièce croît comme les carrés des allongements ou comme le carré des forces; car les allongements et les forces correspondantes sont proportionnelles l'un à l'autre. Si on veut trouver les dimensions d'une barre destinée à tenir suspendue une certaine charge P, en kilogrammes, ou réciproquement calculer la charge que soutiendrait par son extrémité une barre d'un certain équarrissage, on aura recours à la formule $P = A \times O'$, dans laquelle O' exprime l'équarrissage de la pièce en centimètres carrés, et A le *coefficient de résistance à la traction*. Demandons-nous, par exemple, le poids que soutiendra par sa partie inférieure une barre de fer fondu dont la section transversale est un carré de deux centimètres de côté. On aura $O' = 4$; d'après le tableau précédent, A, pour le fer fondu, est de 167 kilogr. D'où

$$P = 167 \times 4 = 668^k;$$

une pareille barre pourra donc supporter 668 kilogr., sans que son

élasticité soit altérée. Si on voulait trouver le poids capable de la rompre, il faudrait, d'après l'observation (*c*) du tableau, multiplier le poids précédent par 6, en sorte que cette barre devrait être rompue par un poids de 4000 kilogr. environ.

74. *Déformation et résistance d'une pièce soumise à une force de compression.* — Supposons actuellement une pièce debout chargée à sa partie supérieure par un poids qui tend à refouler ses différentes fibres, et qui soit inférieur à la limite d'un effort semblable et capable d'altérer l'élasticité du corps. L'hypothèse précédente sur les accourcissements qu'éprouvera cette barre devient tout aussi admissible qu'à l'égard des allongements qu'elle éprouverait de la part d'une force de traction. Ainsi, on regardera cette force de compression comme proportionnelle au rapport $\frac{l}{L}$ de l'accourcissement du corps à la longueur primitive; on posera . . . . . $P = E \times \frac{l}{L} \times O$, et, par suite, la quantité de travail dépensée par l'accroissement de la pièce est égale à $E \times \frac{O}{L} \times l^2$, ou est encore proportionnelle soit au carré de l'accroissement soit au carré de la résistance opposée par la pièce.

Il est également très-facile de calculer les dimensions d'une pièce debout chargée par le haut d'un poids donné, ou de déterminer la charge quand les dimensions sont connues, et cela au moyen de la formule $P = B \times O'$, dans laquelle B est le coefficient de résistance à la compression, et O' la section transversale de la pièce estimée en centimètres carrés. A la vérité le coefficient B est donné d'après l'observation (*d*) du tableau précédent, c'est-à-dire tant que la hauteur de la barre ne dépasse pas 24 fois ou 36 fois sa largeur selon qu'elle est en bois ou en fer: nous verrons plus loin comment on s'y prendra quand les hauteurs s'élèveront au-dessus de ces limites. Cherchons la charge que doit supporter un pilot de chêne de 25 centimètres de diamètre. Sa section transversale O, estimée en centimètres carrés, est égale à

$$\frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{3{,}1416 \cdot (25)^2}{4} = 490^{\text{c mmes}}.$$

La longueur du pilot peut être regardée comme comprise entre

12 fois et 24 fois son diamètre. Le rapport de la résistance du pilot à celle qu'il aurait s'il était cubique est une moyenne entre $\frac{5}{6}$ et $\frac{1}{2}$, ou est égal à

$$\frac{\frac{5}{6}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{8}{6}}{2}=\frac{2}{3}.$$

On multipliera la valeur de $B = 80$ kilogr. pour le chêne fort, par $\frac{2}{3}$; ce qui donne cette autre,

$$B=\frac{2}{3}\,80=\frac{160}{3}=53^{k}.$$

d'où l'on tire $P = 53^{k} \times 490 = 25\,970^{k}$.

Peronnet évalue la charge d'un pilot à 25 000 kilogr.

75. *Déformation d'une pièce soumise à une force de flexion, et encastrée par un bout.* — Considérons maintenant une pièce prismatique horizontale *DEGF* (fig. 395), encastrée solidement par son extrémité *DF* et partagée par la pensée en une suite de sections *pr*, *qs*, perpendiculaires à sa longueur et très-rapprochées. Si, par l'extrémité libre, on fléchit la pièce au moyen d'une force *P* perpendiculaire à sa longueur, les intervalles rectangulaires qui séparent ces sections entre elles deviennent des trapèzes, de telle sorte que la petite longueur *pq* de fibre située du côté de la partie convexe *DE* s'allonge, et que la petite longueur *rs* de fibre située du côté de la partie concave *FG* s'accourcit. Il y a donc une fibre intermédiaire et intérieure qui ne s'est ni accourcie ni allongée; on nomme cette dernière *fibre invariable*. Duhamel a reconnu, en effet, par expérience, que pour une pièce horizontale fléchie, les fibres supérieures s'allongent et les fibres inférieures se refoulent directement. Il a scié la pièce par le bas jusqu'à moitié de son épaisseur environ, et après avoir chassé un coin de bois dans l'intervalle du trait de scie, il a vu que la résistance de la pièce n'était nullement altérée, et qu'elle commençait à diminuer dès que le trait s'élevait aux trois quarts de l'épaisseur. En observant que chaque élément de fibre compris entre deux sections consécutives

de la pièce s'allonge ou s'accourcit d'autant plus que cette fibre est plus éloignée de la fibre invariable, il est naturel d'admettre que ces allongements ou accourcissements sont proportionnels aux distances de chaque fibre par rapport à la surface de la fibre invariable. De plus, la résistance de chacune d'elles à la flexion est proportionnelle non-seulement à son allongement ou à son accourcissement (3e partie, 73 et 74), mais encore à sa section élémentaire. Ainsi, chaque résistance d'un élément de fibre est proportionnelle au produit d'un élément de la section de la pièce et de la distance de cet élément à la surface de la fibre invariable; car cette distance est proportionnelle à l'allongement ou à l'accourcissement. Toutes ces résistances partielles étant sensiblement horizontales à cause du peu de flexion qu'on suppose à la pièce, et par conséquent parallèles, ont pour résultante une valeur proportionnelle à la somme des produits de chaque élément de la section transversale, multiplié respectivement par sa distance à la surface de la fibre invariable, ou bien encore au produit de la section entière et de la distance de son centre de gravité à cette surface (2e partie, 42). Mais, comme le mouvement dû à la flexion ne peut s'opérer que dans le sens de la force P qui l'occasionne, il faut nécessairement que la résultante des résistances soit nulle d'elle-même, ou que *la fibre invariable passe par le centre de gravité de la section transversale de la pièce*. Il faut de plus que le travail total de toutes les résistances partielles soit égal au travail de la force P qui a produit la flexion, ou au produit $P \times CD$, ou $P \times f$. L'abaissement f de l'extrémité libre de la pièce est ce qu'on nomme la *flèche de flexion*. Or, je remarque que si on examine seulement chaque travail de la résistance des portions de fibres comprises entre deux sections consécutives *pr* et *qs*, on voit qu'il est proportionnel au produit de chaque section élémentaire transversale d'une fibre et du carré de son allongement ou accourcissement (3e partie, 73 et 74), ou même encore au produit de chaque élément de la section totale multiplié par le carré de sa distance à la surface de la fibre invariable. Donc, enfin, le travail total des résistances des fibres est proportionnel à la somme des produits de chaque élément de la section de la pièce multiplié par le carré de sa distance verticale au centre de gravité de la section entière; en un mot, il est proportionnel au moment d'inertie de cette section par rapport à un axe horizontal qui passe par son centre de gravité, et qui est situé dans son plan. Enfin,

comme ces distances constituent en quelque sorte l'épaisseur verticale de la pièce, et que le travail de la résistance de cette dernière augmente avec les carrés de ces distances et même encore avec l'aire transversale, on peut prévoir à l'avance que le travail de la résistance, ainsi que la résistance de la pièce, augmente comme le cube de l'épaisseur de la pièce. En égalant le travail $P \times f$ de la force appliquée au travail total des résistances des fibres, et en nommant I le moment d'inertie de la section transversale par rapport à un axe qui passe par le centre de gravité de la section, et dans le plan de cette dernière, E le coefficient d'élasticité, et L la longueur de la pièce, on trouve

$$f = \frac{P}{E \times I} \times \frac{L^3}{3}.$$

Telle est l'expression de la flèche que produit une force P sur l'extrémité libre d'une pièce encastrée invariablement à l'autre bout, avant que cette pièce ne transmette l'action de cette force. Si on multiplie f par P, le produit $\frac{P^2 \times L^3}{3 \cdot E \times I}$ sera le travail consommé uniquement pour fléchir la pièce (*). Cette quantité d'action, qui est évidemment une perte dans le travail des machines, étant proportionnelle aux cubes des longueurs et en raison inverse du coefficient d'élasticité et du moment d'inertie de la section, on voit qu'il y a du désavantage à se servir de pièces trop longues, et qu'il y a, au contraire, avantage à rendre le moment d'inertie de la section le plus grand possible, ainsi que le coefficient d'élasticité. On parvient au premier but soit en faisant l'aire de la section transversale la plus grande possible, ou, ce qui vaut mieux encore, en rejetant un grand nombre de ses points loin de l'horizontale passant par son centre de gravité. Quant au coefficient d'élasticité, le tableau du n° 72 montre qu'il est plus considérable à l'égard du fer que du bois; aussi fait-on mieux, quand on le peut, de construire les pièces d'une machine en fer qu'en bois. L'augmentation qu'on vient de reconnaître si convenable dans la section transversale d'une pièce,

(*) La valeur de la flèche et du travail consommé par la flexion d'une pièce prismatique, au moyen du moment d'inertie de sa section transversale, est le résultat d'un chapitre sur la résistance des matériaux qui devait être annexé à la deuxième partie.

explique pourquoi une pièce rectangulaire fléchit moins de champ que sur son plat. C'est encore ainsi qu'on justifie l'emploi des pièces dont le profil a la forme d'une croix, ou qui sont terminées par des *côtes* ou nervures.

76. *Application aux pièces carrées, rectangulaires, ou circulaires.* —Nous allons rechercher la flèche et le travail consommé par une force verticale P sur une pièce horizontale encastrée par un bout, et dont la section est successivement un rectangle, un carré, un carré posé parallèlement à ses diagonales, et un cercle.

1° *Pièce à section rectangulaire.* — Soit a (fig. 396) la largeur horizontale de la pièce, b son épaisseur verticale, L sa longueur ; le moment d'inertie I de la section transversale par rapport à l'axe horizontal passant par son milieu est $\frac{a \cdot b^3}{12}$; d'où l'on tire

$$f = \frac{P \times L^3}{E \cdot \frac{a \cdot b^3}{12} \times 3} = \frac{4PL^3}{E \cdot ab^3}.$$

Le travail consommé par la flexion a pour valeur

$$\frac{4P^2L^3}{E \cdot ab^3}.$$

Il ne faut pas oublier que dans cette formule, et dans les suivantes, toutes les dimensions de la pièce sont rapportées au mètre, et les charges ou résistances au kilogramme.

2° *Pièce à section carrée.* — Il suffira de faire $a = b$ (fig. 397) dans la formule précédente, et on trouve, pour f et pour le travail consommé,

$$\frac{4PL^3}{E \cdot a^4}, \quad \text{et} \quad \frac{4P^2L^3}{E \cdot a^4}.$$

3° *Pièce à section posée parallèlement à une diagonale.* — On a $I = \frac{a^4}{12}$ (fig. 398), et les deux expressions de f et du travail consommé sont encore

$$\frac{4PL^3}{E \cdot a^4}, \quad \text{et} \quad \frac{4P^2L^3}{E \cdot a^4}.$$

4° *Pièce à section circulaire.* — On a, en désignant par r le rayon du cercle de la section transversale (fig. 399), $I = \frac{\pi r^4}{4}$; faisant cette substitution dans la formule générale $f = \frac{PL^3}{E \times I \times 3}$, on trouve

$$f = \frac{4}{3} \times \frac{PL^3}{E \,.\, \pi r^4}.$$

Quant au travail consommé, il devient égal à

$$\frac{4}{3} \times \frac{P^2L^3}{E \,.\, \pi r^4}.$$

Si le poids ou la charge P était réparti uniformément sur la même longueur L de la pièce, de manière que celle-ci fût chargée d'un poids $\frac{P}{L}$ par unité de longueur, on trouve que, dans ce dernier cas, la flèche f n'est que les $\frac{3}{8}$ de celle qui a lieu quand toute la charge est appliquée à l'extrémité non encastrée.

77. *Résistance à la flexion d'une pièce encastrée par un bout.* — Lorsqu'une force P, perpendiculaire à la longueur d'un corps prismatique $DFGE$ (fig. 400), encastré par son extrémité DF, tend à rompre ce corps, il est aisé de voir que la rupture tend à s'opérer dans la section même où la pièce est encastrée. Car l'énergie de la puissance P est proportionnelle au produit de cette force multipliée par la distance qui sépare son point d'application du plan de la section transversale où la rupture se fait; et il est évident que la section qui correspond à l'encastrement est la plus éloignée de la force. Désignant par L la longueur totale de la pièce, $P \times L$ sera le moment de la puissance, lequel devra être égal au moment de la résistance des fibres sur la section de rupture, pris par rapport au point où la fibre invariable AB coupe cette section. En admettant que la pièce tend à tourner autour de la fibre invariable en ce dernier point, on trouve que le moment de la résistance à la rupture est proportionnel au moment d'inertie I de la section transversale divisé par la distance verticale V de la fibre la plus éloignée à la fibre invariable. Si, maintenant, nous nous rappelons qu'il ne s'agit ici que de déterminer les dimensions de la pièce de manière

à ce que son élasticité ne soit pas altérée par l'effort P de flexion, et qu'on désigne par R le coefficient de résistance relatif à ce cas, la condition d'équilibre revient à cette égalité

$$P \times L = \frac{R \times I}{V}, \quad \text{ou} \quad P = \frac{R \times I}{L \times V}.$$

Considérons encore les quatre espèces de pièces que nous avons considérées (fig. 396-399).

PREMIER CAS. — *Section rectangulaire.* — La plus grande distance verticale d'une fibre à la fibre invariable V est évidemment $\frac{b}{2}$, ou la moitié de la hauteur du rectangle $I = \frac{ab^3}{12}$. D'où

$$P = R \cdot \frac{\frac{ab^3}{12}}{L \times \frac{b}{2}} = R \cdot \frac{ab^2}{6L}.$$

Ainsi, la résistance croît proportionnellement à sa largeur et au carré de son épaisseur.

DEUXIÈME CAS. — *Section carrée.* — On fera $a = b$ dans la formule précédente, ce qui donne

$$P = \frac{R \cdot a^3}{6L}.$$

TROISIÈME CAS. — *Section carrée dont une diagonale est horizontale.* On a $V = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $I = \frac{a^4}{12}$; d'où

$$P = \frac{\frac{R \cdot a^4}{12}}{L \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{R \cdot a^3}{L \cdot 12} \cdot \sqrt{2} = \frac{R \cdot a^3}{L \cdot 6\sqrt{2}};$$

expression plus petite que celle du carré, et qui nous apprend que la résistance d'une pièce carrée posée parallèlement à l'une de ses diagonales est moindre que celle d'une pièce carrée posée sur l'un de ses côtés, dans le rapport de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à 1.

QUATRIÈME CAS. — *Section circulaire.* — On a $V = r$, $I = \frac{\pi r^4}{4}$;

d'où $$P = R \times \frac{\pi r^3}{4L}.$$

D'après cela, on voit qu'il est avantageux d'augmenter la hauteur d'une pièce par rapport à sa largeur, puisque la résistance augmente comme le carré de la première. Si cependant cette pièce était rendue trop mince, elle pourrait se déverser dans le sens horizontal. Ordinairement le rapport de la hauteur et de la largeur d'une section transversale est comme 7 est à 5 (fig. 401); le débitage des pièces se fait avec économie en suivant ces dimensions. Si la largeur est rendue plus mince, on garnit la pièce d'épaulements, de nervures ou côtes (fig. 402). Les épaulements ajoutés vers son milieu ajoutent, il est vrai, peu de résistance à la pièce, mais ceux qui occupent les extrémités de la base transversale augmentent beaucoup les résistances à la rupture. Nous verrons plus loin, au n° 83, comment il est possible de tenir compte de cette addition des épaulements dans l'évaluation de la résistance à la flexion.

Exemple. Trouver l'équarrissage d'une pièce carrée en bois de chêne de deux mètres de longueur encastrée par un bout et qui doit supporter à l'autre extrémité un poids P de 1000 kilogr. On a $P = \frac{R \cdot a^3}{6L}$; d'où $a^3 = \frac{6LP}{R}$; $L = 2^m$, $P = 1000^k$, et R (tableau du n° 72) $= 850.100$ ou $850\,000$. D'où

$$a^3 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 1000}{850\,000} = \frac{12}{850} = 0{,}014,$$

et, par suite,

$$a = \sqrt[3]{0{,}014} = 0^m{,}25 \text{ environ.}$$

Ainsi, pour qu'une pièce de bois de 2^m, encastrée horizontalement, supporte, sans perdre son élasticité, une charge de 1000^k à l'autre extrémité, il convient de lui donner un équarrissage de 25 centimètres de côté.

78. *Solide d'égale résistance.* — On a vu que quand une pièce prismatique est encastrée par une extrémité et qu'elle est fléchie

perpendiculairement par une force appliquée à l'autre, le point dans lequel elle est plus exposée à se rompre, est évidemment celui de l'encastrement. Si la résistance est suffisante en ce point, la pièce sera partout ailleurs plus forte qu'il n'est nécessaire. Cherchons la figure de la pièce de manière à ce que sa résistance soit partout suffisante et jamais excédante, en supposant d'ailleurs que toutes ses sections transversales soient rectangulaires. Une pièce ainsi déterminée est ce qu'on nomme *solide d'égale résistance*. Il suffira évidemment que la relation $P = R \cdot \frac{ab^2}{6L}$ soit satisfaite pour toutes les sections. Dans cette formule a représente la largeur horizontale constante de la section transversale de la pièce $AB = L$ (fig. 403); b est la hauteur LI de la section d'encastrement; et on aura la valeur de LI au moyen de l'équation

$$b^2 = \frac{6LP}{aR}, \quad \text{ou} \quad b = \sqrt{\frac{6LP}{aR}}.$$

Si nous voulons avoir maintenant la hauteur y de la section MM', située à une distance $OA = x$ du point A d'application de la force P, on remplacera b et L par y et x dans l'équation précédente; ce qui donne

$$y^2 = \frac{6P}{aR} \cdot x.$$

Donc, la courbe $LMAM'I$ est telle que ses ordonnées MM', ou y, croissent proportionnellement à ses abscisses OA, ou x, comptées du point A : cette propriété appartient à une parabole qui a pour sommet le point d'application de la force fléchissante. Voici, au reste, un procédé pratique pour tracer cette courbe quand la longueur AB (fig. 404) de la pièce est donnée, et quand on a calculé sa hauteur LI de la section d'encastrement d'après la formule précédente. Partagez l'axe BA et la demi-corde BI en un même nombre de parties; en quatre parties, par exemple. Joignez l'extrémité L de la demi-corde non divisée à chacun des points de division de l'axe BA par des droites; leurs intersections avec les parallèles à l'axe menées par les divisions de même numéro de la demi-corde BI, seront des points de la courbe AI. L'autre partie AL est symétrique par rapport à la première. C'est de cette manière qu'on détermine la forme d'un balancier dans les machines à va-

peur. La résistance qu'il oppose au mouvement a lieu vers ses points de rotation ; ceux-ci peuvent être regardés comme des points fixes sur lesquels la section milieu du balancier est encastrée, et l'extrémité de la moitié de sa longueur comme sollicitée par une pression égale à la tension de la vapeur. On a coutume de garnir la ligne milieu longitudinale, et les rebords du balancier, de nervures qui, comme nous l'avons dit, ajoutent à sa résistance.

79. *Déformation d'une pièce encastrée soumise à une force de torsion appliquée sur son autre extrémité.* — Imaginons un cylindre encastré par son extrémité D (fig. 405), et soumis par l'autre extrémité libre à une force P, qui tend à le tordre autour de l'axe DC avec le bras de levier CB. Cette déformation sera telle que, pour chaque fibre longitudinale ou parallèle à l'axe DC, l'extrémité située dans la base encastrée AA se maintiendra constamment à la même position, tandis que l'extrémité b du côté libre se déplacera le plus possible de manière à décrire l'arc bb'. On suppose en outre que toutes les extrémités analogues à cette dernière, décrivent dans le plan de la section passant par la force P, des angles égaux autour du centre C. Cela posé, en admettant que la résistance à la torsion de chaque fibre longitudinale est proportionnelle à l'arc que son extrémité libre décrit, ainsi qu'à sa grosseur, et réciproque à sa longueur ou à celle du cylindre, on trouve le résultat suivant. Nommons θ l'arc décrit à l'unité de distance dans le plan de la section extrême du côté de la force P, L la longueur du cylindre, K la longueur du bras de levier CB, I' le moment d'inertie de la section transversale du cylindre par rapport à l'axe central DC perpendiculaire à cette section, t le coefficient de torsion, on a

$$\theta = \frac{L \cdot P \cdot K}{t \times I'}.$$

Quant au travail absorbé par la torsion ou par la déformation de la pièce, il est égal à $\frac{L \cdot P^2 \cdot K^2}{t \times I'}$. Si le cylindre a pour base un carré, on a $I' = \frac{a^4}{6}$. L'arc de torsion θ décrit à l'unité de distance est égal à $\frac{6LPK}{ta^4}$; et le travail consommé a pour valeur $\frac{6LP^2K^2}{ta^4}$. Lorsque le cylindre est circulaire, le moment d'inertie I' devient

$\frac{\pi r^4}{2}$, et les deux expressions précédentes

$$\frac{2LPK}{\pi r^4}, \quad \text{et} \quad \frac{2LP^2K^2}{\pi r^4}.$$

80. *Résistance à la torsion.* — Désignant par T le coefficient de résistance à la torsion, par r_1 la distance de la fibre la plus éloignée à l'axe du cylindre, par P l'effort limite dont le bras de levier est toujours K, et au delà duquel l'élasticité serait altérée par suite de cette torsion, on a $P = \frac{T}{r_1} \times \frac{I'}{K}$. S'il s'agit d'un carré, la distance r_1 à l'axe du prisme, de la fibre la plus éloignée, est évidemment la moitié d'une diagonale; et si a est le côté de ce carré, cette distance équivaut à $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2}$, ou à $\frac{a}{\sqrt{2}}$. On fera dans la formule précédente $r_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $I' = \frac{a^4}{6}$; ce qui donne, pour la résistance de cette pièce à la torsion,

$$P = \frac{T\sqrt{2} \times a^4}{6aK} = \frac{Ta^3\sqrt{2}}{6K} = 0{,}2357 \cdot \frac{a^3T}{K}.$$

Dans cette expression, K représente la longueur du levier avec lequel la torsion de la barre s'effectue. Si le cylindre encastré est circulaire et de rayon r, on a $r_1 = r$, $I' = \frac{\pi r^4}{2}$; d'où. . . . $P = \frac{T}{r_1} \times \frac{I'}{K} = \frac{T \cdot \pi r^3}{2K}$. Avec ces formules, et en prenant dans le tableau du n° 72 le coefficient de résistance à la torsion suivant la nature de la substance, il est possible de trouver quelle force de torsion une pièce prismatique de dimensions données peut supporter sans s'altérer, ou réciproquement quelles seraient les dimensions de cette pièce pour supporter sans altération une force de torsion déterminée.

81. *Résistance des pièces chargées debout ou verticalement.* — Ce qu'on a dit (3e partie, 74) relativement à la résistance des pièces debout, ou verticalement posées, ne s'applique pas à toutes les hauteurs d'une pièce; il convient d'examiner cette circonstance qui se

présente fréquemment dans la pratique. Nous distinguerons le cas où une pièce a une hauteur très-petite de celui où la hauteur est plus grande. Dans le premier cas la pièce résiste seulement à l'écrasement, et ses dimensions se calculent au moyen du tableau suivant, qui donne la charge qu'elle doit supporter par millimètre carré de section transversale.

TABLEAU de la résistance des pièces à l'écrasement.

HAUTEURS.	SUBSTANCES.	CHARGE MAXIMUM par MILLIMÈTRE CARRÉ de surface.
		k.
1 à 2 fois l'épaisseur. .	Chêne ou Sapin. . .	0,30
	Fer forgé.	10,00
	Fonte.	20,00
4 fois *id.* . .	Fonte.	15,00
8 fois *id.* . .	Fonte.	10,00
12 fois *id.* . .	Bois.	0,25
	Fer forgé.	6,25
24 fois *id.* . .	Bois.	0,15
	Fer forgé.	5,00
36 fois *id.* . .	Fonte.	1,33

Les cas intermédiaires ne sont pas donnés par l'expérience directe.

Quand la longueur L de la pièce surpassera vingt fois l'épaisseur ou petit côté de la section, on emploiera la formule suivante pour calculer la charge Q *maximum* à faire supporter :

1° Pour une pièce rectangulaire, $Q = 0{,}823 \cdot \frac{ab^3}{L^2} \cdot E'$;

2° Pour une pièce à base circulaire, $Q = 7{,}757 \cdot \frac{r^4}{L^2} \cdot E'$;

Dans lesquelles, pour le bois, $E' = \frac{E}{10} = 100.000.000^k$;

» pour le fer forgé, $E' = \frac{E}{4} = 5.000.000.000$;

» pour la fonte, $E' = \frac{E}{5} = 2.000.000.000$.

82. *Influence des appuis sur la résistance des matériaux.* — Le calcul précédent est seulement relatif au cas où la pièce n'est pas solidement encastrée à ses extrémités, et où ces dernières peuvent sortir de la direction primitive de l'axe; c'est ce qui arrive aux bielles des manivelles. Mais si l'un des bouts est fortement encastré, et que l'autre soit libre, la pièce pourra supporter une charge double de celle qui est donnée par les formules. Enfin, la charge deviendra quadruple si les extrémités supérieure et inférieure sont maintenues par des guides dans l'axe primitif de la pièce, ou bien encore si, les extrémités étant libres, elle est retenue à son milieu. En général, on peut dire que la mesure de la résistance d'une pièce est proportionnelle au nombre des sections de rupture ou d'inflexion qui peuvent se produire par suite de la disposition des appuis. Si, par exemple, les extrémités A et B (fig. 406) de la pièce sont libres, le refoulement opéré sur elle la fait courber à son milieu O, et c'est autour de cette section seule que la rupture tend à s'opérer; ce cas est celui des formules générales.

Lorsque, pour un refoulement analogue, l'extrémité B (fig. 407) est encastrée à une certaine profondeur BC, la partie de la pièce qui est saillante au dehors de l'encastrement tend à se courber à son milieu O, et il se forme une inflexion à la naissance C de l'encastrement : il y a donc deux sections de rupture en O et en C; voilà pourquoi la charge est double de celle que donne le calcul précédent.

Si l'encastrement a lieu aux deux bouts A et B (fig. 408), il y a trois sections de rupture D, O et C; la charge de la pièce est encore augmentée.

Il en est de même quand elle est retenue par son milieu O (fig. 409); la pièce AB se compose de deux moitiés AO et OB, qui tendent chacune à se courber à leurs milieux D et C. Il n'y a donc de sections de rupture qu'en ces deux derniers points; mais comme les flèches sont aussi moitié moindres, et qu'elles mesurent le mo-

ment de la charge dont elles sont le bras de levier, on reconnaît de suite que la charge est quadruple de celle qui a lieu quand les extrémités de la pièce sont libres.

Des considérations analogues sont applicables aux pièces de bois horizontales reposant sur des appuis. Si, par exemple, une telle pièce, chargée à son milieu par un poids $2P$, repose sur deux couteaux où les extrémités A et B (fig. 410) ont la faculté de glisser, elle est évidemment dans le même état que si, le point milieu O étant fixe, chaque extrémité était sollicitée par une force P. Ainsi, la charge d'une pareille pièce sur son milieu est double de celle qu'une pièce de même longueur, mais encastrée par un bout, peut recevoir à son extrémité libre. Si, au contraire, la pièce horizontale AB (fig. 411) est fortement encastrée par ses extrémités dans deux murs qui ne peuvent céder, je dis qu'elle supportera à son milieu une charge quadruple de celle d'une pièce de même longueur encastrée par un bout et fléchie à son autre extrémité. En effet, à l'égard de la pièce horizontale AB doublement encastrée, non-seulement la puissance appliquée en O a un bras de levier moitié moindre, mais encore il y a deux sections de rupture en C et D; et, par conséquent, deux moments de résistance, égaux l'un et l'autre à celui de la résistance qu'oppose la pièce encastrée par un seul bout.

83. *Influence des évidements ou des renforts ou côtes ajoutés aux pièces.* — Nous avons promis (3e partie, 77) de faire voir l'influence des épaulements, côtes ou épaisseurs ajoutées à la section transversale d'une pièce prismatique. En désignant toujours par L la longueur d'une pièce encastrée par un bout, et par P la puissance appliquée au bout libre, qui tend à la faire fléchir, $P \times L$ sera toujours le moment de cette puissance. Mais on a vu au même paragraphe à quoi était égal le moment de la résistance des fibres selon la nature de la section transversale supposée pleine. Ce moment est, pour le rectangle, $R \cdot \frac{ab^2}{6}$, et pour le cercle, $R \cdot \frac{\pi r^3}{4}$. Si, maintenant, la section transversale est évidée, comme le représentent les deux figures (412 et 413), on cherchera le moment de la résistance comme si toute la section était pleine, on en retranchera le moment de la résistance du vide, et la différence devra être égalée au moment de la charge, ou à $P \times L$.

S'il s'agit du profil d'un balancier de machine à vapeur (fig. 414), on calculera le moment de la résistance du rectangle *ABDC*, ainsi que ceux de la résistance des rectangles vides *abdc* et *efhg*. Retranchant ces derniers du moment du rectangle total *ABDC*, la différence devra être égale au moment de la charge.

On agira d'une manière analogue pour la disposition de la figure 415, et la disposition composée de deux pièces liées entre elles et maintenues à un certain intervalle (fig. 416).

Enfin, quand les pièces sont d'inégales épaisseurs, ou que, boulonnées par leurs extrémités (fig. 417), elles sont écartées par un tasseau situé à leur milieu et dont on peut dans le calcul faire abstraction, on verra où se fera la rupture, c'est-à-dire le point où la courbure est la plus grande; et on choisira pour section celle où la résistance est la moindre. Deux pièces liées par leurs deux bouts, de manière que ceux-ci ne puissent glisser, et écartées par un tasseau, sont ici plus fortes que si elles étaient appliquées à plat l'une contre l'autre. Car le moment de la résistance du milieu est égal au moment de la résistance du rectangle total *abcd* (fig. 418) moins celui de la résistance du rectangle vide *efhg*, et le premier croit comme le carré de la hauteur totale *ab*. En comparant les moments de résistance des pièces creuses à ceux des pièces pleines, on reconnaît qu'à égalité de matière les premières l'emportent sur les autres. La nature nous offre l'exemple des tuyaux de plume, des roseaux, qui, quoique très-légers, sont susceptibles d'une certaine résistance.

XI.

CONSTRUCTION ET SOLIDITÉ DES PIÈCES DE MACHINES.

84. *Tourillons et coussinets.* — Les tourillons sur lesquels une roue doit tourner sont adaptés tantôt à des arbres en fer, et tantôt à des arbres en bois. Dans le premier cas ils font corps et sont coulés avec l'arbre, parce qu'en général un arbre en fer de grandes dimensions coûterait trop cher s'il était forgé. Mais lorsque l'arbre est en bois, les tourillons en fer, qui sont toujours préférables aux tourillons en bois, sont réunis à ces arbres de plusieurs manières.

1° *Tourillon à équerre ou à talon.* — Le plus simple des dispositifs, ordinairement mis en usage dans les moulins, consiste à pratiquer dans l'arbre, depuis la circonférence jusqu'au-dessous du centre, une entaille capable de recevoir la partie carrée qui forme le prolongement du tourillon (fig. 419). Cette même partie carrée est de plus coudée en équerre à son extrémité, pour se loger dans une mortaise creusée au fond de l'entaille, puis on frette l'arbre dans la partie qui avoisine le tourillon.

2° *Tourillon à quatre bras.* — Une autre disposition consiste à armer le tourillon de quatre bras qui se réunissent autour d'un petit épaulement et qui sont coulés d'une même pièce avec le tourillon. Les bras sont serrés contre l'arbre par des boulons dont l'écrou est noyé dans l'épaisseur de la pièce (fig. 420). La tête de chaque boulon du côté des bras est carrée pour qu'on puisse le tourner avec une clef dans son écrou ; chaque boulon est introduit par une mortaise pratiquée dans l'arbre à la distance convenable. On bouche ensuite cette mortaise et on frette.

3° *Tourillon à ailes.* — Quelquefois les tourillons portent deux ou quatre ailes en fonte, minces de deux pouces, qui s'enfoncent jusqu'à quinze ou vingt pouces dans deux ou quatre entailles pratiquées à l'extrémité de l'arbre (fig. 421). Lorsque les ailes sont logées dans leurs entailles respectives, on serre l'arbre avec des frettes.

4° *Tourillon à ailes réunies par un anneau.* — Le meilleur dispositif consiste à réunir les ailes par un anneau très-épais, d'un diamètre plus considérable que celui de l'arbre, et à chasser des cales entre l'arbre et l'anneau (fig. 422).

Il faut établir les tourillons bien concentriquement avec l'axe de l'arbre, et, s'il se peut, les tourner mis en place.

Les tourillons roulent sur des crapaudines ou coussinets qu'on a le soin d'évider en demi-cercle pour que chaque tourillon puisse s'y mouvoir. Ces coussinets sont ordinairement en bronze, ou mélange de 84 parties de cuivre et de 16 d'étain, qui forme une composition fort dure. Les demi-coussinets dont il est d'abord question, s'emploient quand le tourillon ne tend pas à sortir (fig. 423); autrement on les compose de deux demi-cercles qui sont opposés par un même diamètre. Si les sauts ne sont que momentanés, on se contente d'une simple bride au-dessus d'un demi-coussinet. Un coussinet de cette dernière espèce est encastré au moyen de cales sur une pièce de bois qu'on nomme *plumard*.

Les coussinets doubles reposent entre deux montants de fonte, coulés sur une semelle fixée au plumard par deux boulons ; les montants sont garnis chacun extérieurement d'un épaulement destiné à recevoir dans le moment de la coulée un boulon à vis (fig. 424). C'est dans ces derniers boulons que pénètre une bride supérieure qui appuie sur le double coussinet par un talon placé au milieu de cette bride, et qui est serrée par deux écrous adaptés aux boulons des épaulements accolés à chaque montant. Enfin, pour que les coussinets ne glissent point dans les montants parallèlement à l'axe du tourillon, on garnit chaque montant d'une oreille qui est engagée dans une rainure verticale pratiquée à la surface latérale des coussinets.

Quand la vitesse des tourillons n'est pas très-grande, on peut les faire en bois de gaïac ou de cormier, ou de sorbier desséché et bouilli dans l'huile de lin. La meilleure graisse est le suif.

Enfin, lorsque les supports de coussinets doivent être très-hauts, on évide la semelle en forme de voûte.

85. *Dimensions des tourillons.* — Tredgold donne aux tourillons une longueur égale aux 0,85 du diamètre. Cette longueur, qui n'influe nullement sur la résistance du frottement, car ce dernier est indépendant de la grandeur de la surface ; cette longueur, dis-je, n'est point indifférente pour la résistance du tourillon à la rupture. Pour calculer son diamètre, il faut supposer que le tourillon ne pose que par un point sur l'extérieur du coussinet, et que la pression qu'il y éprouve tend à le rompre autour de son collet près de l'arbre. Le tourillon est alors dans la circonstance d'une pièce encastrée par un bout et sollicitée par une force agissant à l'autre extrémité et égale à la pression du tourillon contre la crapaudine. On sait (2e partie, 181), que pour avoir cette pression, il faut chercher la résultante de la puissance et des résistances de l'arbre transportées parallèlement à elles-mêmes, et la décomposer en deux autres forces parallèles sur chaque tourillon. Nous pouvons d'ailleurs ici faire abstraction de la puissance, qui généralement est tangentielle à la roue, et ne considérer que le poids de la roue et de toutes les pièces énarbrées décomposé sur chaque tourillon. Nommons donc N cette pression ainsi évaluée, l la longueur du tourillon ; $N \times l$ sera le moment de la puissance qui tend à faire fléchir le plus possible ou même à rompre le tourillon autour de son

collet. Si r est le rayon de ce tourillon, le moment des résistances (3e partie, 77) a pour expression $R \cdot \frac{\pi r^3}{4}$. R est le coefficient de la résistance à la flexion pour le fer, donné par le tableau du n° 72. On se contentera de faire $R = 8.000.000$ pour la fonte, et égal à 14.000.000 pour le fer forgé. On aura, par conséquent . . . . $Nl = R \cdot \pi \cdot \frac{r^3}{4}$. Mais, d'après la loi de Tredgold, la longueur l du tourillon est égale à $0{,}85 \cdot 2r = 1{,}70 \cdot r$;

d'où $$1{,}70 \cdot r \cdot N = R \cdot \frac{\pi r^3}{4},$$

et, par suite,

$$r = \sqrt{\frac{4N \times 1{,}70}{\pi \cdot R}} = \sqrt{\frac{6{,}80 \cdot N}{\pi \cdot R}}.$$

Le tourillon est encore soumis à d'autres causes de rupture, à la torsion, par exemple. D'une part, il est entraîné par l'arbre en vertu de la puissance tangentielle à la roue, et de l'autre il est retenu contre la crapaudine par le frottement. Soit donc F une composante de la puissance, décomposée en deux autres situées dans le plan perpendiculaire à l'axe passant par le collet de chaque tourillon, K la grandeur du rayon de la roue; on aura, en vertu du n° 80,

$$F \times K = T \cdot \frac{\pi r^3}{2},$$

et, par suite, $$r = \sqrt[3]{\frac{2FK}{\pi T}}.$$

On pourra, afin de rendre les calculs plus simples, faire $T = 8.000.000$ pour la fonte et $T = 20.000.000$ pour le fer forgé. Ces nombres sont plus ronds que ceux qui sont portés au tableau du n° 72. Ce calcul étant fait ainsi que le précédent, on choisira le plus grand des deux rayons obtenus. On ajoutera à ce rayon, encore trop faible, une plus-value relative à l'usure, que Tredgold estime au sixième du rayon du tourillon, mais qui nous paraît plutôt devoir être proportionnelle au travail du frottement, et que nous estimons égale à $\frac{Nv}{3000}$ pour un tourillon qui marche tou-

jours. Dans cette dernière formule, v est la vitesse effective à la circonférence du tourillon, et N la pression qu'il supporte.

La règle de Tredgold pour évaluer le diamètre d'un tourillon consiste dans cette formule, $N = 60\ d^2$, dans laquelle N représente la pression du tourillon en kilogrammes et d le diamètre de ce tourillon évalué en centimètres. Ainsi, pour $N = 6000$ kilogr., on trouve $d = 10$ centimètres. Cette charge est celle de l'arbre des martinets de l'usine des Pucelles à Metz, dont le tourillon est de 11 centimètres. Il est vrai qu'en ajoutant à 10 le sixième en sus, comme le veut Tredgold, pour tenir compte de l'usure, on aurait avec sa formule un peu plus de 11 centimètres.

86. *Arbres en bois ou en fonte. Calcul de leurs dimensions.* — Les arbres en bois sont tantôt d'une seule pièce, et tantôt composés de plusieurs parties. Dans le premier cas la pièce est taillée à 6 ou 8 pans dans le sens de son profil (fig. 425), ou même elle est circulaire. Pour lui donner cette dernière forme, des hommes la font tourner sur place autour de son axe par une manivelle armée de béquilles, et un ouvrier enlève avec une gouge toutes les parties de bois excédantes. Si l'arbre se compose de plusieurs pièces, on donne à celles-ci la forme de voussoirs, de façon que leur réunion forme un arbre creux qui se maintient tel, non-seulement par leur arc-boutement, mais encore par la pression extérieure d'une frette dont on les enveloppe les uns et les autres. Au lieu de remplir le vide intérieur, il vaut mieux le laisser, et faire porter le tourillon par un manchon à bras en fonte. Les frettes peuvent d'ailleurs se composer de deux parties armées de pattes qu'on rapproche à volonté au moyen d'écrous et de boulons (fig. 426).

Lorsqu'un arbre est en fer forgé ou en fonte, sa grosseur est au moins égale à celle du tourillon. En général, il n'y a que les petits arbres qu'on construise en fer forgé. Si les arbres en fonte ont une grande portée, on les renfle vers leur milieu.

Les dimensions d'un arbre se calculeront par les règles précédentes dans l'hypothèse de la flexion et de la torsion.

1° *Flexion.* — Les forces qui agissent sur les arbres des machines se réduisent presque toujours aux poids des arbres et des pièces montées dessus ; le tourillon ayant la solidité suffisante, on n'aura qu'à supposer que la flexion se produit vers le milieu de l'intervalle des tourillons. A cet effet on décomposera chacun des poids des

pièces montées sur l'arbre en deux forces appliquées l'une au tourillon le plus voisin, et l'autre au milieu de l'arbre ; les premières composantes seront détruites par la résistance des tourillons. Toutes les autres, appliquées au milieu de l'arbre, seront ajoutées au poids total de cet arbre et formeront une somme que je nomme $2P$, laquelle est censée agir sur le milieu d'une pièce appuyée librement à ses deux extrémités. D'après ce qui a été dit au n° 82, l'arbre aura les mêmes dimensions que s'il était encastré par un bout et sollicité à l'autre par une force P, moitié de celle qui agit à son milieu. On aura, en vertu du n° 77, $P \times L = R \cdot \frac{\pi r^3}{4}$; d'où

$$r = \sqrt[3]{\frac{4PL}{\pi R}}.$$

L est la longueur de l'arbre. R ou le coefficient de résistance à la rupture est donné par le tableau du n° 72. On pourrait, pour abréger, faire $R = 700.000$ pour le chêne, égal à 8.000.000 pour la fonte, et égal à 14.000.000 pour le fer forgé. J'observe en outre que le rayon r sera celui de la section milieu de l'arbre. Si l'arbre est creux, on défalquera le moment de la résistance du creux pour avoir $P \times L$, ainsi qu'il a été dit (3e partie, 83), et en nommant r' le rayon du creux, on aura

$$P \times L = R \cdot \frac{\pi r^3}{4} - R \cdot \frac{\pi r'^3}{4}.$$

Lorsque r' est connu d'avance, cette formule donnera r. Il en sera de même si le rapport de r' à r est donné, ou si, par exemple, $r' = \frac{3}{4} r$. La méthode que nous venons de donner, quoique approchée, est cependant bien suffisante pour la pratique.

2° *Torsion.* — La résistance à la torsion est indépendante de la charge; mais elle dépend des efforts tangentiels aux roues montées sur l'arbre. Si l'une d'elles est poussée dans un sens par la puissance, l'autre est poussée en sens contraire en vertu de la résistance. L'arbre tend à se tordre entre les deux roues, comme si l'une était fixe. Rien n'est plus facile que de trouver l'effort tangentiel F à chaque roue d'après le travail qui leur est communiqué (3e partie, 70). Nommant R le rayon de l'une de celles pour laquelle l'effort est F, et considérant l'autre roue comme fixe, r le rayon de

l'arbre, on aura cette relation des dimensions de l'arbre, pour qu'il ait une résistance suffisante à la torsion (3e partie, 80),

$$F \times K = T \cdot \frac{\pi r^3}{2};$$

d'où

$$r = \sqrt[3]{\frac{2F \times K}{T \cdot \pi}}.$$

Les côtes ou nervures ajoutées à un arbre ne contribuent point à augmenter sa résistance à la torsion.

Si l'arbre était mû par une manivelle, le calcul s'effectuerait de la même manière. F serait l'effort exercé sur le bout de la manivelle et K la longueur de son bras. Cet effort se déterminera d'ailleurs d'après ce qu'on a dit touchant le travail des manivelles. On fera la manivelle plus forte près de l'arbre qu'à l'extrémité, suivant la forme de la parabole d'égale résistance (3e partie, 77), et on calculera les dimensions de sa plus grande section près de l'arbre, de la même manière que pour le balancier d'une machine à vapeur, et d'après l'intensité de l'effort F qui a lieu sur le bouton. Il est inutile de répéter que des deux rayons obtenus pour la section d'un arbre soit par la considération de la flexion, soit par celle de la torsion, on devra choisir le plus grand.

87. *Roues.* — Les roues en bois, à petites dimensions ou de deux mètres de diamètre, ont trois à quatre bras; elles en ont cinq à six (fig. 427), ou même huit, quand elles sont grandes. Ces bras s'assemblent à mi-bois ou à tiers-bois dans l'arbre, et sont destinés à porter les jantes de la roue. La construction de ces roues est trop variée pour que nous entrions dans plus de détails.

Les roues dentées en fonte se coulent d'une seule pièce avec leurs bras quand elles sont petites ou d'un diamètre inférieur à trois mètres. On fait les *rais* ou bras plus larges au moyeu que vers la couronne de la roue, suivant ce qu'indique la parabole de moindre résistance. Ils sont plus minces que la jante n'est large, et on les renforce latéralement par des côtes ou nervures suivant la forme *abdc* (fig. 428), pour s'opposer à la flexion latérale. Voici une table, donnée par Tredgold, des proportions des rais, selon la nature des efforts exercés à la circonférence des roues, en supposant à ces dernières un mètre de rayon, et six rais.

TABLEAU des proportions des rais, d'après les efforts exercés à la circonférence de roues de 1^{m} *de rayon, à* 6 *rais.*

EFFORTS TANGENTIELS à la roue en kilogrammes.	LARGEUR DES RAIS en centimètres.	ÉPAISSEUR DE LA NERVURE en centimètres.
k.	c. m.	c. m.
10	4,20	1,21
40	6,00	2,00
80	8,00	3,00
158	8,50	3,90
244	9,70	4,85
336	10,67	6,50
430	11,64	6,80
580	12,12	8,25
730	13,10	8,75
870	13,80	9,70
1100	14,50	10,67
1210	15,50	11,64
1500	16,00	12,60
1750	16,50	13,68
2200	17,00	14,06
2500	17,50	16,50
2660	18,00	17,00
2840	18,50	17,95
3220	19,00	19,00
3500	19,50	19,40

La première colonne de ce tableau contient les efforts tangentiels à une roue; la deuxième, la largeur la plus grande du milieu du rayon dans le sens du mouvement; la troisième, l'épaisseur ou la saillie de la nervure qui fortifie le rayon. Pour avoir ces mêmes dimensions pour une roue d'un tout autre rayon qu'un mètre, on les multipliera par $\sqrt{r}$, r étant le rayon donné. On pourrait encore ici calculer la largeur des rais par les formules précédentes, en supposant que la rupture se fasse à la base des rais, et que son extrémité du côté de la jante soit sollicitée par l'effort de la couronne. A la rigueur, comme les rais sont au nombre de six, on ne devrait prendre que le sixième de cet effort.

Tredgold suppose qu'on donne aux rais une épaisseur perpendiculaire au plan de la roue, et égale au tiers de l'épaisseur de la jante mesurée perpendiculairement à l'axe; mais il n'indique pas cette dernière dimension. On fait volontiers l'épaisseur de la jante égale à cinq centimètres pour les grandes roues de quatre à six mètres, et à deux ou trois centimètres pour les petites roues d'un mètre. Dans tous les cas elle ne sera jamais moindre que l'épaisseur des dents, afin qu'elle soit en rapport avec la puissance qui sollicite la roue.

L'épaisseur de la jante des roues en fonte doit aussi être déterminée par la considération du *retrait* de la fonte lors de la coulée, et être mise en rapport avec les dimensions des bras, lorsque ceux-ci doivent être coulés avec la jante. Il nous semble que les rapports les plus convenables sont ceux qui permettent à la jante et aux bras de se retirer également pendant le refroidissement. Or, il est certain que la couronne et les bras tendent alors à diminuer à la fois dans la proportion de la longueur de ces derniers; de sorte que, si le refroidissement s'opérait suivant la même loi, tant pour les bras que pour la jante, à chaque instant, ou si le retrait était proportionnellement le même, il n'y aurait ni tension ni traction réciproque des jantes sur les rais; tout se retirerait ensemble. A cet effet on remarquera que la chaleur contenue à l'instant de la coulée est proportionnelle au volume de chaque partie, et le calorique qui s'échappe proportionnel à la surface extérieure de refroidissement. Si donc le rapport du volume à la surface est le même pour les rais et pour la jante, la pièce se retirera également dans toutes ses parties. Calculant, par conséquent, le volume et la surface de la jante, puis ceux des rais, on verra si les rapports respectifs du volume à la

surface sont les mêmes. On aura soin dans cette recherche de tenir compte de la surface développée des nervures. Cette règle apprend que la largeur moyenne des rais doit être presque égale à la largeur de la jante estimée parallèlement à l'axe, lorsque les épaisseurs des rais sont les mêmes que celles de la couronne.

Quand la roue est grande, ou qu'elle a quatre mètres et au delà, on fait la jante d'une seule pièce, et on y assemble les bras au moyen de clefs et d'étriers boulonnés, ainsi qu'on le voit sur la figure 429. Les bras peuvent être en bois ou en fonte. Dans le premier cas, ils se réunissent sur un noyau ou manchon en fonte embrassant l'arbre. Ces bras entrent dans des espèces de *vides*, ou bottes saillantes *mm*, ouvertes du côté extérieur, et y sont maintenus soit par des brides en fer *O* (fig. 429), soit par un plateau en fonte *P* (fig. 430).

Lorsque les bras sont en fonte, ils font corps avec le manchon.

Souvent les roues fort larges sont soutenues par plusieurs jantes et par plusieurs systèmes de bras.

Enfin, si la roue tourne fort vite, et si la jante est épaisse et composée de plusieurs morceaux, comme les volants, la force centrifuge fait effort pour détacher la jante. Cette action est égale à $\frac{P}{g} \times \frac{V^2}{r}$; et, dans cette expression, P représente le poids de la jante, V sa vitesse, et r son rayon. Ces morceaux de jante sont réunis entre eux par des liens de fer encastrés et boulonnés, et attachés avec les bras au moyen d'étriers boulonnés.

XII.

ÉQUILIBRE DES FLUIDES.

88. *Surfaces de niveau.* — Après nous être occupés de la mécanique des solides, nous allons passer à celle des fluides. Sans entrer dans le détail des définitions sur les fluides, qui ont été établies dans les *Préliminaires* de notre Cours de la première année, ainsi que dans tous les ouvrages de physique, nous nous bornerons à dire qu'ils se distinguent en deux genres principaux, le genre *liquide*

et le genre *gazeux* ; que les liquides demeurent en repos sur le fond d'un vase ouvert à sa partie supérieure et que les fluides gazeux s'y étendraient indéfiniment par suite de la répulsion réciproque que le calorique exerce entre leurs molécules. Néanmoins tous les principes que nous allons déduire seront communs aux uns et aux autres. C'est une loi générale de tous les fluides pesants que quand ils sont en équilibre ou en repos, leur surface libre est de niveau ou perpendiculaire dans tous ses points à l'action de la gravité. Si, en effet, cette dernière force n'était pas perpendiculaire à la surface du fluide, on pourrait décomposer cette force pour chaque molécule en deux autres, l'une perpendiculaire à la surface et l'autre située dans le plan tangent à la surface près de la molécule ; bien que la première soit détruite par la résistance de la surface, il n'en est pas de même de la seconde composante, car elle produirait le mouvement sur sa molécule d'autant plus facilement que toutes les autres molécules seraient entraînées par des composantes analogues. On voit, d'après cela, que la surface d'un liquide en repos ou en équilibre doit avoir tous ses éléments perpendiculaires à la direction de la gravité. A la surface de la terre, la mer, les grands lacs sont terminés par des surfaces de niveau à peu près sphériques, dont le centre est celui de la terre ; dans une petite étendue, le niveau des liquides (comme, par exemple, pour l'eau contenue dans un vase) est un plan horizontal.

89. *Principe de l'égalité de pression.* — Considérons un fluide pesant contenu dans un vase *ABDC* (fig. 431), et dont *MN* est la surface de niveau. Les diverses parties de ce fluide au repos ou en équilibre sont soumises à deux espèces de pressions dont l'une provient de la gravité, et l'autre d'une cause extérieure qui presse sur tous les points de la surface *MN*. En faisant d'abord abstraction de la gravité, examinons comment, dans l'état d'équilibre du fluide, la pression extérieure se transmet de molécule à molécule jusqu'aux parois du vase. Si cet équilibre subsiste, il est clair qu'il ne sera pas troublé par la supposition qu'une portion *m* quelconque de ce fluide se congèle ou se solidifie. Pour que cette portion ne puisse prendre aucun mouvement, il faut qu'elle soit pressée de toutes parts, de façon que la résultante des pressions qu'elle éprouve soit zéro. Parmi toutes les combinaisons qui sont susceptibles de satisfaire à cette condition de l'équilibre, la combinaison spéciale et

caractéristique des fluides est celle en vertu de laquelle, toutes les pressions exercées sur les faces qui terminent un fluide sont égales entre elles si ces faces sont égales, ou proportionnelles à ces faces si celles-ci sont inégales.

Voici comment on reconnaît qu'en effet l'équilibre a lieu lorsque les pressions d'un fluide sont également réparties ou transmises sur ses diverses faces, ou sur celles du vase qui le contient, quelle que soit la forme de ce dernier. Soit *ABC* (fig. 432) un triangle plan fluide dont les côtés *AB*, *BC* et *AC* sont pressés également dans tous leurs points, ou supportent des pressions résultantes proportionnelles à leurs longueurs, pressions qui sont évidemment appliquées à leurs milieux *G*, *F* et *D*, selon les perpendiculaires *LO*, *FO* et *OH*. Je dis qu'un tel triangle est en équilibre. Car d'abord ces trois perpendiculaires concourront en un même point, centre du cercle circonscrit ou triangle. Prenant sur chacune d'elles les parties *OL*, *OI* et *OH*, proportionnelles aux pressions qu'elles représentent et par suite aux côtés *AB*, *BC* et *AC*, et construisant sur deux de ces pressions *OI* et *OH* le parallélogramme *OIKH*, sa diagonale *OK* sera égale à la résultante des pressions exercées sur les côtés *BC* et *AC*. Le triangle *OIK*, dont les deux côtés *OI* et *IK* sont à la fois perpendiculaires et proportionnels aux deux côtés *BC* et *AC* du triangle *ABC*, est évidemment semblable à ce dernier. Donc son troisième côté *OK*, c'est-à-dire la résultante des pressions des côtés en question, est aussi à la fois perpendiculaire et proportionnel à *AB*; c'est-à-dire, en un mot, qu'elle est égale et directement opposée à la pression que supporte ce troisième côté. Or, il y a équilibre entre trois forces, toutes les fois que la résultante de deux d'entre elles est égale et directement contraire à la troisième force.

Si le fluide est contenu dans un polygone plan quelconque *ABCED* (fig. 433) dont les côtés sont également pressés dans tous leurs points, l'équilibre se vérifie de la même manière. Car la résultante des pressions sur *AB* et *BC* passera par le milieu du côté *AC* du triangle *ABC* et lui sera à la fois perpendiculaire et proportionnelle, de sorte que les pressions *AB* et *BC* seront remplacées par la pression proportionnelle exercée sur le côté *AC*. On ferait voir de même que la pression proportionnelle exercée sur le côté *DC* du triangle *DAC* pourra être substituée aux pressions sur *DA* et *AC*, ou remplacer les pressions proportionnelles qu'éprouvent les

trois côtés *AB*, *BC* et *AD* du polygone. Il ne reste donc qu'à voir si l'équilibre a lieu sur le triangle *DCE*, dont les trois côtés *DC*, *DE* et *EC* sont également pressés sur tous leurs points. Or, il est évident que cet équilibre est justifié d'après la proposition précédente. Ainsi le fluide est en équilibre lorsqu'il est contenu dans un polygone plan dont les côtés sont pressés également dans tous leurs points.

Si le fluide est renfermé dans une pyramide triangulaire, pressée par des forces proportionnelles à ses quatre faces, ces forces perpendiculaires à ces faces iront encore concourir en un même point, et il serait facile de prouver que la résultante de trois d'entre elles serait à la fois perpendiculaire et proportionnelle à la quatrième face, ou qu'elle serait égale et directement contraire à la pression de la quatrième face. De la pyramide triangulaire on passe aux polyèdres, puisqu'ils peuvent se décomposer en pyramides triangulaires ayant une face commune, chacune à chacune. Enfin, on justifie l'équilibre d'un fluide sur une surface courbe quelconque dont tous les points sont également pressés, puisqu'une telle surface peut être regardée comme un polyèdre d'une infinité de faces. D'où nous conclurons que, quelle que soit la forme d'un vase dans lequel un fluide est contenu, ce dernier y sera toujours en équilibre, pourvu que les pressions transmises dans tous les points de ses parois soient égales; et comme un fluide jouit de la propriété exclusive de transmettre également la pression dans tous les sens, l'équilibre sera toujours possible, quelle que soit la forme du vase qui le renferme.

Cette proposition très-importante fait voir qu'un fluide supposé sans pesanteur, qu'on renfermerait dans un vase, ne saurait, en réagissant contre les parois, soit par lui-même, soit en vertu de la pression extérieure d'un piston, produire aucun mouvement sur le vase. Car les pressions qu'il exerce contre les parois du vase étant les mêmes dans tous les points du vase, il y a nécessairement équilibre, quelle que soit la figure de ce dernier. C'est ainsi que quand du vin de Champagne est contenu dans une bouteille, celle-ci ne tend pas à glisser, et cependant le fluide réagit dans tous les sens.

90. *Définition de la pression, moyens de la multiplier.* — Le principe de l'égalité de pression nous permet de définir la pression exercée par un fluide sur une surface donnée. Car si tous les points

de cette dernière sont également pressés, la pression totale qu'elle supportera sera proportionnelle à la grandeur de son aire. Nommant p le nombre de kilogrammes de la pression par unité de surface ou pour un mètre carré, A l'aire en mètres carrés de la surface qu'on considère, on aura $p \times A$ pour la mesure de la pression qui agit sur la surface A. On peut donc multiplier à volonté une pression exercée sur un fluide, puisqu'il suffira d'agrandir la surface contre laquelle réagit ce fluide. C'est ainsi qu'en pratiquant à un vase une petite ouverture ou un petit tuyau fermé par un piston (fig. 434), une pression modérée sur ce dernier se distribue sur toutes les parois du vase, et devient énorme sur les surfaces de ces dernières quand elles sont considérables. Si, par exemple, la surface du piston étant des centimètres carrés, sa pression est de 5 kilogr., et que la surface intérieure des parois du vase soit de 10 000 centimètres carrés, les parois supporteront une pression totale de $5 \times 10\,000$ ou de 50 000 kilogr. Considérons encore un liquide dont nous faisons toujours abstraction du poids, contenu dans deux vases communiquant entre eux par un canal O (fig. 435) et pressé par un piston A que sollicite une force P. On demande la pression totale que transmettra ce liquide contre la face d'un piston B qui s'oppose à sa sortie. Si je nomme s la surface du piston moteur, p la pression qu'il reçoit pour une unité de surface, on aura évidemment $P = sp$. Or, cette pression unitaire p doit, à cause du principe d'égalité de pression, être transmise intégralement à tous les points du liquide, et par suite à tous les points de la surface du piston résistant B, surface que je désigne par s; en sorte que la pression totale qu'il recevra sera égale à sp. D'où on voit que les pressions totales des pistons A et B sont proportionnelles à leurs surfaces respectives s et S, ou que celle du piston B sera dix fois, cent fois plus grande que celle du piston A, selon que S sera égale à $10s$, à $100s$. Mais ce n'est point une raison pour que le travail du piston résistant B augmente dans la même proportion; il ne peut même être qu'au plus égal au travail du piston moteur A. En effet, si je désigne par H la hauteur dont ce dernier descend, le travail dépensé par ce piston est égal à $P \times H$ ou à $sp \times H$. Soit h la hauteur de course dont monte le piston résistant pendant que l'autre est descendu de H, le travail de la résistance du piston B aura pour expression $S \times p \times h$. Mais l'eau n'étant pas sensiblement compressible, ne saurait avoir changé de volume pendant

la descente du piston A et pendant la montée simultanée du piston B, de sorte que la diminution apportée à ce volume par la course de A se trouve précisément égale à l'augmentation apportée par la course de B. On aura donc

$$s \times H = S \times h,$$

et, par suite,

$$s \times p \times H = S \times p \times h.$$

Donc, les deux travaux sont égaux, et s'il est possible de produire des pressions énormes, on ne saurait pour cela augmenter le travail.

En admettant, *à priori*, que les deux travaux sont égaux, ainsi que cela résulte du principe de la transmission de travail, on en conclut que les pressions totales des pistons sont proportionnelles à leurs surfaces respectives : car, en appelant P et Q les pressions totales, on a, pour hypothèse,

$$P \times H = Q \times h.$$

D'ailleurs, les hauteurs H et h sont en raison inverse des surfaces, à cause de l'incompressibilité du liquide ; il en est de même à l'égard des pressions : en combinant ces deux proportions on trouvera le principe précédent.

91. *Pression des fluides pesants.*—Jusqu'ici nous n'avons examiné que la transmission opérée de molécule à molécule pour un fluide, de la pression exercée à sa surface ; cette pression, qui se propage intégralement dans tous les sens, peut être désignée sous le terme générique de *pression hydrostatique*, pour la distinguer de celle qui provient uniquement des forces qui, comme la pesanteur, sollicitent toutes les molécules. Car cette dernière pression ne se comporte plus de la même manière ; elle est constante pour tous les points d'une même tranche horizontale, et varie d'une tranche à l'autre, en raison de la charge du fluide supposée au-dessus de chacune d'elles. En un mot, la pression due à la pesanteur ne se propage pas dans le fluide de bas en haut, au lieu que la pression hydrostatique se communique et reste constante dans tous les sens.

Soit donc un fluide pesant reposant dans un vase et dont la sur-

face *AB* (fig. 436), supérieure et horizontale, est pressée par une certaine pression extérieure. Décomposons ce fluide en tranches horizontales, et considérons de l'une d'elles un cube *abdc*. Si le fluide était sans pesanteur, toutes les faces de ce cube seraient pressées également ; en sorte que les pressions sur les faces horizontales et sur les faces latérales seraient égales non-seulement pour deux faces opposées, mais encore pour toutes. Mais le cube *abdc* est pesant aussi bien que le fluide entier; ce poids altère nécessairement la pression qui provient de l'extérieur et qui s'exerce sur *ab*, c'est-à-dire que la pression exercée sur les cinq autres faces, ou sur la face inférieure *cd* et sur les faces latérales *ac* et *bd*, devient égale à la pression sur *ab* plus le poids du cube *abdc*. Si, d'ailleurs, on suppose une colonne entière ayant *fg* pour base et traversant dans le vase toute la hauteur du fluide, et qu'on décompose cette colonne en tranches horizontales, on verra sans peine que les faces latérales et la base inférieure de la première tranche sont pressées par la pression extérieure sur *fg*, plus le poids dû à la hauteur de cette première tranche ; que dans la deuxième tranche, la pression sur sa face inférieure et sur ses faces latérales équivaut à la pression extérieure sur *fg*, plus le poids des deux premières tranches, ou le poids dû à la hauteur du niveau *AB* au-dessus de la base de cette seconde tranche; en un mot, pour chaque tranche, la pression transmise sur sa base, et latéralement, est mesurée par la somme de la pression extérieure, et du poids de la hauteur de fluide superposé. Enfin, si on prolonge ces tranches jusqu'à ce qu'elles rencontrent les parois du vase, on verra de même que ces parois sont inégalement chargées, et que leur pression en chaque point par unité de surface se mesure de la même manière que celle qui a lieu constamment pour chaque tranche correspondante.

92. *Examen de la pression des fluides pesants dans des vases irréguliers.* — On pourrait croire que dans un vase dont les parois sont inclinées et plus rapprochées au sommet qu'à la base, la pression hydrostatique pour les points de chaque tranche *ab* (fig. 437) est seulement augmentée du poids de la colonne verticale *Aa* du fluide comprise entre cette tranche et la paroi inclinée *CA*. Mais c'est une erreur facile à rectifier, en observant qu'un autre point *m* de cette tranche, situé au-dessous du niveau supérieur *AB*, reçoit une pression égale à la pression hydrostatique exercée sur ce niveau,

augmentée de celle qui est due au poids de la hauteur nm de ce niveau au-dessus de la tranche que l'on considère. D'ailleurs, cette tranche transmet horizontalement et perpendiculairement à la paroi AC en a cette même pression totale ; de sorte que ce point a est pressé et par la pression extérieure et par le poids de la colonne verticale ayant pour hauteur celle du niveau AB au-dessus de la tranche à laquelle le point a de la paroi appartient. Quant à la pression unitaire en chaque point, elle se compose de la pression hydrostatique par unité de surface, augmentée du poids d'une colonne fluide ayant cette unité pour base, et pour hauteur celle du niveau au-dessus du point dont il s'agit.

Pour concevoir que la pression naturelle exercée à la surface supérieure AB peut être quelconque, imaginez que cette surface devienne solide et qu'elle soit pressée par un poids quelconque ; on reconnaît ensuite que cette pression se transmettant intégralement d'une tranche à l'autre du fluide pesant à la surface duquel elle agit, s'augmente successivement du poids des diverses tranches qu'elle pénètre, et qu'elle devient d'autant plus considérable que la profondeur des points du fluide est plus grande. Ainsi, par exemple, la surface de la mer est pressée par la pression atmosphérique ; en s'y enfonçant on éprouve des pressions de plus en plus grandes (*cloche du plongeur*).

Quant à la pression atmosphérique, qui presse également sur tous les points de la surface de la mer, il est encore possible de s'en rendre compte. Quoiqu'on ne puisse assigner la cause qui ferait que la hauteur de l'atmosphère fût limitée, toujours est-il qu'en la décomposant en couches successives, la couche la plus élevée n'a rien à supporter, la deuxième supporte la première, la troisième la deuxième, et ainsi de suite ; les pressions vont ainsi en augmentant à mesure qu'on se rapproche de la terre, et elle est la plus grande à la surface des eaux. Cette pression, qu'on nomme atmosphérique et qui est ordinairement la pression extérieure des liquides, se mesure par le baromètre : elle est de $1^k,033$ par centimètre carré ; et elle équivaut au poids d'une colonne qui, ayant cette même base, aurait pour l'eau une hauteur de $10^m,33$, et pour le mercure $0^m,75$. Ainsi, donc, dans une tranche ab, d'un fluide que contient un vase, chaque point d'elle-même, ou de la paroi du vase qui lui correspond, est pressé par la pression atmosphérique et par le poids de la hauteur du niveau du fluide au-dessus de la tranche. On peut se

demander comment les parois peuvent résister à une pression si considérable. En y réfléchissant, on aperçoit que si, par l'intermédiaire du fluide, le vase est pressé du dedans au dehors par l'air atmosphérique qui agit sur le niveau supérieur du fluide, d'un autre côté il est pressé du dehors au dedans par l'air libre qui l'environne extérieurement; de sorte qu'en réalité les parois ne sont pressées que par le poids du fluide renfermé dans le vase.

Le raisonnement précédent, qui prouve que la pression résultante par un fluide pesant contre les parois du vase qui le contient, est égale au poids de la charge au-dessus de ces parois, fait voir que le fond est pressé par un poids plus considérable que celui du fluide qui y est renfermé. Ainsi, dans un vase tel que *EFDC*, (fig. 438) la pression sur le fond *CD* équivaut au poids du prisme *CDHG*, lequel est plus grand que le poids *ABDC* contenu dans ce vase; cependant la pression du fond *CD* contre une table n'est pas plus forte que le poids total du vase et du fluide. On explique ce paradoxe, en recherchant la pression exercée par le fluide en chaque point du vase, au moyen des principes précédents et en décomposant chacune d'elles en deux autres, l'une horizontale et l'autre verticale. Rien n'est plus facile que de faire voir que toutes les pressions horizontales s'entre-détruisent et qu'ainsi le vase ne peut glisser sur le plan horizontal qui le supporte. Mais, parmi les pressions verticales, les unes sont dirigées de bas en haut et les autres de haut en bas. La somme de ces dernières n'est autre chose que la pression totale exercée sur le fond *CD*, et si on retranche la somme de celles qui s'exercent de bas en haut, leur différence, qui est précisément la pression du fond *CD* contre la table ou le plan horizontal, se trouve être précisément égale au poids du liquide (*).

(*) Supposons, pour plus de simplicité, un vase *ABDC* (fig. 440), dont la largeur perpendiculaire au plan du dessin soit égale à l'unité de longueur, et considérons l'élément qui a pour largeur cette unité et pour hauteur la petite portion de courbe *MM'* que nous regarderons comme une petite ligne droite. Faisant abstraction de la pression atmosphérique pour laquelle, comme nous le savons, le vase est en équilibre, nous aurons pour la pression due à la pesanteur sur l'élément *MM'*, $\pi \times Mm \times MM'$ (π est le poids de l'unité de volume du liquide). Cette pression, étant perpendiculaire à l'élément, sera dirigée selon la perpendiculaire *PM*. Sa composante verticale *QM*, dirigée de bas en

93. *Application de la pression des fluides pesants.* — Quelle que soit l'étendue et la forme du vase *ABDC* (fig. 439), non-seulement chaque tranche *ab* quelconque horizontale est pressée par un poids de liquide égal à celui d'un prisme qui a cette même tranche pour base et pour hauteur l'abaissement *Mh* de cette tranche au-dessous du niveau supérieur *AB*, mais encore chaque point *a* de la paroi est pressé, sur l'unité de surface, normalement à la paroi en cet endroit par une colonne de fluide ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur la hauteur *Mh*, et cette pression unitaire contre la paroi est mesurée par le poids de ce dernier prisme.

Ce qui précède s'applique aussi aux siphons ou vases recourbés ouverts par les deux bouts (fig. 441); les surfaces libres y sont de niveau, et la pression à chaque hauteur se mesure comme ci-dessus. On peut d'ailleurs démontrer encore ces propriétés, en imaginant un tuyau dans un vase rempli d'un fluide en équilibre, l'équilibre n'étant pas troublé par cette hypothèse, il faudra qu'il ait lieu séparément dans le tuyau.

Si, au lieu d'un seul liquide, on en considère plusieurs de densités différentes, renfermés dans un même vase, le plus lourd occupera le fond, le plus léger la surface supérieure, et ceux de densités moyennes s'établiront entre ces deux liquides extrêmes. La surface de séparation entre deux liquides différents sera visiblement de niveau, et cela se démontre comme pour la surface supérieure d'un seul liquide. Enfin, la pression sur le fond est égale à

---

haut, est donnée par la proportion

$$PM : QM :: MM' : MO,$$

d'où

$$QM = PM \times \frac{MO}{MM'}$$

$$= \varpi \cdot Mn \times MM' \times \frac{MO}{MM'} = \varpi \cdot Mn \times MO$$

$$= \varpi \cdot Mnm'O = \varpi Mnm'M'.$$

On verrait de même que la somme des pressions verticales de bas en haut provenant de celles qui sont exercées contre les autres éléments des parois, est représentée par la somme des rectangles analogues à *Mnm'M'*, c'est-à-dire par l'aire de la courbe *ACH*. Or, la pression de haut en bas sur le fond *CD* est proportionnelle à *BHCD* ou à *ABDC* + *ACH*. Donc la pression résultante du fond est proportionnelle à *ABDC* + aire *ACH* — aire *ACH*, c'est-à-dire à *ABDC*. Donc elle équivaut au poids du liquide renfermé dans le vase.

la somme des poids des prismes des divers liquides qui ont pour base commune la surface du fond et pour hauteur respective celle de la tranche qui constitue chaque liquide en particulier. C'est ainsi que les choses se passent dans l'atmosphère. Celle-ci presse du poids de toutes ses couches la surface de la terre.

94. *Détermination de l'épaisseur des vannes, des batardeaux ou des digues.* — Il est intéressant de connaître la pression du fluide sur chaque point du vase qui le contient. L'eau, par exemple, est souvent renfermée, en volume considérable, dans des réservoirs que ferme d'un côté un massif en maçonnerie, avec un vide pour laisser échapper, au besoin, l'eau de la *retenue*. La communication de ce vide se trouvant d'ailleurs interceptée par une surface plane qu'on ouvre ou qu'on ferme à volonté, et qui se nomme *vanne*, on voit qu'il est nécessaire de calculer la pression sur cette vanne, afin de lui donner une épaisseur nécessaire pour résister aux effets de cette pression. Soit, par exemple, AB (fig. 442) une vanne fermant un réservoir dans lequel l'eau occupe le niveau MN; nommons l la largeur de l'ouverture de cette vanne dans le sens perperpendiculaire au plan du tableau. Décomposons le fluide par tranches horizontales qui coupent la vanne en zones, dont la hauteur, telle que $ab = x$, est très-petite. Soit enfin h la hauteur du niveau MN au-dessus de l'une de ces zones; la pression due au poids du fluide sur la zone ab de la vanne sera égale au poids du prisme d'eau ayant pour base la zone ab et pour hauteur la hauteur h. Si je désigne par π le poids d'un mètre cube d'eau ou 1000 kilogr., et que j'observe que l'aire de la zone en question a pour mesure $l \times x$, la pression cherchée sera représentée par $\pi h \times l \times x$. D'où l'on voit que la pression contre la vanne croît proportionnellement à la profondeur de ses divers points au-dessous du niveau, de sorte que ses épaisseurs devraient croître depuis son sommet jusqu'à la base. Ordinairement on donne à la vanne une épaisseur constante ; mais en même temps cette épaisseur doit correspondre à la pression la plus grande parmi celles qui agissent aux divers points de la surface de la vanne. Considérons donc la zone la plus basse Bb, et nommant a cette hauteur fort petite, H la hauteur du niveau MN au-dessus de son milieu ; il est évident que la pression sur cette zone aura pour valeur $\pi Hl \,.\, a$ appliquée au milieu de cette longueur. Enfin, la zone repose par ses extrémités

dans deux encastrements, et nous avons vu, au chapitre X, *de la résistance des matériaux*, que la charge capable d'altérer l'élasticité d'une telle pièce était le quadruple de celle qui produirait un effet analogue à l'extrémité de la même pièce encastrée par l'autre extrémité (3e partie, 77, 82). Si donc j'appelle b l'épaisseur de la vanne, nous aurons l'égalité

$$\frac{\pi Hla}{4} = \frac{Rab^2}{6l}, \quad \text{ou} \quad \frac{\pi Hl}{2} = \frac{Rb^2}{3l};$$

d'où

$$b = l\sqrt{\frac{3\pi H}{2R}}.$$

Telle doit être l'épaisseur à donner à la vanne.

Cet exemple si simple nous conduit naturellement à la question de l'équilibre des batardeaux en maçonnerie destinés à soutenir à une hauteur donnée les eaux d'un réservoir. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que ce batardeau soit terminé du côté du fluide par une face verticale. Nous conserverons les mêmes dénominations que tout à l'heure. H est la hauteur du niveau MN au-dessus du plan inférieur de la fondation (fig. 443), h l'enfoncement d'un élément quelconque ab de la face verticale du batardeau; l est la longueur du batardeau; π est le poids du mètre cube d'eau. Enfin, la pression sur l'élément ab est $\pi lx \times h$. On trouverait pour tout autre élément que sa pression serait $\pi lx'h'$. Faisant la somme de toutes ces pressions qui sont perpendiculaires à la face du batardeau, on aura leur résultante, ainsi que la pression totale dont la valeur sera

$$\pi\,(lx \,.\, h + lx'h' + \ldots).$$

Or, lxh n'est autre chose que le moment de l'élément de la face plongée du batardeau par rapport au niveau supérieur, et nous savons qu'une pareille somme est égale à l'aire totale plongée, multipliée par la distance du centre de gravité de cette dernière au niveau supérieur. Donc la pression totale contre une face plane rectangulaire plongée dans un fluide est égale au poids d'un prisme d'eau ayant pour base la partie plongée et pour hauteur celle du niveau au-dessus du centre de gravité de cette partie plongée; ce résultat est indépendant de l'inclinaison de la face.

Si, comme nous l'avons dit, on suppose verticale la face intérieure

du batardeau, toutes les pressions deviennent horizontales et tendent à faire glisser le batardeau sur sa base. Nommant P le poids de ce batardeau, f le coefficient du frottement de la maçonnerie contre le terrain, coefficient qui est environ $\frac{1}{3}$, fP ou $\frac{P}{3}$ sera la résistance que le batardeau oppose à l'effet des pressions horizontales. Si on trouve que $\frac{P}{3}$ est moindre que la résultante de ces dernières, on élargira la base du batardeau des extrémités de laquelle partent les talus qui le terminent, jusqu'à ce que le poids P du batardeau ait été augmenté de manière que $\frac{P}{3}$ soit égal à la résultante des pressions ; et nous parviendrons ainsi à la connaissance des dimensions du batardeau nécessaires pour qu'il résiste au glissement.

Ce batardeau pourrait néanmoins encore tourner autour de l'arête extérieure K de sa base, si le moment de la résultante des pressions n'était rendu égal au moment du poids du batardeau par rapport à cette même arête K. En supposant que le batardeau soit terminé par deux faces verticales, et en appelant E son épaisseur inconnue, π' le poids d'un mètre cube de maçonnerie lequel est d'environ 2000 kilogr., $\pi' H \times E \times l$ sera le poids du batardeau. Son moment, attendu que la verticale de son centre de gravité passe par le milieu de l'épaisseur, aura pour valeur

$$\pi' H \times E \,.\, l \,.\, \frac{E}{2} = \pi' \,\frac{H l E^2}{2}$$

$$= 2000 \,.\, \frac{H l E^2}{2} = 1000 \,.\, H l E^2.$$

Arrivons à la détermination du moment de la pression résultante du fluide ; elle se réduit à trouver le point d'application de cette dernière. Pour obtenir ce point d'application, nous chercherons d'abord le moment de ces pressions par rapport à un plan quelconque, et nous choisirons pour ce plan le plan de niveau supérieur MN. Il est évident que, dans ce cas, le bras de levier de la pression sur l'élément quelconque ab sera h, en sorte que le moment de cette pression partielle sera $h \times \pi l x h$, ou $\pi \,.\, l \,.\, x \,.\, h^2$. Un moment analogue s'obtenant pour une autre pression partielle, il ne s'agira

plus, pour avoir la somme de ces moments, que de chercher une somme de produits tels que ϖh^2. Considérez une pyramide régulière dont la base soit un carré qui a pour côté sa hauteur H, il est évident que toutes les sections de cette pyramide parallèles à cette base seront des carrés, et que leur côté est aussi égal à leur distance au sommet (fig. 444). Désignant par h une de ces distances, et cherchant le volume intercepté entre deux tranches distantes entre elles d'une quantité très-petite et égale à ϖ, le produit ϖh^2 sera ce volume intercepté, et la somme de tous ces volumes équivaudra au volume total de la pyramide, ou à

$$\frac{H}{3} \times H^2 = \frac{H^3}{3}.$$

Donc, la somme des moments $\pi l\ (\varpi h^2 + \varpi' h'^2 + \ldots)$ aura pour valeur $\pi \frac{lH^3}{3}$, expression dans laquelle H représente la hauteur totale du niveau MN au-dessus du pied du batardeau. Si nous divisons $\frac{\pi l H^3}{3}$ par la pression totale ou par $\pi l H \times \frac{H}{2}$, le quotient $\frac{2}{3} H$ indique que le point d'application de la pression totale ou le *centre de pression*, est situé aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur entière de la face verticale à partir du niveau, ou au tiers de cette même hauteur à partir du point le plus bas K. Donc le moment total de la pression par rapport à ce dernier point sera

$$\frac{\pi l H^2}{2} \times \frac{H}{3}, \quad \text{ou } \pi \frac{lH^3}{6} = 1000^k . \frac{lH^3}{6}.$$

Égalant enfin ce moment à celui que nous avons obtenu pour le poids du batardeau, nous aurons cette relation,

$$1000\, HlE^2 = 1000 \frac{lH^3}{6}, \quad \text{ou } E^2 = \frac{H^2}{6},$$

ou enfin,

$$E = H \sqrt{\frac{1}{6}} = 0{,}408 . H.$$

L'expérience apprend que les batardeaux doivent avoir au moins 1^m d'épaisseur, pour ne pas laisser l'eau s'y infiltrer. On fera donc toujours $E = 1^m$, tant que la hauteur H du batardeau sera moin-

dre que 2^m. Dans les constructions on se sert d'une règle empirique fort simple pour fixer l'épaisseur des murs de quai qui soutiennent à la fois l'eau et la poussée des terres. Le talus extérieur de ces murs étant de $\frac{1}{8}$ à $\frac{1}{10}$, on prend à la moitié de la hauteur, l'épaisseur égale au $\frac{1}{3}$ de cette hauteur. Pour les bajoyers d'écluse, cette même épaisseur s'élève à la moitié de la hauteur; c'est plus que le calcul précédent n'indique.

Si les digues sont en terre, on leur donne 2 mètres d'épaisseur au sommet, et comme elles sont terminées par des talus naturels en amont et en aval, on s'assure seulement qu'elles peuvent résister au glissement.

95. *Épaisseur des chaudières à vapeur, des tuyaux de conduite, etc.* — Nous avons vu que quand un fluide est contenu dans un vase, il exerce en tous ses points deux pressions, dont l'une, dite *hydrostatique*, due soit à une pression extérieure exercée par un piston ou de toute autre manière à sa surface, soit à la tension même du fluide, se distribue uniformément sur tous les points du vase, et dont l'autre, due au poids du fluide, est proportionnelle à l'abaissement de chaque point du vase au-dessous du niveau supérieur. Mais il arrive souvent que la pression hydrostatique est très-considérable par rapport à la charge du fluide, et qu'on peut faire abstraction de la pression due au poids. Cette circonstance est principalement applicable à la vapeur contenue dans une chaudière ou dans des tuyaux de conduite, et rend très-facile le calcul des épaisseurs des vases dans lesquels elle est renfermée.

Considérons donc une chaudière ou tuyau cylindrique (fig. 445) dans lequel la vapeur exerce une pression ou tension représentée par p par unité de surface. Si R est le rayon intérieur du cylindre et l sa longueur parallèle à l'axe, $2\pi R \times l$ sera sa surface intérieure et $2\pi Rl \times p$ la pression totale que cette surface supporte. Si, en vertu de cette pression, le tuyau tend à se dilater, et que son rayon devienne $R + r$, r étant un très-petit accroissement de ce rayon, ce petit accroissement représentera le chemin parcouru par les divers points du vase dans les directions de la pression, en sorte que $2\pi Rlp \times r$ sera le travail dépensé par la pression totale pendant la dilatation r. Mais la circonférence intérieure, de $2\pi R$ qu'était

son développement, est devenue $2\pi\ (R + r)$, et s'est aussi accrue de $2\pi r$.

Cette dernière valeur sera évidemment le chemin parcouru par le point d'application de la résistance des parois à cette véritable traction. Nommons B le coefficient de la résistance à la traction de la substance qui constitue le tuyau, e son épaisseur, $l \times e$ sera l'aire de son profil, et Bl la mesure de sa résistance. Par conséquent, le travail de la résistance de la chaudière sera $Ble \times 2\pi r$. Mais, en vertu du principe de la transmission du travail, le travail de la puissance est égal à celui de la résistance ; d'où

$$2\pi Rlp \times r = Ble \times 2\pi r,$$

ou bien, en supprimant les facteurs communs aux deux termes,

$$R \,.\, p = B \,.\, e,$$

et, par suite,

$$e = \frac{R \,.\, p}{B}.$$

Dans cette formule les longueurs sont rapportées à l'unité de mesure qui est le mètre ; p est la pression de la vapeur par mètre carré. On fera $p = 10330^k, \ldots = 20660^k, \ldots$ selon que la pression de la vapeur sera de 1, 2, ... atmosphères. On se rappellera que la valeur de B est égale à $8.000.000^k$ pour le fer laminé, égale à $4.000.000^k$ pour la tôle de cuivre, égale à 340.000^k pour le plomb, et à 500.000^k pour le verre.

Lorsque, dans un cylindre vertical, la charge du fluide cesse d'être négligeable, on décomposera le cylindre en tranches, et on cherchera sur chaque tranche la pression exercée par unité de surface en y comprenant celle qui est due à la charge. La formule précédente donnera pour chaque tranche des épaisseurs différentes et plus considérables à mesure que la tranche se rapproche du fond. Mais, comme en pratique on construit les chaudières ou les tuyaux avec une épaisseur uniforme, on choisira celle qui est trouvée pour le fond.

Jusqu'ici on a supposé au tuyau ou à la chaudière une longueur indéfinie ; et il arrive souvent que l'un ou l'autre est terminé par un fond qui rend le système plus solide. Dans tous les cas on ne doit point compter sur cet excès de solidité. Si ce fond n'était pas appuyé contre un plan inébranlable, il conviendra de lui donner une épaisseur capable de résister à toute la charge du fluide qu'il

supporte. Cette question, qui n'a point encore été abordée dans toute sa rigueur, peut être traitée ainsi qu'il suit, avec une approximation suffisante pour la pratique.

Comme ce fond fait corps avec le cylindre, on le supposera réduit à une zone *ABDC* (fig. 446), symétriquement placée par rapport au centre *O* et dont la largeur *AB* soit égale au rayon *R*. Puis on regardera cette zone comme un corps prismatique encastré à ses deux bouts et chargé à son milieu d'un poids égal à la pression totale du fluide sur le fond. On calculera l'épaisseur de cette pièce comme on l'a fait pour celle de la vanne (3e partie, 94) et il est évident que l'épaisseur obtenue pour la zone *ABDC* conviendra à *fortiori* pour les autres bandes du fond. Enfin, il est encore une dernière considération qu'on ne doit pas négliger, c'est que le fond ne puisse pas être arraché du cylindre. Or, en cherchant la pression totale sur le fond, qui comprend, bien entendu, la pression hydrostatique et celle qui est due au poids du fluide, on la supposera également répartie sur la surface de l'anneau. Si on détermine la résistance de ce même anneau, laquelle est proportionnelle à sa surface et s'estime facilement, on verra si cette dernière est plus grande que la pression totale.

96. *Équilibre des corps flottants.* — Considérons un liquide en équilibre dans un vase; il est visible que cet équilibre ne sera pas troublé si on suppose qu'une masse quelconque *O* (fig. 447) de ce liquide s'enveloppe d'une croûte très-mince et parfaitement solide. Dès lors cette masse *O* pourra être regardée comme un fluide renfermé dans un vase, lequel repose sur la tranche *PQ* qui lui est immédiatement inférieure, comme sur un plan invariable; et, d'après ce que nous avons vu (3e partie, 92), la pression que la masse *O* exercera sur cette tranche, ou qui sera détruite par cette tranche, sera égale au poids du volume *O* du fluide. Remplaçons maintenant ce volume *O* de fluide par un corps de même volume et de matière différente; puisque la tranche fluide oppose à ce corps une pression égale au poids du volume fluide dont ce dernier tient la place, on doit en conclure que ce corps ainsi plongé perd de son poids une quantité précisément égale à celui d'un pareil volume du fluide. Ce principe, découvert par Archimède, est employé en physique pour trouver la pesanteur spécifique ou la densité des corps.

Lorsque le corps est moins pesant que le volume du fluide égal

au sien, il flotte à la surface de l'eau de manière à y rester en équilibre. Ce qui exige que la résultante des pressions verticales qu'il éprouve de bas en haut de la part du fluide soit égale et directement contraire à la résultante de toutes les forces de pesanteur qui sollicitent ce corps de haut en bas. La première résultante est, comme nous venons de le voir, égale au poids du volume de fluide déplacé par le corps, la seconde est le poids du corps lui-même. Ainsi, pour première condition de l'équilibre du corps flottant, il faut que le poids du volume de fluide déplacé soit égal au poids total du corps. La seconde condition résulte de ce que les résultantes des deux genres de pression sont l'une et l'autre verticales, et qu'ainsi elles doivent se confondre sur la même verticale, et comme l'une passe par le centre de gravité du fluide déplacé et l'autre par le centre de gravité du corps, on reconnaît qu'il faut en outre que ces deux centres de gravité soient situés sur la même verticale. Telles sont les deux conditions relatives à l'équilibre des corps flottants.

Mais la stabilité de cet équilibre est indispensable pour empêcher le corps de chavirer. Soit, par exemple, un bateau en équilibre sur un fluide dont le niveau est *AB* (fig. 448). Ce dernier plan, qu'on nomme *plan de flottaison*, est tel que, prolongé dans l'intérieur du bateau, il en sépare au-dessous de lui un volume dont le poids en fluide est égal à celui du bateau et de sa charge, et cela quelle que soit la position du bateau. D'où il suit que si, dans l'intérieur de ce dernier, on fait passer une suite de plans séparant de la carène des volumes égaux entre eux et à celui de l'eau déplacée par le bateau, ces plans se confondront tour à tour avec le plan de flottaison toutes les fois que le bateau prendra les positions convenables. Mais ces plans peuvent être regardés comme enveloppant une même surface courbe *abc*, à laquelle ils sont tangents ; de sorte que, dans toutes les positions possibles, cette surface demeurera tangente au plan de flottaison *AB*. Nous pourrons donc la regarder comme liée invariablement au bateau, et comme forcée de rouler sur le plan *AB*. Si maintenant on mène à cette surface deux normales infiniment voisines qui se coupent en *o*, ce point sera le centre de rotation autour duquel la surface *acb* tournera en même temps que le bateau et le centre de gravité de ce dernier, pour passer à une position infiniment voisine de l'équilibre voisin. Or, on sait (2e partie, 51), que l'équilibre sera stable ou non stable,

selon que, pour un changement de position très-petit, le centre de gravité du système s'élève ou s'abaisse ; ce qui arrive ici selon que, sur la verticale primitive d'équilibre *oc*, le centre de gravité du bateau est au-dessous ou au-dessus de ce point *o*, qu'on nomme *métacentre*. Donc l'équilibre sera stable toutes les fois que le centre de gravité du bateau est au-dessous du métacentre, et que, par conséquent, la stabilité de l'équilibre sera assurée quand le centre de gravité du bateau est plus bas que le centre de gravité du fluide déplacé. Mais il ne s'ensuit pas que cette condition soit indispensable ; car cet équilibre aurait encore lieu, lors même que le centre de gravité serait plus haut, pourvu qu'il demeurât inférieur au métacentre. Supposons deux bateaux égaux entre eux et flottant dans un liquide dont le niveau est en *MN* (fig. 449). A vide ils déplacent un certain volume d'eau dont le poids est égal aux poids des deux bateaux. Si on ajoute dans leur carène une charge de 2000 kilogr., ils s'enfonceront dans l'eau jusqu'à ce que le volume d'eau déplacé se soit augmenté d'un nouveau volume pesant 2000 kilogr.

Imaginez que dans cet état on attache au système des bateaux une corde dont l'extrémité est fixée à un objet qu'on veut enlever au fond de l'eau, et que la corde ait été fortement tendue au moyen de cabestans ; on conçoit que si on enlève à ces bateaux la surcharge des 2000 kilogr., la pression du fluide contre les bateaux de bas en haut surpassera de cette même quantité leur poids : ainsi ils agiront sur le fardeau qu'on veut soulever avec cet effort de 2000 kilogr., et l'enlèveront si la résistance de ce fardeau est inférieure à cet effort.

Au lieu d'avoir recours au mode des chargements, on peut, dans les ports de la Manche, profiter de la marée montante ; on en a même agi ainsi à Cherbourg pour enlever les débris du batardeau dont on avait fermé le passage de l'avant-port pendant la durée de l'excavation de son bassin.

Si on suppose une masse fluide dans un vase, en communication avec un tube mince vertical, ouvert à sa partie supérieure *a* (fig. 450), il est évident que, dans l'état d'équilibre entre les pressions hydrostatiques qui ont lieu, tant dans le vase que dans le tuyau, le liquide occupe dans l'un et l'autre le même niveau *MN*. Si on ajoute une surcharge à la surface de l'eau dans le vase, l'eau s'y abaissera, et elle s'élèvera dans le tuyau jusqu'à ce que la hau-

teur de la colonne en *b* au-dessus du niveau *AB* dans le vase fasse équilibre à la surcharge. Cette propriété fournit un nouveau moyen de peser les corps ; on peut même établir sur le tube une échelle indicatrice des poids qui, placés sur le piston *AB*, font élever la colonne d'eau à la hauteur des degrés de cette échelle. Mais les inconvénients de cette méthode consistent dans les frottements du piston *AB* ; il faudrait avoir recours à l'expérience pour en tenir compte et tracer l'échelle. C'est sur ce principe qu'est fondé le système de la balance destinée à peser les voitures sur les routes. Peut-être vaudrait-il mieux faire reposer les voitures sur un grand cylindre flotteur qui, à mesure qu'il s'enfonce, déplace un plus grand volume d'eau, et fait élever le niveau supérieur de l'eau dans le vase même qui le contient. On aurait également un tube indicateur en communication avec le vase, et où l'eau s'élèverait à la même hauteur que dans le vase. De cette manière on éviterait l'inconvénient des frottements dont nous avons parlé à l'égard de la première balance.

XIII.

DES POMPES.

97. *Pompe aspirante.* — Quoique la description des pompes ait été faite dans beaucoup de traités de physique, il est nécessaire d'en donner une idée succincte, afin d'expliquer ensuite leurs propriétés sous le point de vue mécanique. *ABCD* (fig. 451) est un tuyau cylindrique vertical plongé dans un fluide dont le niveau est *LM*, et ouvert par les deux bouts ; il est évident que le niveau s'établira dans l'intérieur du tuyau à la hauteur de *LM*, parce que le niveau de cet intérieur et celui de l'extérieur sont chargés d'une même pression, qui est la pression atmosphérique, et qu'il faut que les deux charges sur l'extrémité ouverte *BC* soient égales. Si, de plus, on y adapte un piston dont le jeu puisse s'exercer dans son intérieur, alternativement de haut en bas et de bas en haut, on aura ce qu'on nomme une pompe aspirante. Car, si le piston est

amené sur la surface de l'eau de façon qu'il n'y ait pas d'air interposé entre cette surface et la base inférieure du piston, et qu'on élève ensuite ce piston, il se produira, ou plutôt il tendra à se produire au-dessous du piston, un vide que l'eau remplira aussitôt. Pour concevoir en vertu de quelle pression l'eau s'élève ainsi avec le piston, il faut observer que la pression qui agit sur *BC* de bas en haut, et qui provient du niveau extérieur, est égale à la pression atmosphérique augmentée de celle qui est due à la charge *RB* de ce niveau. Quant à la pression antérieure qui résiste de haut en bas contre *BC*, elle est seulement due au poids de la colonne de fluide remplissant l'espace du tuyau laissé au-dessous du piston ou de la colonne *abCB*. Donc, la pression résultante, qui pousse le fluide de bas en haut, équivaut à la pression atmosphérique plus le poids d'une colonne de fluide ayant *RB* pour hauteur, moins le poids d'une colonne du même fluide de hauteur *aB* ; en un mot, cette pression équivaut à la pression atmosphérique diminuée de celle qui est due à la charge de la hauteur *Ra*, c'est-à-dire à la charge de l'eau déjà élevée en arrière du piston au-dessus du niveau *LM*. Donc, l'eau pourra s'élever jusqu'à une hauteur où le poids de sa charge au-dessus du niveau fera équilibre à la pression atmosphérique, et comme cette dernière pression est celle d'une colonne d'eau ayant $10^m,33$ de hauteur, il faut en conclure que l'eau ne suivra pas le piston au delà de $10^m,33$ au-dessus du niveau *LM* à l'aide d'une pareille pompe. Quoiqu'en effet la pression barométrique soit telle que nous venons de la définir, plusieurs causes s'opposent à ce que l'eau puisse être élevée à la limite supérieure qu'elle assigne. D'abord l'eau du puits renferme environ cinq pour cent d'air naturel, qui se dégagera immédiatement au-dessous du piston, parce qu'en cet endroit la pression du liquide est nulle, et il en résultera une certaine réaction de bas en haut qui s'ajoutera à la charge du liquide pour contre-balancer l'action extérieure de l'atmosphère sur le niveau *LM*. Cette réaction se détermine facilement, puisqu'on connaît la quantité d'air à l'état naturel que contient un certain volume d'eau, et que, d'après la loi de Mariotte, sa tension varie en raison inverse de ses divers volumes. A cette réaction se joint encore celle de la vapeur qui se forme dans le vide produit par le piston, et dont la tension relative à la température du lieu est plus forte en été qu'en hiver. Enfin, un piston ne joint jamais hermétiquement les parois du corps de pompe, et

donne issue soit à l'air extérieur, soit à l'eau qui se trouve au-dessus de sa surface supérieure : cet effet est même tel que si le piston restait au repos, le dessous finirait par se remplir d'air naturel ; mais la levée du piston se fait trop vite pour que la capacité laissée au-dessous du piston ait le temps de se remplir d'air. Quoi qu'il en soit, on voit que le piston, dans les pompes aspirantes, ne peut s'élever au-dessus du niveau *LM*, que d'une quantité inférieure à la hauteur $10^{m},33$, dont le poids d'eau mesure la pression atmosphérique ; cette hauteur limitée est au plus de 30 pieds dans les pompes parfaites, et de 28 pieds dans les pompes ordinaires. Si maintenant on conçoit deux soupapes à clapet *m*, *m* (fig. 452), destinées à fermer ou à ouvrir deux ouvertures pratiquées dans l'épaisseur du piston, de manière à faire communiquer, selon les circonstances, l'intérieur du corps de pompe avec le dessus du piston, et qu'en même temps le fond *BC* soit garni d'une soupape *n* à coquille ou de forme conique qui intercepte ou rétablisse la communication des eaux du puits avec l'intérieur du corps de pompe, vous aurez une idée assez complète de la pompe aspirante. Les soupapes *mm* (fig. 453) sont des lanières de cuir fixées par un bout au piston et chargées d'une rondelle de plomb, de telle sorte qu'elles ne peuvent s'ouvrir que de bas en haut. Quant à la soupape à coquille *n* (fig. 454), c'est un petit tronc conique implanté sur une tige verticale mobile dans des guides et qui tantôt s'applique sur le fond *BC* et tantôt s'en détache de bas en haut.

Voici maintenant en quoi consiste le jeu de ces soupapes. Supposez que le piston, à partir du fond *BC* (fig. 452), soit soulevé ; le fluide au-dessous de *BC* va réagir en vertu de la pression atmosphérique extérieure sur le niveau *LM*, diminuée de celle de la charge du liquide intérieur au-dessus de ce niveau, et il soulèvera la soupape à coquille *n*, qui demeurera ainsi ouverte pendant toute la durée de la montée du piston ou de l'aspiration. Quant aux soupapes *mm*, comme il se forme un vide pendant la durée de l'ascension au-dessous du piston, elles seront tenues fermées par la pression atmosphérique supérieure. Arrivé au haut de sa course, imaginez que le piston vienne ensuite à descendre, le piston va rencontrer le fluide, et ce dernier transmettant la pression imprimée par le moteur au piston, jusqu'à la soupape *n*, celle-ci sera forcément fermée. Mais alors aussi le fluide contenu dans l'intérieur de la pompe, au-dessous du piston, réagit contre les clapets *mm*,

et ceux-ci s'ouvrent dès que la pression du liquide, et celle que le moteur imprime au piston, l'emporte sur la pression atmosphérique extérieure. De cette manière tout le fluide compris entre le bas du piston et le fond *BC* aura passé au-dessus de la surface supérieure du piston, après une descente complète, sauf les portions qui se seront perdues par suite des fuites et qui seront rentrées dans le réservoir commun. Si maintenant on établit un dégorgeoir en *d* ou tuyau au-dessus de la course du piston, l'eau passée au-dessus du piston pendant la descente, s'échappera pendant une nouvelle ascension. Telle est la manière dont le jeu se continue indéfiniment dans la pompe aspirante.

Dans la pratique, on ne peut faire parcourir au piston qu'un espace limité. Cette course est de cinq à six pouces quand la pompe peut être manœuvrée par un seul homme, et de cinq à six pieds pour les machines puissantes. Il convient que la partie du corps de pompe parcourue par le piston soit un cylindre parfaitement alésé dans son intérieur. Le reste de la pompe n'exige pas autant de précision. De ce que l'espace parcouru par le piston est si court, il n'est plus nécessaire que la soupape à clapet, qui laisse passer l'eau du réservoir à l'intérieur du corps de pompe, soit placée à la hauteur du niveau *LM*; elle peut donc être établie au-dessus.

Les pompes généralement usitées à Metz consistent dans deux cylindres en bois *A* et *B* (fig. 455), de deux pouces de diamètre intérieur, et réunis bout à bout par un cylindre de cuivre *C*, d'un diamètre intérieur un peu plus grand; lequel est destiné à recevoir le piston, et qui, par cette raison, se nomme l'*aspirateur*. La partie au-dessus est le corps de pompe. Quant au cylindre *B*, il porte au haut la soupape à clapet *n*, et il est terminé au bas par un vase métallique, ou *grenouillère*, percée de trous et qui empêche que les corps flottants ne montent dans la pompe. Ainsi que je l'ai dit, les diamètres intérieurs de *A* et *B* sont égaux; le diamètre du piston doit aussi en différer le moins possible, mais il est rendu un peu plus grand, afin que les ouvertures pratiquées dans ce piston donnent à l'eau simultanément une issue au moins égale à l'aire intérieure du corps de pompe. Si cette issue, ainsi qu'on le verra, était moindre, les étranglements qui en résulteraient, occasionneraient une perte de force vive ou une diminution dans le travail utile.

Un autre dispositif consiste à faire le tuyau inférieur un peu plus étroit que le corps de pompe dans lequel se meut le piston, à cou-

der ce tuyau aspirateur, si le réservoir est éloigné de l'espace où le piston doit se mouvoir, et à établir la soupape *n* (fig. 456) qui doit donner passage à l'eau dans le corps de pompe au sommet du tuyau. Mais il peut arriver que, quoique le jeu du piston ait lieu à une hauteur inférieure à la limite où l'eau ne puisse plus monter au-dessous de lui, l'eau s'arrête dès sa première aspiration dans le tuyau aspirateur, et ne parvienne plus dans le corps de pompe après un second coup de piston.

Nous considérerons seulement le cas où la soupape *dormante n* est placée au bas du tuyau aspirateur. *ab* (fig. 457) est la position la plus basse du piston, et *a'b'* sa position la plus haute. Avant la première aspiration, l'air contenu dans la partie *efhg* est censé à la tension naturelle, et il se dilate, lorsque de la position *ab* le piston passe à la position supérieure *a'b'* ; pendant cette ascension, l'eau monte tant que cet air se dilate, et s'arrête en *cd* au moment où le piston est en *a'b'*, et il est évident que la pression de l'air renfermé entre *cd* et *a'b'* est moindre que la pression atmosphérique agissant sur le niveau *LM*, puisque la pression due au ressort de l'air intérieur, augmentée de la charge *dh*, fait équilibre à la pression extérieure sur le niveau *LM*. Lorsque le piston descend de *a'b'*, la soupape *n* se ferme, et celles du piston ne s'ouvrent pour donner le passage à l'air compris entre sa surface inférieure et le niveau *cd*, qu'autant que cet air intercepté a acquis une pression supérieure à la pression atmosphérique qui agit au-dessus du piston. Par conséquent, lorsque le piston est parvenu à sa position la plus basse *ab*, l'air compris dans l'espace *efdc* est à la tension de l'air extérieur. Appelons H la hauteur $10^m,33$ de la colonne d'eau qui mesure cette tension, h' la hauteur d'eau contenue dans le tuyau aspirateur au-dessus du niveau *LM*. On voit que, pour une seconde ascension du piston, l'air compris dans l'espace *efdc* occupe l'espace $abb'a' + efdc$, si la colonne d'eau ne change pas sa hauteur h'. Or, en vertu du principe de Mariotte, la tension sera alors mesurée par une hauteur d'eau égale à $\frac{H \cdot efdc}{ab \cdot b'a' + efdc}$, puisque les pressions varient en raison inverse des volumes, et il est évident que l'eau ne montera pas dans le tuyau aspirateur toutes les fois que $h' + \frac{H \cdot efdc}{ab \cdot b'a' + efdc}$, qui mesure la pression de haut en bas sur *gh*, est égale à H, ou plus grand que H, hauteur qui représente la

pression exercée de bas en haut contre *gk* par la pression atmosphérique sur le niveau *LM*. Cette dernière condition peut être satisfaite, quoique la hauteur *a'b'* au-dessus de *LM* soit inférieure à celle qui correspond à la pression atmosphérique. Le calcul apprend que cet accident n'est pas à craindre tant que la hauteur du corps de pompe au-dessus du niveau du réservoir est moindre que vingt-huit pieds.

98. *Pompe aspirante et foulante, et pompe simplement foulante.* — Dans la pompe aspirante et foulante, le piston ne porte plus de soupapes à sa surface et refoule l'eau dans sa descente. Il y a toujours une soupape dormante *n* (fig. 458) au sommet du tuyau aspirateur comme dans la pompe précédente. Le piston aspire l'eau pendant sa montée ; puis en descendant ce piston la presse fortement au-dessous de lui, et s'en échappe par un tuyau latéral pour s'élever à la hauteur voulue, qui ici peut être quelconque, selon la pression que le moteur exerce contre le piston. On place à l'entrée de ce tuyau une soupape *S*, qui s'ouvre du dedans au dehors du corps de pompe, et qui, en retombant par son propre poids pendant l'aspiration, empêche l'eau du tuyau latéral de descendre.

Dans les pompes foulantes le corps de pompe est coudé; le piston joue dans la partie inférieure plongée du corps de pompe au moyen d'un système de manœuvres dont le plan est perpendiculaire au tableau et qui embrasse le corps de pompe sans le remonter. Au-dessus de la course du piston qui, comme nous l'avons dit, s'effectue au-dessous du niveau *LM* (fig. 459), est un diaphragme percé d'une ouverture que ferme une soupape *E*, capable de s'ouvrir de bas en haut. Une semblable soupape *F* est adaptée à la surface supérieure du piston, et couvre les ouvertures dont il est percé de part en part. Pendant la descente du piston, la soupape *E* est fermée et la soupape *F* est ouverte. Pendant la montée, le contraire arrive : la soupape *F* du piston reste fermée ; l'eau refoulée de bas en haut par le piston force la soupape *E* à s'ouvrir et s'élève dans le corps de pompe. La hauteur à laquelle elle montera ne dépendra ici que de la force du moteur qui fait mouvoir le piston.

Nous renverrons pour plus de détails sur la pompe aspirante, sur la pompe aspirante et foulante, et sur la pompe simplement foulante, au 3e volume du *Cours de Géométrie et de Mécanique industrielles*, de M. Dupin, 10e leçon, page 311 et suivantes.

99. *Travail des pompes.* — La disposition des pompes varie à l'infini, mais il existe deux principes communs à toutes les espèces :

1° Le volume de l'eau élevé à chaque coup de piston est un peu moindre que celui de la course cylindrique du piston, et c'est ce qu'il est aisé de voir d'après les descriptions précédentes ; je dis un peu moindre, à cause des fuites que permet le vide qui subsiste toujours entre le corps de pompe et le pourtour du piston ;

2° Le travail développé sur la tige du piston est égal au travail des frottements et résistances, plus au travail équivalent au produit du poids d'eau élevé à chaque oscillation et multiplié par la hauteur comprise depuis le niveau LM inférieur jusqu'au dégorgeoir de la pompe. Ce dernier travail représente évidemment, d'après nos théorèmes, l'effet utile ; on peut cependant encore le démontrer pour chaque cas individuel.

Dans les pompes foulantes le piston en descendant ne produit aucun travail utile. Mais en montant il a à vaincre la pression d'une colonne de fluide dont la base est celle du piston et dont la hauteur est celle du dégorgeoir au-dessus de la tête du piston. Nommant H la hauteur du dégorgeoir au-dessus du niveau LM du réservoir, y la hauteur variable de ce dernier au-dessus de la tête du piston, $H + y$ sera la hauteur totale de la colonne d'eau qui presse le piston de haut en bas. Mais ce même piston est pressé de bas en haut par le niveau LM avec une force égale au poids d'une colonne d'eau ayant y pour hauteur ; ainsi le piston résiste de haut en bas avec une pression mesurée par la différence $H + y - y$, ou H. Si je nomme π le poids d'un mètre cube d'eau, A la base du piston, $\pi . A . H$ sera la pression *utile* que doit vaincre le moteur pendant la montée, et si j'appelle B la course du piston, $\pi . A . H . B$ sera le travail utile. Or,

$$\pi . A . H . B = \pi . A . B \times H ;$$

$A . B$ est le poids du volume d'eau égal à la course du piston, c'est-à-dire le poids de l'eau monté à chaque coup ; donc le travail utile dans la pompe foulante équivaut effectivement au produit du poids de l'eau élevée à chaque coup et de la hauteur du dégorgeoir au-dessus du niveau inférieur.

Dans la pompe aspirante et foulante, lorsque le piston monte, sa surface supérieure est pressée de haut en bas par l'atmosphère, et

sa surface inférieure de bas en haut par une pression atmosphérique moins la hauteur y du point de sa course où il se trouve au-dessus du niveau LM; c'est comme s'il était pressé de haut en bas par une colonne de liquide ayant en hauteur l'élévation y du piston au-dessus de ce niveau : son travail instantané utile est donc égal à $\pi \cdot Ay \cdot b$, b étant l'espace très-petit que le piston parcourt pendant un temps élémentaire. Or, Aby est le moment du volume élémentaire de course par rapport au niveau LM, la somme de tous ces moments multipliée par π représentant le travail utile pendant une ascension, on voit que si on nomme y_1 la hauteur du centre de gravité du volume de la course totale dont B est l'amplitude, le travail total pour une course ascendante du piston sera πABy_1. Pendant la descente, le piston est seulement chargé du poids du fluide contenu dans le tuyau latéral, et si on nomme z_1 la hauteur du dégorgeoir au-dessus du centre de gravité de la course du piston, le travail utile que le piston aura à vaincre pendant sa descente sera πABz_1. Ainsi, pendant une oscillation complète, le travail utile sera $\pi AB(z_1 + y_1)$. Or, la somme $z_1 + y_1$ n'est autre chose que la hauteur H du dégorgeoir au-dessus du niveau LM : donc, le travail utile pendant une oscillation complète sera $\pi \cdot A \cdot B \cdot H$, et conduit à une conclusion analogue. On raisonnerait de la même manière pour la pompe simplement aspirante. A cette définition de l'effet utile produit dans les pompes, nous devons ajouter que quand l'eau doit s'écouler du dégorgeoir avec une grande vitesse, la quantité de force vive imprimée à l'eau à sa sortie, correspond à un travail qu'il faut considérer comme faisant partie de l'effet utile; il est au contraire perdu quand cette vitesse est inutile.

On peut encore juger dans laquelle de ces trois pompes le travail est le plus inégal. S'il s'agit d'une pompe foulante, le piston en montant est pressé par le poids de toute la colonne d'eau comprise entre le dégorgeoir et le niveau LM; le moteur a en outre le poids du piston à soulever. Dans la descente, ce dernier poids favorise le moteur qui n'a d'ailleurs à vaincre alors que les frottements; d'où il suit que le travail du moteur est fort inégal dans ce genre de pompe. Dans la pompe aspirante et foulante, le travail de la montée est égal à celui de la descente, lorsque $y_1 = z_1$, ou lorsque $2y_1 = H$, ou lorsque $y_1 = \frac{H}{2}$: ce qui indique que si la course moyenne

du piston répond au milieu de la charge entière ou de la hauteur du dégorgeoir au-dessus du niveau du réservoir, le travail devient très-régulier. Enfin, dans la pompe simplement aspirante, la pression du moteur en descendant est nulle, ou égale aux résistances du frottement, et en montant la pression à vaincre équivaut au poids de la colonne dont la hauteur est celle du dégorgeoir au-dessus du niveau *LM* : ainsi l'action est fort irrégulière, et ce n'est que pendant la montée que s'effectue le travail utile, lequel est toujours égal au poids d'un volume d'eau égal à celui d'une course multipliée par la hauteur de la charge entière.

On régularise l'action des pompes aspirantes et des pompes foulantes de deux manières. Tantôt on arme les balanciers de contre-poids dont le poids est la moitié de la résistance moyenne que le piston doit vaincre en montant (3e partie, 51), et qui descendent ou montent en même temps que le piston s'élève ou descend. Tantôt, pour les pompes aspirantes et foulantes, on se sert des réservoirs à air. L'eau, au lieu de s'élever immédiatement dans le tuyau d'ascension, entre dans la capacité *C* (fig. 460), remplie d'air, et prend un niveau *ln*, tel que l'air pressé entre ce niveau et le sommet supérieur du vase fait ressort pour repousser cette eau dans le tuyau latéral *ad*. Une soupape en *o* empêche le liquide arrivé dans le réservoir *C* d'en descendre. Quand le piston monte et ne refoule pas l'eau dans le réservoir *C*, le ressort de l'air comprimé fait que l'écoulement de l'eau par le tuyau *ad* est continu, au lieu qu'il serait intermittent sans ce réservoir. La pompe à incendie est établie d'après ce dernier système. Elle consiste en deux pompes aspirantes et foulantes (fig. 461), qui refoulent leur eau dans un réservoir commun à air, d'où elle sort ensuite d'un jet continu, par un tuyau destiné à la conduire sur les points jugés convenables.

D'après ce qui précède, on voit que les pompes peuvent être placées loin du réservoir d'eau au moyen de tuyaux de communication, parce que la pression se transmet à toutes les distances. En général, les clapets doivent être placés aux endroits convenables pour empêcher l'eau de descendre. Enfin, dans les meilleures pompes, le travail utile est les $\frac{2}{3}$ au plus du travail moteur à cause des fuites et résistances du piston, ouvertures des clapets, et à cause de l'inertie du liquide qu'il faut vaincre. Il faut, d'ailleurs, éviter d'élever l'eau plus haut qu'il n'est nécessaire et de lui donner une trop

grande vitesse, d'où résulte une perte de force vive. Les étranglements des soupapes produisent aussi des chocs nuisibles, ainsi qu'on le fera voir quand on traitera de l'hydraulique.

100. *Presse hydraulique et siphon.* — La presse hydraulique consiste en un piston A (fig. 462) très-gros, mû dans un corps de pompe, et portant à sa partie supérieure un plateau servant à presser des substances. On fait arriver l'eau sous ce piston par un tuyau B, au moyen d'une pompe foulante et aspirante, semblable à celles qui ont été décrites ci-dessus ; mais son piston a est d'un diamètre fort petit. Quand la pression exercée sur le piston a fait équilibre à celle de A, les pressions totales sont en raison inverse des aires $\pi . R^2$ et $\pi . r^2$ des surfaces de ces pistons. On est donc le maître de donner à volonté la pression *maximum*. On remarquera qu'ici le travail dépensé par le moteur est égal au travail utile plus au travail des frottements, et que ce dernier est très-considérable.

Quoique le siphon appartienne moins aux phénomènes de l'équilibre, qu'à ceux du mouvement, sa description se trouvera ici à sa place, à cause de son analogie avec les pompes. Supposez un tube recourbé composé de deux branches verticales, plongeant chacune dans deux liquides dont les niveaux soient LM et $L'M'$ (fig. 463). On conçoit que le liquide se mettra de niveau dans l'intérieur de chaque branche avec le liquide dans lequel elles sont plongées respectivement ou qu'il s'élèvera en ab du côté LM et en gh du côté $L'M'$. Imaginez que dans ce tube recourbé on fasse le vide, non par le moyen d'un piston, mais en aspirant par l'extrémité i de la branche qui plonge dans le niveau le plus bas. Si la hauteur du sommet C au-dessus de LM est plus petite que celle de la pression atmosphérique, laquelle est de $10^m,33$ quand la colonne qui la mesure est de l'eau, ou de $0^m,75$ quand cette colonne est du mercure, le liquide dont le niveau est LM s'élèvera jusqu'en C, puis il retombera dans la branche descendante du côté du niveau inférieur, et l'écoulement continuera sans cesse. Afin d'expliquer ce fait qui, au premier aspect, paraît paradoxal par suite de l'ascension qu'est forcé de prendre le liquide de ab en C, voyons ce qui se passe en ce dernier point. La pression qui presse le liquide en ce point et qui le presse de gauche à droite, est due à la pression atmosphérique qui agit sur le niveau LM, diminuée de la charge du liquide depuis C jusqu'à ce niveau. Nommant H la hauteur d'eau qui représente la

pression atmosphérique et h' la hauteur du sommet C au-dessus du niveau LM, $H - h'$ sera évidemment proportionnel à la pression qui pousse le fluide parvenu en C de gauche à droite. Mais de droite à gauche il est refoulé par la pression atmosphérique qui s'exerce sur le niveau inférieur $L'M'$, et l'effet de celle-ci est diminué de la charge du liquide mesuré par la hauteur de C au-dessus de ce niveau, hauteur que je nomme h. Ainsi, le fluide est poussé en C de droite à gauche par une pression proportionnelle à $H - h$. Donc, enfin, la pression résultante qui tend à faire descendre de gauche à droite le liquide arrivé en C, sera égale à la différence des pressions $H - h$ et $H - h'$, c'est-à-dire à $h - h'$. Si donc h est $>$ que h', c'est-à-dire si le niveau $L'M'$ est inférieur au niveau LM, l'écoulement aura lieu. Il n'y aura pas de mouvement si les deux niveaux LM et $L'M'$ étaient à même hauteur, parce qu'en effet les pressions contraires s'entre-détruiraient. L'écoulement sera également impossible si le sommet C s'élève au-dessus du niveau supérieur LM d'une quantité plus grande que la hauteur du liquide de même espèce qui mesure la pression atmosphérique.

Dans la pratique, au lieu d'opérer le vide par l'aspiration ou la *succion*, on bouche les extrémités du siphon, et on remplit les deux branches d'eau, au moyen d'une ouverture qu'on débouche en C et par laquelle l'air intérieur se dégage. Lorsque le tube est rempli, on bouche l'ouverture C et on débouche celles des extrémités; l'écoulement se produit avec une vitesse que nous verrons plus loin être égale à $\sqrt{2g(h' - h)}$. Le siphon ainsi manœuvré est employé avec succès dans les travaux d'épuisement.

XIV.

MOUVEMENT DES FLUIDES CONTENUS DANS DES VASES, CANAUX, RIVIÈRES.

101. *Phénomène de l'écoulement de l'eau hors d'un vase.* — L'objet de ce chapitre est de rechercher les lois du mouvement des fluides;

nous nous occuperons d'abord de celles qui sont relatives au mouvement de l'eau et des liquides en général. *ABDC* (fig. 464) est un vase ou réservoir où l'eau occupe un niveau supérieur *AB*, et dont le fond est horizontal. Si on fait une petite ouverture en *ab* sur une des parois verticales, la pression intérieure poussera le fluide au dehors du vase; cette pression étant d'autant plus forte que l'orifice *ab* est pratiqué plus bas, il s'écoulera d'autant plus vite et en quantité d'autant plus grande que cette ouverture se rapprochera du fond. La quantité d'eau écoulée dans l'unité de temps, dans une seconde, est ce qu'on nomme la *dépense*. L'eau en sortant forme une gerbe continue qu'on appelle *veine fluide*, *filet* ou *jet*; ce jet affecte la forme de la courbe que décrirait un corps lancé perpendiculairement à la paroi, et avec la vitesse que possède le liquide à l'orifice. C'est une parabole dont le sommet est en *ab*. Dans tous les points de cette parabole la pesanteur tend continuellement à augmenter la vitesse des molécules; mais en *ab* elle dépend seulement de ce qui se passe dans l'intérieur du réservoir.

Si l'orifice est pratiqué en *a'b'* au fond du vase *ABDC*, le jet est vertical. Si l'orifice est pratiqué en *a"b"* (fig. 465) contre une paroi horizontale pressée de bas en haut par le liquide, le jet s'élève verticalement, et l'expérience démontre qu'il s'élève à la hauteur du niveau supérieur de l'eau dans le réservoir; ce qui suppose (1re partie, 64) que les molécules en *a"b"* ont une vitesse due à la hauteur de la charge d'eau correspondante, ou à la hauteur du niveau supérieur au-dessus du centre de l'orifice. Mais on peut démontrer la chose spécialement par le principe du travail.

102. *Vitesse de l'eau sortant librement par un petit orifice mince.* — Avant qu'on ne débouche l'orifice *ab* (fig. 466), la pression intérieure exercée sur lui est due à la charge *h* du niveau supérieur *AB* au-dessus du centre de cet orifice. A la rigueur elle devrait être augmentée de la pression atmosphérique qui agit sur ce niveau, mais, comme celle-ci a également lieu au dehors de la paroi sur laquelle l'ouverture *ab* est pratiquée, la pression n'est en réalité due qu'à la charge *h* du liquide. Donc, au moment où l'ouverture est débouchée, le fluide, en vertu de cette pression, est poussé au dehors et se dirige de toutes parts en décrivant des courbes qui convergent vers cet orifice : ce mouvement se propage ainsi de proche en proche. Quant à la vitesse réelle de sortie, elle augmente

sans cesse et rapidement jusqu'à ce que le mouvement se soit étendu dans tout le vase et soit devenu uniforme en chaque point. C'est à cet instant que nous considérons le mouvement du fluide, en supposant d'ailleurs, comme c'est le cas ordinaire des applications, qu'il arrive par la surface supérieure du réservoir, dans le vase, précisément autant d'eau qu'il en sort à chaque instant. Cela posé, le mouvement étant ainsi devenu permanent, il sera facile de voir que chaque molécule dont le poids est p, en descendant de h aura reçu, quelle que soit la courbe qu'elle décrive, de la gravité un travail $p \cdot h$ (2e partie, 12). Si on appelle v la vitesse de cette molécule à son entrée sur la surface supérieure du réservoir et V sa vitesse à la sortie de l'orifice, $\frac{p}{g}(V^2 - v^2)$ représentera l'accroissement de force vive qu'aura reçu la molécule qu'on considère pendant qu'elle a parcouru la hauteur h. La même chose pouvant se dire de toutes les autres molécules qui doivent arriver en même temps dans l'orifice et qui s'écoulent dans un temps donné, pendant une seconde, par exemple, on reconnait sans peine que, si P est le poids de l'eau qui s'écoule dans une seconde, $\frac{P}{g}(V^2 - v^2)$ sera l'accroissement de force vive imprimée à ce poids d'eau, pendant qu'il aura parcouru la hauteur h, ou qu'il aura reçu de la gravité le travail $P \cdot h$. On aura donc, en vertu du principe des forces vives,

$$\frac{P}{g}(V^2 - v^2) = 2Ph,$$

ou

$$V^2 - v^2 = 2gh.$$

Si la vitesse v du fluide en entrant dans le vase est très-petite, ou si $v = 0$, il reste $V^2 = 2gh$; d'où

$$V = \sqrt{2gh},$$

formule due à Torricelli, disciple de Galilée, laquelle indique que la vitesse du fluide, en s'échappant par l'orifice, est due à la hauteur du niveau supérieur au-dessus du centre de l'orifice. Cette hauteur s'appelle *charge génératrice*. On voit encore que cette vitesse est celle qu'acquerrait un corps libre en tombant d'une hauteur égale à cette charge. On se rappellera enfin que g, ou la vitesse imprimée

par la gravité au bout de la première seconde, est égale à $9^m,809$. Il existe des tables à l'aide desquelles on trouve la vitesse due à une hauteur donnée, ou une hauteur due à une vitesse donnée. Ce résultat suppose que la vitesse v est fort petite; nous verrons plus loin ce qu'il convient de faire (3e partie, 103) quand cette vitesse n'est pas négligeable.

103. *Même écoulement sous des pressions quelconques.* — On a supposé jusqu'ici que la pression exercée sur la surface supérieure du réservoir, et qui se transmet de haut en bas jusqu'à la surface de l'orifice, était la pression atmosphérique, et qu'elle était détruite par celle qui agit extérieurement à cet orifice contre la veine. Mais si ces deux pressions devenaient différentes, la vitesse de sortie serait évidemment altérée en conséquence. Que, par exemple, l'orifice plonge dans un autre bassin extérieur rempli d'eau et dont le niveau au-dessus du centre de cet orifice soit h' (fig. 467), les molécules, à leur sortie, seront refoulées vers le réservoir supérieur avec une force due à h', et la charge génératrice de la vitesse ne sera plus que $h - h'$. On peut, en effet, admettre que les molécules ne descendent plus que de la différence de hauteur comprise entre les deux niveaux. Si cette différence était nulle, il n'y aurait plus d'écoulement ; et, en général, on peut démontrer que la vitesse d'écoulement est toujours relative à la différence des pressions extérieures et intérieures de l'orifice.

Soit, en effet, un liquide quelconque $ABDC$ (fig. 468) enfermé dans un vase et pressé à sa partie supérieure d'une manière quelconque, ou par un piston AB avec un effort égal à p sur l'unité de surface ; cherchons dans cette circonstance avec quelle vitesse le liquide s'échappera par l'orifice ab. La pression sur cet orifice, rapportée à l'unité de surface et qui favorise le mouvement, sera p, augmenté de la pression atmosphérique supérieure et de celle qui est due à la charge h du liquide au-dessus de cet orifice. Si le fluide s'écoule au dehors à l'air libre, la pression qui s'oppose à son mouvement et qui est contraire à la précédente, sera égale à la pression atmosphérique. Donc, la pression résultante ou génératrice, ou la différence des deux genres de pressions précédents, équivaut à p augmenté du poids de la charge h, et si je nomme ϖ le poids de l'unité de volume du liquide, $p + \varpi h$ sera la pression génératrice par unité de surface. Pour évaluer cette pression totale en charge du

même liquide, il faut observer que la pression unitaire p du piston peut être remplacée par une colonne de liquide agissant au-dessus de ce piston, et qui aurait l'unité de surface pour base. Soit h' la hauteur d'une telle colonne, elle devra être telle qu'on ait $\pi h' = p$; d'où

$$h' = \frac{p}{\pi},$$

ce qui est facile à calculer. Ainsi, l'écoulement actuel revient au cas où la charge au-dessus de l'orifice est $h + h'$, en sorte que la vitesse de sortie sera

$$\sqrt{2g\,(h + h')}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{2g\left(h + \frac{p}{\pi}\right)},$$

pourvu que la vitesse en AB soit très-petite.

Nous pouvons vérifier la chose directement. Supposons que le piston, se mouvant parallèlement à lui-même, ou avec une vitesse constante pour tous les points de sa surface, descende en BB' en un très-petit temps, et qu'il s'écoule le volume $abb'a'$ pendant le même temps. Il est évident que si le liquide est incompressible, les deux volumes $ABDC$ et $A'B'DCabb'a'$ seront égaux, et qu'en retranchant de chacun leur partie commune $A'B'DC$, on aura $ABB'A' = abb'a'$. De ce que le mouvement du piston s'opère parallèlement, le volume $ABB'A'$ sera exprimé, en nommant A la surface du piston, par le produit de A et du chemin AA' parcouru par ses divers points. De même, si on admet que vers l'orifice ab, le mouvement s'opère parallèlement à lui-même, le volume $abb'a'$ sera un prisme et aura pour valeur le produit de a et du chemin aa', a représentant l'aire de la section ab. Ainsi, tant que le mouvement du liquide s'effectuera par tranches parallèles dans la section AB et dans la section ab, et quel que soit d'ailleurs le mouvement opéré dans les sections intermédiaires, on aura

$$A \times \overline{AA'} = a \times \overline{aa'}.$$

D'ailleurs, les chemins AA' et aa', parcourus simultanément dans un temps très-petit par le piston et par le fluide sur la section ab, seront proportionnels aux vitesses v et V qui ont lieu à la section AB et à la section ab : d'où l'on tire

$$A \cdot v = a \cdot V.$$

Maintenant on doit faire attention que l'accroissement de la force vive de toute la masse du liquide, comprise entre les sections AB et ab pendant un temps très-petit, doit équivaloir au double du travail produit par le piston et de celui de la pesanteur de toute la masse pendant le même petit temps. Nous allons chercher ces trois valeurs successivement.

L'accroissement de la force vive de tout le fluide compris entre les sections AB et ab est facile à obtenir. En effet, quand le piston était en AB, la force vive était celle que possède $ABB'A'$ plus celle de $A'B'DC$. Le mouvement restant permanent, la force vive de cette dernière partie demeure la même lorsque le piston passe en $A'B'$, et dans cette position la force vive totale est égale à la force vive de $A'B'DC$ plus celle de $abb'a'$. Donc, l'accroissement de force vive acquis par toute la masse fluide pendant le petit temps qu'on considère, est égal à la différence des forces vives de $abb'a'$ et de $ABB'A'$. Ces deux masses étant égales, si nous nommons q leurs poids, leurs forces vives seront $\frac{q}{g}V^2$ et $\frac{q}{g}v^2$. Ainsi, l'accroissement cherché sera

$$\frac{q}{g}(V^2 - v^2).$$

Le travail du piston pendant le même petit temps est égal à $A \times p \times \overline{AA'}$.

Quant au travail de la pesanteur de la masse fluide totale, si G est son centre de gravité, quand elle occupe la position $ABDC$, et G' son centre de gravité quand elle occupe la position $A'B'DCabb'a'$, le travail produit pendant l'intervalle de ces deux positions équivaut au produit du poids total par GG', ou à la différence du moment de $A'B'DCabb'a'$ pris par rapport à AB et du moment de $ABDC$ pris aussi par rapport à ce plan supérieur. Or, le premier moment est égal au moment de la partie commune $A'B'DC$ plus le produit de la tranche $abb'a'$ et de sa distance au plan AB. De même, le moment de $ABDC$ se compose du moment de la partie commune $A'B'DC$, augmenté du produit de la tranche $ABB'A'$, multiplié par sa distance au plan AB. Donc, enfin, le travail cherché de la pesanteur est égal au produit du poids q de la tranche $ABB'A'$, ou $abb'a'$, multiplié par la distance k qui sépare ces deux tranches. Ce travail sera donc qk. On aura ainsi, en appliquant le principe des

forces vives,

$$\frac{q}{g}(V^2 - v^2) = 2A \cdot p \times \overline{AA'} + 2q \cdot h,$$

ou $$V^2 - v^2 = 2g\left(\frac{p}{q} \cdot A \times \overline{AA'} + h\right).$$

Or, on a, en représentant par π la densité du liquide sous le piston, ou le poids de l'unité de volume; on a, dis-je,

$$q = \pi \times A \times \overline{AA'},$$

et, par suite, $$\frac{P \times A \times \overline{AA'}}{q} = \frac{p}{\pi}.$$

Faisant cette substitution dans l'égalité précédente, on trouvera

$$V^2 - v^2 = 2g\left(\frac{p}{\pi} + h\right);$$

et si v, vitesse du piston, est assez petite pour être négligée, on retombe sur l'égalité précédente

$$V = \sqrt{2g\left(\frac{p}{\pi} + h\right)}.$$

Si, outre la pression atmosphérique, l'extérieur de la section ab avait été pressé en sens contraire du mouvement par une pression p' pour l'unité de surface, il faudrait diminuer h de $\frac{p'}{\pi}$ ou p de p'. On peut s'en rendre compte par un raisonnement simple, en observant que la pression extérieure qui agit sur la section ab, contrairement au mouvement, est $p' \times a$; que son travail pendant le petit temps dans lequel ab s'est rendu en $a'b'$ est égal à $p' \times a \times \overline{aa'}$. Mais comme le poids de $abb'a'$ est égal à q, ainsi que celui de $ABB'A'$, et que ce poids est aussi égal à $\pi \times a \times \overline{aa'}$, on trouve . . . . $a \times \overline{aa'} = \frac{q}{\pi}$. Donc, le travail de cette pression contraire est $\frac{q}{\pi} \times p'$. Il faudra, dans l'égalité ci-dessus, le diviser par q, ce qui donnera $\frac{p'}{\pi}$ à retrancher de $\frac{p}{\pi}$; de sorte que, dans ce dernier cas,

la vitesse de sortie devient

$$V = \sqrt{2g\left(\frac{p - p'}{\pi} + h\right)}.$$

On doit maintenant bien concevoir comment on agirait dans tous les cas semblables, et nos raisonnements resteraient d'ailleurs les mêmes si le piston se mouvait horizontalement. h sera alors la charge verticale du fluide depuis le point supérieur jusqu'au centre de l'orifice d'écoulement. Si la vitesse v du piston était appréciable, il faudrait s'y prendre autrement pour avoir la vitesse de sortie V.

Nous avons vu ci-dessus qu'on avait $Av = aV$; donc

$$v = a\frac{V}{A}, \quad \text{et} \quad v^2 = \frac{a^2}{A^2}V^2;$$

d'où

$$V^2 - v^2 = V^2 - \frac{a^2}{A^2}V^2 = V^2 \cdot \frac{1 - a^2}{A^2} = 2g\left(\frac{p}{\pi} + h\right).$$

Soit posé $1 - \frac{a^2}{A^2} = K$, on aura

$$KV^2 = 2g\left(\frac{p}{\pi} + h\right), \quad \text{ou} \quad V = \frac{\sqrt{2g\left(\frac{p}{\pi} + h\right)}}{\sqrt{K}}.$$

C'est la valeur précédente de V, mais divisée par $\sqrt{K}$; cette nouvelle valeur sera donc plus grande. Lorsque $a = \frac{1}{20}A$, $1 - \frac{a^2}{A^2}$ ou K ne diffère de l'unité que de $\frac{1}{400}$, et on prendra V comme ci-dessus. Nous terminerons ce paragraphe en observant que l'effort du piston peut être remplacé par une pression quelconque agissant sur la surface AB du niveau supérieur, et que pendant que ce dernier descend en $A'B'$, le vide $ABB'A'$ est une masse d'eau affluente égale à celle qui s'écoule, de telle sorte que la charge du fluide h est toujours constante.

104. *Écoulement des gaz ou vapeur, dans le cas où la pression inté-*

rieure ne surpasse que de peu la pression extérieure. — Ce qui précède suppose 1° que le volume du fluide écoulé par l'orifice égale celui qui passe par la tranche supérieure ; 2° que la densité reste la même dans tous les points du réservoir. Cela est très-sensiblement vrai pour les liquides peu compressibles, tels que l'eau, mais non plus pour les gaz. La pression étant plus forte dans le réservoir près du piston que près de l'orifice où elle se réduit à celle de l'atmosphère, le fluide est aussi plus dense, c'est-à-dire qu'à poids égal il occupe un plus petit volume auprès du piston qu'auprès de l'orifice. Néanmoins, quand la pression intérieure ou la pression totale supérieure que le fluide éprouve à la fois de la part de l'atmosphère et du piston ne surpasse pas la pression extérieure de $\frac{1}{10}$ ou de $0^k,10$ par centimètre carré, ce qui est le cas de beaucoup d'applications pratiques, on peut négliger la différence des densités, ou la différence qui existe entre les volumes $ABB'A'$ et $abb'a'$, et admettre que le fluide s'écoule sous la densité qu'il a dans l'intérieur du réservoir ; on aura donc encore pour la vitesse de sortie en désignant par p la pression intérieure par unité de surface, par p' la pression extérieure qui s'oppose au mouvement, par ϖ la densité du fluide dans le réservoir, et par h la hauteur de sa charge,

$$V = \sqrt{2g\left(\frac{p - p'}{\varpi} + h\right)}.$$

On suppose, d'ailleurs, que la vitesse v de la tranche supérieure ou du piston est fort petite ; la dépense est égale encore à aV ; son volume est supposé donné sous la pression p intérieure du réservoir ; et si on nomme h' la hauteur en centimètres d'une colonne de mercure représentant la pression intérieure du réservoir, n le nombre de degrés centigrades de sa température ; la densité ϖ, ou le poids du mètre cube du fluide dont aV est le volume, sera donnée (Cours de la 1re année, § 211) (*) par la relation $\varpi = \frac{0{,}0171 \,.\, h'}{1 + 0{,}00375 \,.\, n}$.

(*) *Le Cours de la 1re année*, auquel l'auteur renvoie ses lecteurs dans ce chapitre et dans les chapitres subséquents, a été publié sous le titre de *Mécanique Industrielle, exposant les différentes méthodes pour déterminer et mesurer les forces motrices*, Bruxelles, 1839 ; un volume in-8°.

Lorsque le fluide est de la vapeur, on suppose qu'il n'y a point de condensation. Enfin, le poids du volume du fluide écoulé par seconde sera $aV \cdot \varpi$. Si le poids du fluide est très-petit, ou si h est négligeable par rapport à $\frac{p - p'}{\varpi}$, on prendra . . . . . $V = \sqrt{2g\left(\frac{p - p'}{\varpi}\right)}$; c'est la règle proposée par Daniel Bernouilli, mais elle est fautive lorsque p surpasse p' de plus de $\frac{1}{10}$ de p'.

105. *Écoulement des gaz quand la pression intérieure est sensiblement plus grande que la pression extérieure.* — Pour trouver la formule vraie dans le cas où la pression intérieure dans le réservoir surpasse sensiblement celle qui s'oppose à la sortie du fluide, on négligera *à fortiori* la charge h toujours très-petite, ou l'action de la gravité, ainsi que la vitesse v de la tranche supérieure, en sorte que la force vive acquise pendant le très-petit temps de l'écoulement du volume $ABB'A'$ (fig. 469) se réduira à $\frac{q}{g} V^2$; q représente encore le poids de $ABB'A'$, ou est égal à $\varpi \cdot ABB'A'$. Quant au volume sorti $abb'a'$, il ne peut plus être égal au volume $ABB'A'$; mais il doit être avec ce dernier, d'après la loi de Mariotte, dans le rapport inverse des pressions extérieure et intérieure p' et p. On aura donc

$$\text{volume } ABB'A' : \text{volume } abb'a' :: p' : p;$$

d'où

$$\text{volume } abb'a' = ABB'A' \times \frac{p}{p'}.$$

Ainsi, pendant le petit temps où la force vive $\frac{q}{g} V^2$ s'acquiert, il faut, outre les quantités de travail produites par chaque pression intérieure et extérieure p et p', considérer le travail favorable au mouvement du fluide et restitué par la dilatation du volume $ABB'A'$ qui devient $abb'a'$.

La quantité de travail de la pression p sur la tranche AB est

$$p \times A \times \overline{AA'} = p \times \text{volume } ABB'A'.$$

Quant à celle de p' sur l'orifice $ab = a$, laquelle s'oppose au mouvement, elle sera

$$p' \times a \times \overline{aa'} = p' \times abb'a'.$$

La différence de ces quantités de travail étant évidemment nulle à cause de

$$p \times ABB'A' = p' \times abb'a',$$

la force vive $+ \frac{q}{g} V^2$ est donc uniquement due au travail communiqué par la dilatation du volume $ABB'A'$ du gaz qui passe de la pression p à la pression p'. Ce travail est évidemment proportionnel au volume primitif du gaz ; car il sera double, triple, etc., selon que le volume primitif sera lui-même double ou triple. Si donc je nomme T le travail dû à la dilatation du même gaz en tant que son volume primitif soit un mètre cube, le travail dû à la dilatation du volume primitif $ABB'A'$ qui s'écoulera pendant le petit temps qu'on considère, sera représenté par $ABB'A' \times T$. Mais puisqu'on a $q = \pi \cdot ABB'A'$, on tire $ABB'A' = \frac{q}{\pi}$, et, par suite, $\frac{q}{\pi} \cdot T$ pour la quantité de travail produite par la dilatation du gaz. D'où nous conclurons, en vertu du principe des forces vives,

$$\frac{q}{g} V^2 = \frac{2qT}{\pi},$$

ou

$$V = \sqrt{\frac{2gT}{\pi}}.$$

Reste enfin à trouver T. Pour plus de simplicité, nous supposerons que le gaz dont le volume primitif est l'unité, est renfermé dans un tuyau dont la section aurait pour aire l'unité de surface, de manière qu'à l'état primitif ou sous la pression p, sa hauteur serait aussi égale à l'unité de longueur. Lorsque la pression est réduite à p', le volume est dilaté ; et comme les volumes ou les hauteurs, parce que ces volumes sont censés avoir toujours la même base, sont en raison inverse des pressions, la hauteur du volume dilaté

est devenue $\frac{p}{p'}$. Donc le chemin total parcouru en vertu de la dilatation est la différence des deux hauteurs extrêmes, c'est-à-dire $\frac{p}{p'} - 1$ ou $\frac{p - p'}{p'}$. Partageons maintenant cet intervalle en deux parties égales; il est évident qu'au milieu de l'intervalle dont il s'agit, la longueur du fluide sera $1 + \frac{p - p'}{2p'}$, ou $\frac{p + p'}{2p'}$; et qu'en nommant y la pression correspondante, on aura la proportion

$$1 : \frac{p + p'}{2p'} :: y : p, \quad \text{ou} \quad y = \frac{2pp'}{p + p'};$$

si maintenant on observe que les trois pressions consécutives sont p, $\frac{2pp'}{p + p'}$ et p', et que le chemin constant parcouru dans l'intervalle qui sépare les instants où elles ont lieu successivement est $\frac{p - p'}{2p'}$, on voit que l'estimation du travail total T est facile au moyen du théorème de Thomas Simpson, et qu'il est égal à

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{p - p'}{2p'} \left(p + 4 \cdot \frac{2pp'}{p + p'} + p' \right) = \frac{p - p'}{6p'} \left(p + \frac{8pp'}{p + p'} + p' \right).$$

Par conséquent, nous aurons ici, pour la vitesse de sortie,

$$V = \sqrt{\frac{2g}{\pi} T} = \sqrt{\frac{g(p - p')}{3p'\pi} \left(p + \frac{8pp' + p'}{p + p'} \right)}.$$

On remarquera, d'ailleurs, que la densité π qui entre sous le radical est celle qui a lieu sous la pression p dans l'intérieur du réservoir, et que celle du gaz au moment où il sort est celle qui correspond à la pression extérieure p'.

Cette dernière densité sera visiblement $\pi \cdot \frac{p'}{p}$. Par conséquent, le poids de gaz écoulé dans une seconde aura pour expression $a \cdot V\pi \cdot \frac{p'}{p}$, sauf les corrections dues à la contraction dont il sera parlé plus loin

106. *Applications numériques à l'écoulement par un orifice très-*

petit pratiqué dans une paroi mince. — Nous allons offrir trois exemples numériques sur la recherche de la vitesse de sortie par un orifice très-petit pratiqué à paroi mince, soit que le fluide soit un liquide ou qu'il soit un gaz.

1° Supposons que de l'eau à sa surface supérieure soit pressée par un piston ou de toute autre manière indépendamment de la pression atmosphérique, avec une pression de $0^k,20$ par centimètre carré de surface ; que la hauteur du niveau supérieur de l'eau au-dessus du centre de l'orifice soit de 4^m ; il s'agit de trouver la vitesse V à l'orifice ; et on aura recours à la formule du n° 103,

$$V = \sqrt{2g\left(\frac{p - p'}{\pi} + h\right)}.$$

Si la pression du piston est de $0^k,20$ par centimètre carré, la pression totale au-dessus du niveau de l'eau p sera égale à la pression atmosphérique augmentée de $0^k,20$. Mais la pression de p' qui s'oppose à la sortie du liquide est aussi une pression atmosphérique. Ainsi, la pression résultante sera de $0^k,20$ par centimètre carré ou de 2000^k pour un mètre carré de surface, ou 10 000 centimètres carrés. On fera donc $p - p' = 2000^k$. Quant à la densité π, elle est de 1000^k, poids du mètre cube d'eau. D'où $\frac{p - p'}{\pi} = \frac{2000^k}{1000} = 2^m$.

Nous avons dit que la hauteur h du niveau au-dessus du centre de l'orifice était de 4^m ; d'où $h = 4^m$, et $g = 9^m,809$. Faisant ces substitutions, on trouve

$$V = \sqrt{2g\,(2^m + 4^m)} = \sqrt{2g \,.\, 6^m}.$$

On voit que la vitesse de sortie est due à 6 mètres de hauteur. Pour avoir cette vitesse que les tables donneraient immédiatement, on remplacera, sous le radical, g par $9^m,809$; puis, extrayant la racine carrée du produit, on aura

$$V = \sqrt{2 \times 9,809 \times 6} = 10^m,84 ;$$

telle sera la vitesse de sortie.

2° Supposons que l'air soit chassé par un piston qui le presse avec une force mesurée par la pression de $\frac{1}{11}$ d'atmosphère. Ici nous ne parlons plus de la hauteur de la charge du gaz, parce

qu'on doit en faire abstraction, comme nous l'avons dit. La formule se réduit alors à

$$V = \sqrt{2g\,\frac{p - p'}{\pi}}.$$

Pour trouver la densité π, nous imaginerons que la température soit de 10 degrés centigrades. Si la pression du piston est de $\frac{1}{11}$ d'atmosphère, la pression totale p de l'air dans l'intérieur du réservoir, qui se compose de la précédente et de la pression atmosphérique supérieure, sera égale à $\frac{12}{11}$ d'atmosphère. La hauteur en centimètres d'une colonne de mercure qui représente la pression atmosphérique, est de 76; donc la colonne qui représente celle de $\frac{12}{11}$ d'atmosphère $= 76 + \frac{76}{11} = 83$ centimètres. Faisant, dans la relation $\pi = \frac{0{,}0171\,.\,h'}{1 + 0{,}00375\,.\,\theta}$, $h' = 83$, et $\theta = 10°$, on aura, pour le poids du mètre cube de l'air dans l'intérieur du réservoir,

$$\pi = \frac{0{,}0171 \times 83}{1 + 0{,}00375\,.\,10} = \frac{1{,}4193}{1{,}0375} = 1^k{,}37 \text{ environ.}$$

D'ailleurs, p étant $\frac{12}{11}$ d'atmosphère, et la pression p' contraire au mouvement étant celle d'une atmosphère, $p - p'$ sera de $\frac{1}{11}$ d'atmosphère. Une pression atmosphérique se mesure par $1^k{,}033$ pour un centimètre carré de surface ou par $10\,330^k$ pour un mètre carré. Le onzième de cette quantité ou $\frac{10\,330}{11} = 939^k{,}10$. Nous ferons donc, dans la formule, $p - p' = 939^k{,}10$, et $\pi = 1{,}37$. On aura, par conséquent,

$$V = \sqrt{2g\,.\,\frac{939{,}10}{1{,}37}} = \sqrt{2g\,.\,685^m{,}45} = 117^m \text{ environ.}$$

3° Si la pression intérieure excède la pression extérieure de plus de $\frac{1}{10}$ et que ce soit de $\frac{1}{5}$ d'atmosphère, on verra que la densité

π est de $1^k,50$, en supposant toujours la température de 10°. On aura alors recours à la formule

$$V = \sqrt{g\,\frac{p - p'}{3p'\pi}\left(p + \frac{8pp'}{p + p'} + p'\right)},$$

dans laquelle on fera $\pi = 1{,}50$, $p = \frac{6}{5} \times 10330 = 12396^k$, $p' = 10330$, et $g = 9{,}81$; ce qui donne

$$V = \sqrt{g \,.\, 3013} = \sqrt{9{,}81 \,.\, 3013} = 171^m,90.$$

Il est bon de remarquer que l'excès de pression intérieure p sur la pression extérieure p' s'obtient tout d'un coup par un manomètre à siphon *efg* (fig. 470), contenant de l'eau ou du mercure, et ouvert à ses extrémités *e* et *g*. La différence de hauteur du liquide dans les deux branches de *h* sur *i* est la colonne de pression résultante, de laquelle on déduit facilement $p - p'$, et, par suite, p et p', en observant que la pression d'une colonne d'eau, sur le mètre carré de surface, ayant un mètre de hauteur, est de 1000 kilogr., et que celle d'une pareille colonne de mercure est de 13598 kilogr.

107. *Dépense hypothétique par une paroi mince, et dépense effective.* — La détermination de la vitesse de sortie par l'orifice d'un réservoir conduit à la solution d'une question intéressante; c'est celle qui a pour objet de trouver le volume ou le poids du fluide écoulé dans un temps donné, dans 1″, par exemple; c'est ce qu'on nomme la dépense. Ce calcul serait facile si on connaissait la longueur AA' (fig. 471) parcourue par la tranche supérieure AB pendant le temps qu'on considère, c'est-à-dire le volume $ABB'A'$. Mais on ne peut pas toujours mesurer cette longueur. Or, nous pouvons trouver ce volume par la vitesse du liquide V à sa sortie à l'orifice *ab;* car, cette vitesse étant supposée constante ou uniforme, les molécules de fluide qui sont en *ab* au commencement du temps pendant lequel on veut évaluer la dépense, seront en *a'b'* au bout d'une seconde, et à une distance $bb' = V$, si on fait, comme on le doit, abstraction de la gravité. Donc, le volume de fluide *abb'a'*, écoulé pendant l'unité de temps, est celui d'un prisme qui a pour mesure le produit de V multiplié par la surface de la section *ab* de l'orifice, et si je nomme a l'aire de cet orifice, nous aurons $D = a \times V$,

Cette dépense ainsi estimée, qu'on nomme dépense hypothétique, est-elle d'accord avec celle qu'on obtient par l'expérience et qu'on nomme dépense effective? on peut prévoir déjà que ces deux dépenses doivent différer entre elles en examinant les hypothèses sur lesquelles reposent nos calculs. Dans ces calculs, on suppose :

1° Que l'orifice *ab* est très-petit par rapport aux sections *AB* d'arrivée du fluide dans le vase, sans quoi les vitesses ne seraient pas les mêmes aux divers points de la veine à la sortie de *ab*, surtout lorsque cet orifice est pratiqué dans une paroi verticale, et la vitesse d'arrivée *v* ne serait pas négligeable;

2° Qu'il n'y a dans le vase et au dehors ni obstacles, ni rétrécissement qui gênent l'écoulement, de façon que le mouvement est continu partout;

3° Qu'il n'y a aucun frottement de l'eau contre les parois du vase; à la vérité, il est toujours très-faible, comme on le verra plus bas, quand la vitesse dans le vase n'est pas très-grande;

4° Enfin, que le fluide arrive à la surface du vase par filets parallèles amenés d'une même vitesse *v*, et que les filets sont également animés d'une même vitesse parallèle *V* à l'orifice.

On remarquera que la dépense effective s'obtient par expérience en recueillant dans un vase l'eau qui s'écoule dans une ou trois minutes, et en divisant cette quantité par le nombre de secondes contenues dans le temps de l'observation. Mais il est impossible de mesurer directement la vitesse de sortie, parce qu'on ne distingue pas les molécules et qu'elles marchent trop vite. Toutefois, si le vase est uni, s'il n'a pas de rétrécissements ou d'étranglements, s'il est très-grand par rapport à l'aire de l'orifice pratiqué soit au fond soit aux parois verticales, si la paroi de l'orifice a peu d'épaisseur, si le fluide tombe librement dans l'air, alors le fluide ne sera gêné nulle part, et la plupart des conditions précédentes seront remplies. Si donc on prend, dans ces circonstances, pour *h*, ou pour charge du fluide, la hauteur du niveau supérieur au-dessus du centre de l'orifice, on devra trouver, pour vitesse moyenne *V* de sortie, la même que celle qui a été trouvée ci-dessus.

108. *Phénomène de la contraction.* — L'expérience prouve néanmoins que les filets fluides ne sortent pas parallèlement de l'orifice; la section de la veine n'est pas partout la même, et elle diminue à partir de l'orifice jusqu'à la distance *a'b'* comprise entre une demi-

fois et une fois sa largeur la plus grande; c'est là ce qu'on nomme *contraction* de la veine. Cette contraction est visiblement due à ce que les filets s'infléchissent ou changent de direction pour arriver de toutes parts de l'intérieur du réservoir à l'orifice; ce qui montre qu'elle ne sera pas la même dans toutes les circonstances. Elle sera moindre si l'intérieur du vase est disposé tellement que la déviation des filets soit faible par rapport à l'axe *LM* (fig. 472), perpendiculaire à l'orifice. Ainsi, elle devra diminuer si l'orifice *ab* se rapproche soit de *AD* soit de *BC*, ou si les deux faces *AD* et *BC* se rapprochent entre elles.

Dans le cas où l'orifice est vertical (fig. 473), la contraction est moins sensible à mesure que le niveau supérieur *AB* s'approchera de l'orifice, ou que ce dernier *ab* se rapprochera du fond *CD*. Elle sera également plus faible, si la paroi de l'orifice, au lieu d'être plane, est convexe au dehors (fig. 474), puisqu'il y aura moins de molécules divisées latéralement; et elle deviendra, au contraire, plus forte, quand la paroi de l'orifice est convexe vers le dedans (fig. 475).

La contraction est rendue la plus forte possible, lorsque l'orifice est reporté vers l'intérieur du vase (fig. 476) par une sorte de tuyau *EFGD*, parallèle à l'axe de l'orifice et dont la section diffère peu de l'orifice.

Borda, célèbre académicien, a trouvé qu'alors la contraction réduisait la section des filets à moitié de celle de l'orifice; et comme cette section des filets ne peut surpasser l'aire de l'orifice, la valeur du rapport entre ces deux sections est évidemment comprise entre 1 et $\frac{1}{2}$. Prenant grossièrement la moyenne, ou 0,75, cette valeur donnerait, à un huitième près, le rapport de la section contractée à celle de l'orifice.

109. *Multiplicateur de la dépense à paroi mince.* — L'expérience prouve encore que pour les orifices circulaires, la veine fluide conservera sensiblement la même section à partir de la section contractée; que, si on prolonge l'orifice par un bout de tuyau (fig. 477) ayant la forme de *toute la partie* qui se contracte ou se rétrécit, et qu'on pousse l'orifice à la dernière section du tuyau, la dépense donnée par le calcul pour ce nouveau vase, égale à très-peu de chose près celle qu'on obtient directement par le jaugeage et qu'on

nomme effective. D'où il résulte qu'il suffirait généralement de remplacer l'orifice véritable par l'orifice contracté, ou de multiplier l'aire a du premier par le nombre qui indique la contraction de cette aire et qu'on appelle le *coefficient de la contraction*. D'ailleurs, l'observation des jets d'eau indique que ceux-ci s'élèvent aussi haut et décrivent la même courbe qu'un corps qui s'échapperait de l'orifice avec la vitesse V, due à la pression du réservoir; on a donc pu admettre que la vitesse dans la section contractée était effectivement celle que donne le calcul. Mais cette conséquence varie dans quelques cas, et ne se soutient pas toujours, parce qu'elle suppose qu'il n'y ait point de force vive ou de travail perdu dans le mouvement du fluide, ou que la vitesse V ne serait jamais susceptible de s'altérer. C'est pourquoi il ne conviendrait pas toujours de multiplier la dépense théorique aV par le rapport ci-dessus, de l'aire contractée à l'aire de l'orifice, et nous appellerons le véritable rapport de la dépense effective à la dépense du calcul aV, *multiplicateur* de cette dépense. Nous le désignerons par la lettre grecque α, de sorte que la véritable dépense sera, en définitive, αaV. Reste à voir quelle est la valeur de α suivant les cas.

A cet égard il a été reconnu, par expérience, que le multiplicateur α reste le même à circonstances semblables, d'ailleurs, soit que l'orifice soit carré, rectangulaire, ou circulaire, ce qui comprend tous les cas de la pratique, pourvu qu'en comparant des orifices rectangulaires à des orifices circulaires, on compare leur plus petite ouverture à celle du diamètre de ceux-ci. α dépend donc principalement de cette plus petite ouverture des orifices rectangulaires, et des diamètres des orifices circulaires, à circonstances égales. Mais, si ces circonstances changent, si notamment la charge du fluide est plus forte ou plus faible, α varie, et il varie aussi selon que l'orifice est plus près ou plus loin des côtés du réservoir ou du fond (3e partie, 108).

Cela posé, voici les valeurs de α, ou du multiplicateur de la dépense hypothétique aV, suivant les cas.

TABLEAU des valeurs de α pour les orifices en mince paroi et isolés complétement des faces du réservoir.

CHARGE DU fluide sur le CENTRE de la section.	VALEURS DE α RÉPONDANT AUX DIAMÈTRES OU PLUS PETITES OUVERTURES DES ORIFICES CIRCULAIRES.						OBSERVATIONS.
	0m,20	0m,10	0m,05	0m,03	0m,02	0m,01	
m. 0,015						0,700	Pour les gaz, la charge génératrice est toujours supérieure à 2m, et on prendra le multiplicateur 0,6 ou 0,61 dans tous les cas. Pour des orifices au-dessus de 0m,20 d'ouverture, on prendra la valeur de α comme pour 0m,20. Pour les orifices au-dessous de 0m,01, on agira comme pour ceux de 0m,01. Enfin, pour les orifices intermédiaires entre ceux de la table, on prendra des moyennes relatives aux ouvertures et charges voisines immédiatement au-dessus et au-dessous.
0,02				0,627	0,660	0,696	
0,04			0,618	0,632	0,657	0,685	
0,06		0,592	0,620	0,640	0,656	0,677	
0,08		0,602	0,625	0,638	0,655	0,672	
0,10	0,593	0,608	0,630	0,637	0,655	0,667	
0,20	0,596	0,613	0,631	0,634	0,654	0,655	
0,30	0,601	0,617	0,630	0,632	0,644	0,650	
0,50	0,602	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644	
1,00	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	
1,50	0,603	0,612	0,620	0,620	0,621	0,618	
2,00	0,602	0,610	0,615	0,615	0,610	0,610	
10,00	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600	0,600	

Ce tableau est déduit des résultats des expériences de M. le capitaine du génie Lesbros, et il s'accorde avec le résultat des expériences faites antérieurement par Bossut, Michelotti et d'autres physiciens habiles; il n'y a de douteux que les résultats qui concernent les très-petits orifices et les très-fortes charges; mais l'in-

certitude n'est que de 0,001 sur les dernières décimales, et ce cas n'est pas celui de la pratique.

Il arrive souvent que l'orifice est près d'une face du réservoir ; la contraction devient alors nulle sur ce côté, et le multiplicateur est rendu un peu plus grand que ne l'indique le tableau. S'il est près de deux faces du réservoir, la contraction est nulle sur deux côtés de l'orifice, et le coefficient augmente encore. Voici comme on tiendra compte de ces circonstances :

Si la contraction est nulle sur un côté seulement, on prendra, au lieu de α donné par la table, ... 1,03 α
Si elle est nulle sur deux côtés . . . . . 1,06 α
Si elle est nulle sur trois côtés . . . . . 1,12 α

Il n'arrive point dans la pratique que la contraction soit nulle, surtout le pourtour de l'orifice ; ces derniers résultats sont déduits de ceux de M. Bidone ; mais ils ont besoin d'être vérifiés en grand.

Enfin, nous terminerons ce paragraphe par une dernière observation : c'est que tout ce qui précède est seulement applicable toutes les fois que le fluide sort librement du réservoir sans toucher le pourtour des parois ou des bords de cet orifice ; car il n'y a pas plus d'obstacles que si la paroi était mince.

110. Ce qui précède est seulement applicable au cas où l'orifice est fermé de toutes parts (fig. 478), et il arrive dans la pratique que quelques orifices rectangulaires n'ont pas de bords supérieurs. L'orifice se nomme alors *épanchoir, déversoir, réservoir ;* il est placé vers le niveau supérieur AB (fig. 479) de l'eau du réservoir. On peut encore ici calculer la dépense, comme dans ce qui précède, pourvu qu'on change le multiplicateur de la formule, selon ce qu'apprend l'expérience pour les cas divers. Soit l la largeur horizontale de cet orifice, et supposons ce dernier rempli jusqu'en B, prolongement du niveau dans le réservoir ; nous aurons toujours h comme représentant la hauteur de AB sur le centre ou milieu I de BC ; mais H représentera la hauteur totale de B ou A au-dessus du seuil C, de sorte que $h = \frac{1}{2} H$. La vitesse moyenne étant V, on aura

$$V^2 = 2gh = 2g \frac{H}{2} = \frac{1}{2} (2gH),$$

et, par suite, $$V = 0{,}707 \cdot \sqrt{2gH}.$$

La dépense théorique ou hypothétique sera

$$l \times H \times V = 0{,}71 \cdot l \cdot H \cdot \sqrt{2gH}.$$

Quant à $\sqrt{2gH}$, on en trouvera à l'ordinaire les valeurs dans les tables. Mais la dépense ainsi obtenue est trop forte, et il conviendra de la multiplier par un coefficient qui est environ 0,57 pour les cas ordinaires de la pratique, c'est-à-dire que la véritable dépense est donnée par la formule

$$0{,}405 \cdot l \cdot H \cdot \sqrt{2gH};$$

H étant la charge totale au-dessus du seuil.

Les expériences connues de Dubuat, Bidone, Eytelwein, et celles de M. Lesbros, ont appris que la valeur du coefficient 0,405 doit être réduite à 0,39 environ pour H plus grand ou égal à $0^m,20$, et qu'elle s'élève à 0,415 pour H très-petit ou de 1 à 2 centimètres, mais qu'elle demeure sensiblement la même, quelle que soit la contraction totale ou la position de l'orifice par rapport aux côtés verticaux du réservoir, pourvu qu'on mesure la hauteur H du niveau dans le réservoir au-dessus de la base ou du seuil C de l'orifice, en un point A assez éloigné de B ou C pour que le fluide y ait peu de vitesse; cette distance est environ une à deux fois la largeur de l'orifice, lorsque cette largeur est très-petite par rapport à celle du réservoir, et deux à trois fois si elle lui est égale.

Quand le fond C est au niveau du fond du réservoir, la vitesse est partout sensible, et la formule ci-dessus donnerait trop peu; peut-être que, dans ce cas, la valeur du coefficient s'élèverait à 0,45. Elle donnera, au contraire, trop, quand l'orifice sera prolongé par un bout de canal ou coursier qui aurait peu de pente et où il occasionnerait des remous par suite de la résistance du canal. Ces cas se présentent trop rarement dans la pratique, pour nous en occuper.

Nos raisonnements ci-dessus supposent que l'orifice est plein jusqu'au niveau général dans le réservoir. Le fait est que l'eau se déprime un peu en arrière de l'orifice à partir de B (fig. 480), et que sa surface suit une courbe dans le genre de la trajectoire parabolique. Ainsi, l'orifice n'est pas rempli sur toute la hauteur H.

L'expérience prouve que le rapport de H à l'épaisseur moyenne CK de la tranche à l'orifice demeure compris entre 1 et 1,40 (1 étant relatif aux fortes valeurs de H, et 1,40 aux petites valeurs de 1 à 2 centimètres), de sorte que, moyennement,

$$H = 1{,}25 \,.\, CK, \quad \text{ou} \quad CK = 0{,}80 \,.\, H = \frac{4}{5} H.$$

Néanmoins, on prendra toujours H en amont de l'orifice dans la formule ci-dessus, parce que le coefficient 0,405 corrige l'erreur commise en supposant l'orifice plein jusqu'en AB prolongé.

Si on considère CK comme véritable orifice et qu'on prenne pour charge de vitesse la hauteur de H au-dessus du centre de CK, la dépense théorique sera

$$l \,.\, CK \,.\, \sqrt{2g\left(H - \frac{1}{2} CK\right)};$$

mais il faudrait multiplier par 0,58 pour $H = 20$ à 30 centimètres, par 0,60 pour $H = 10$ centimètres, par 0,63 pour $H = 5$ centimètres, et par 0,70 pour $H = 1$ centimètre (ce qui est à peu près conforme au tableau du n° 109. Cependant la règle qui a été donnée au préalable est plus facile à retenir.

111. *Dépense par une paroi épaisse, ou par un tuyau de très-petite longueur.* — Toute la théorie exposée jusqu'ici est seulement relative au cas où l'orifice par lequel le fluide s'échappe est mince, ou à celui où le fluide sort librement, sans toucher les parois de l'orifice; en un mot il faut que la paroi ait une épaisseur qui ne dépasse pas une fois à une fois et demie la plus petite dimension de l'ouverture. Voyons maintenant ce qui arrive quand l'orifice est pratiqué en parois planes très-épaisses, ou qu'il est prolongé par un bout de tuyau prismatique ou cylindrique (fig. 481) d'une longueur égale à deux ou trois fois cette plus petite dimension de l'ouverture. Les circonstances seront d'ailleurs supposées les mêmes, si ce n'est que l'eau est censée toucher exactement les bords ou côtés du conduit dans tout son pourtour intérieur; c'est ce qu'on nomme *écoulement à gueule bée*. Les filets extérieurs suivent ici une marche parallèle. Les expériences n'ont été faites que pour les orifices de 1 à 20 centimètres sous de très-fortes charges; elles ont donné, moyennement, pour multiplicateur de la dépense, 0,815,

pour des circonstances identiques à celles où, l'orifice étant en minces parois, on obtient $\alpha = 0{,}619$. Nous verrons plus loin (3e partie, 115) comment on peut trouver la valeur du multiplicateur pour les cas où α serait différent.

Supposons que le tuyau soit une *buse* ou tuyau additionnel conique ou pyramidal. Si $a'b'$ (fig. 482) est semblable à l'orifice ab, que ses côtés soient les 0,8 ou les $\frac{4}{5}$ de ceux de ab, et que ces deux sections soient distantes entre elles d'une à deux fois la largeur ab, on prend $a'b'$ pour orifice dans le calcul de la dépense, et le multiplicateur 0,82, qui s'applique entièrement à la vitesse dans le cas des tuyaux cylindriques, s'élève ici à 0,95. Quand la forme de la buse diffère plus de la précédente, laquelle est à peu près celle de la veine contractée, le multiplicateur devient 0,90.

Le phénomène de l'écoulement à plein tuyau (fig. 483) est dû à ce que le fluide, après s'être contracté, se dilate, et rencontre les parois. On explique l'augmentation de la dépense en ce que les filets sortent parallèlement aux parois du tuyau, ou remplissent sa section. Mais la vitesse est réellement moindre que la vitesse théorique V; elle en est les 0,812 dans le cas ci-dessus des tuyaux ou buses cylindriques, et les 0,9 pour les buses coniques. La force vive acquise par l'eau à sa sortie du tuyau est simplement proportionnelle à $(0{,}812)^2V^2$ ou à $\frac{2}{3}V^2$ pour les uns, et à $(0{,}9)^2V^2$ ou à $0{,}81 \cdot V^2$ pour les autres. La perte de la force vive ou du travail de la gravité, ou le déchet dans la chute h, est par conséquent d'un tiers pour les tuyaux cylindriques et d'un cinquième pour les tuyaux coniques. De telles dispositions sont évidemment vicieuses, puisque la force vive est rendue moindre que celle qui est due à la chute ou que deux fois le produit de la dépense multipliée par h. Ce résultat, en apparence contraire aux principes ci-devant, est justifié en ce que la résistance le long du tuyau additionnel, et le choc des molécules qui affluent du réservoir contre l'eau en avant de la section contractée font perdre une partie du travail moteur. Nous montrerons plus loin (3e partie, 115) comment on peut mesurer ces pertes. La même raison fait qu'à mesure que le tuyau s'allonge, la vitesse de sortie V diminue; car les résistances de ce tuyau augmentent.

112. *Dépense par un canal découvert de très-petite longueur.*—Sou-

vent il arrive que l'ouverture d'un orifice est prolongée du côté d'aval par des canaux additionnels découverts, nommés *coursiers*. L'orifice rectangulaire par lequel l'eau se rend dans un tel canal, est fermé ou ouvert au moyen d'une vanne dont l'épaisseur est toujours fort petite. Ici la contraction s'opère complétement comme pour un orifice en mince paroi, l'eau est libre à sa surface supérieure quand elle est sortie. Le calcul s'établit comme si le canal n'existait pas ou était enlevé, et que le fluide tombât librement dans l'air (fig. 484), pourvu cependant que la pente du canal soit assez forte pour laisser échapper librement le fluide à mesure qu'il s'écoule, ou que ce canal soit très-court.

Quand des obstacles s'opposent au libre écoulement dans le coursier, l'eau gonfle en avant de l'orifice, ou forme ce qu'on appelle un *remous* (fig. 485), qui souvent s'étend jusque près de l'orifice et couvre la veine contractée. La contraction n'est plus alors apparente, et il s'établit une pression extérieure contre l'orifice. La vitesse et la dépense sont à la fois altérées. Conformément à ce qui a été dit plus haut, il faudra dans le calcul de V diminuer h de la charge moyenne immédiatement en avant de l'orifice, c'est-à-dire prendre

$$V = \sqrt{2g\,(h - h')}.$$

h' est la hauteur du remous au-dessus du centre de l'orifice de la vanne qui laisse passer l'eau dans le coursier ; $h - h'$ est la différence du niveau supérieur au-dessus de la surface d'eau qui couvre la veine ; puis on corrigera la dépense calculée en la multipliant par le coefficient pris dans la table du n° 109.

Dans tous les cas, la veine venant choquer le fluide au delà de la section contractée, c'est-à-dire à deux ou trois fois la largeur horizontale de l'orifice, la vitesse est altérée à l'endroit où elle choque le canal, et, comme pour les tuyaux fermés, elle est réduite à environ 0,82 de ce qu'indique le calcul. On l'obtient directement en chaque endroit, en prenant le profil de la surface du fluide par des ordonnées rapportées à une horizontale supérieure, en calculant l'aire de la section d'eau, et en divisant par cette aire la dépense calculée : ce dernier quotient donnera précisément la vitesse moyenne de l'eau en cet endroit.

XV.

ÉCOULEMENT DES FLUIDES PAR DES TUYAUX DE CONDUITE ET CANAUX DÉCOUVERTS.

118. *Perte de force vive d'un fluide tombant dans un vase en repos ou qui marche dans la direction du mouvement du fluide.* — Jusqu'ici nous avons principalement étudié le cas où le fluide s'écoule sans obstacle par un orifice pratiqué à la paroi mince d'un vase, ou dont l'épaisseur n'est pas telle que le fluide rejoigne ou rencontre les parois de manière à être forcé de couler à plein tuyau ou à gueule bée. Nous avons aussi indiqué ce qui arrive quand le contraire a lieu et que le tuyau est fort court : la vitesse au sortir du tuyau a diminué par les chocs et par les frottements ; cette dernière cause, peu influente pour une petite longueur de tuyau, amène une modification d'autant plus sensible, que le tuyau est plus long.

On a cherché à évaluer ces influences et à en tenir compte ; voici à quoi on est parvenu pour estimer les pertes de travail ou de force vive occasionnées par le choc et par les résistances qu'éprouve le fluide :

Soit *ABDC* (fig. 486) un vase rempli de liquide jusqu'en *AB*. Imaginez qu'un filet fluide *KL*, animé d'une vitesse *V* en *L* ou en *AB*, parvienne dans ce vase supposé au repos. Le fluide, ne pouvant s'échapper du vase, tourbillonne dans son intérieur, et, en vertu du frottement et du choc des molécules, il sera lui-même, comme le vase, bientôt réduit au repos. Si $M = \frac{Q}{g}$ est la masse du fluide qui arrive dans un certain temps, dans l'unité de temps, par exemple, MV^2 exprimera la force vive que le filet aura perdue pendant ce temps.

Supposons maintenant que le vase, au lieu d'être immobile, fuie devant la gerbe d'eau avec une vitesse V' et dans la direction de V, la gerbe affluente atteindra le vase avec une vitesse relative $V - V'$, c'est-à-dire que ses molécules y entreront avec la vitesse $V - V'$, et perdront cet excès de leur vitesse par les tourbillonnements et les chocs ; par conséquent, la force vive $M(V - V')^2$

sera perdue dans l'unité de temps et employée tout entière à vaincre les résistances a.

On suppose ici que le vase chemine dans la direction des filets; c'est le cas pratique de presque toutes les applications. Cependant, on aurait pu le déduire immédiatement de ce qui a été dit, dans le Cours de la 1re année (161 et suivants), sur le choc de deux masses m et m' animées de vitesses dirigées dans le même sens et égales à V et V'; on a vu que la perte de force vive résultant du choc était égale à $\frac{mm'}{m+m'}(V-V')^2$. Seulement ici la masse choquante m de fluide, qui tombe dans chaque petit temps sur la masse totale m' du fluide contenu dans le vase, est très-petite par rapport à m'; de sorte que l'expression précédente, qui peut se mettre sous cette autre forme $m\frac{(V-V')^2}{1+\frac{m}{m'}}$, se réduit, en définitive, à $m(V-V')^2$, et, par suite, à $M(V-V')^2$ pour la perte pendant l'unité de temps.

114. *Perte de force vive due aux étranglements.* — On concevra actuellement sans peine comment il est possible d'avoir égard à des pertes analogues dans le mouvement général des fluides. Supposons que $ABCD$ (fig. 487) soit un vase renfermant un liquide dont AB est le niveau, ab l'orifice de sortie, et que ce vase soit en outre traversé en $A'B'$ par une paroi solide ou diaphragme, percé aussi d'un orifice $a'b'$ dont l'aire est a', celle de ab étant a. Le fluide, obligé de passer par $a'b'$, se contracte; puis il vient choquer les molécules en avant et perd de sa force vive une portion mesurée par l'excès de sa vitesse sur celle que reprennent les molécules un peu plus loin. Si ab est assez distant de $a'b'$ pour que les tourbillonnements soient éteints en $A''B''$, par exemple, ou pour que les filets marchent parallèlement et avec la même vitesse en $A''B''$, comme cela a lieu en AB et aux sections contractées de ab et de $a'b'$, il sera facile de calculer les vitesses en ces différents endroits au moyen de l'une d'entre elles. Nous négligerons d'ailleurs encore la force vive du fluide en AB.

Soit V la vitesse inconnue du fluide à la section contractée de l'orifice ab, V' celle qui correspond à la section contractée de $a'b'$, et V'' la vitesse du fluide à la section $A''B''$ du vase, m la valeur du

multiplicateur de la dépense en ab, m' le multiplicateur de la dépense en $a'b'$, multiplicateurs qui sont donnés par la table du n° 109; la dépense en ab sera égale à maV. Mais il doit passer la même quantité de fluide par la tranche $A''B''$ et par la section contractée de $a'b'$. Le fluide qui passe en $A''B''$ sera mesuré par

$$\text{surf. } A''B'' \times V'' = AV''.$$

La dépense en $a'b'$ vaudra $m'a'V'$. Donc, on aura

$$maV = AV'', \text{ et, par suite, } V'' = \frac{maV}{A}.$$

De même, $$maV = m'a'V', \text{ ou } V' = \frac{ma}{m'a'} V.$$

La vitesse relative avec laquelle le fluide qui sort de $a'b'$ vient choquer celui de $A''B''$ est donc

$$V' - V'' = \frac{maV}{A} - \frac{maV}{m'a'} = ma\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{m'a'}\right) V.$$

La perte de force vive qui se fait au delà de a' est donc la masse $\frac{q}{g}$ du fluide écoulé dans le petit instant que l'on considère multiplié par $(V' - V'')^2$, ou par $m^2a^2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{m'a'}\right)^2 V^2$. Si on nomme K la quantité $m^2a^2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{m'a'}\right)^2$, facile à calculer, la perte de force vive en question sera $\frac{q}{g} . K . V^2$, qui correspond à un travail perdu représenté par $\frac{1}{2} . \frac{q}{g} . K . V^2$. Le travail de la gravité qh, produit pendant la durée du petit temps, est donc diminué de cette dernière quantité de travail. Mais la force vive acquise pendant ce même petit temps est $\frac{q}{g} V^2$. On aura, par conséquent,

$$\frac{q}{g} V^2 = 2qh - 2 . \frac{1}{2} . \frac{q}{g} . K . V^2.$$

Divisant par q et multipliant par g tous les termes de cette égalité, et réunissant dans un même membre tous les termes qui contiennent

V'^2, on trouve

$$V^2 (1 + K) = 2gh, \text{ ou } V = \sqrt{\frac{2gh}{1 + K}}.$$

On voit que la vitesse est ici moindre que $\sqrt{2gh}$, ou que celle qui est due à la charge, et qu'ainsi elle est diminuée par l'étranglement intérieur $a'b'$.

115. *Perte de force vive dans les tuyaux de petite longueur.* — Appliquons ce calcul aux tuyaux additionnels coulant à gueule bée. Ici l'étranglement provient de la contraction intérieure dans le tuyau, s'il n'y a pas d'obstacles dans le réservoir, comme on le suppose. Le fluide, après s'être contracté en m (fig. 488), se dilate en $a'b'$. Soit V la vitesse moyenne effective en $a'b'$, dont l'aire est égale à a. Les filets sortant parallèles par l'orifice extérieur a, la dépense est

$$V \times a'b' = aV.$$

Quant à la vitesse V' dans la section contractée m, elle peut se trouver, en observant que si a' est l'aire de l'orifice intérieur ab, et m le coefficient de contraction relatif à cet orifice, la dépense est encore $ma'V'$. D'où

$$aV = ma'V', \text{ ou } V' = \frac{a}{ma'} V.$$

La perte de force vive est

$$\frac{q}{g} (V' - V)^2, \text{ ou } \frac{q}{g} V^2 \left(\frac{a}{ma'} - 1\right)^2.$$

Telle serait la manière de procéder si les orifices ab et $a'b'$ étaient réellement inégaux; mais, dans le cas d'un tuyau additionnel cylindrique, on a $a = a'$, de sorte que la perte de force vive devient $\frac{q}{g} \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 V^2$. Faisant $K = \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2$, on arrive encore à la formule

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1 + K}}.$$

Ordinairement, lorsque la contraction est complète en m et pour des charges un peu fortes de 1 à 2 mètres, on a $m = 0{,}62$; d'où

$$\frac{1}{m} - 1 = 1{,}3757 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+K}} = 0{,}85,$$

et

$$V = 0{,}85 \cdot \sqrt{2gh}.$$

L'expérience a donné dans le fait le multiplicateur 0,82; mais cela peut tenir à ce que nous n'avons pas tenu compte du frottement du fluide le long du tuyau, lequel diminue encore le travail qh de la gravité.

Avec la formule ci-dessus, on pourra donc calculer la vitesse dans les petits tuyaux, puis la dépense.

Si le réservoir portait un diaphragme comme ci-dessus, percé d'un orifice mince, on agirait en outre comme plus haut. Enfin, si le diaphragme était très-épais, de manière à former un tuyau d'une longueur d'une à deux fois le diamètre, il faudrait calculer en conséquence la vitesse au sortir de ce tuyau, qui serait moindre que dans le cas ci-dessus.

116. *Dépenses des liquides ou fluides qui s'écoulent par un tuyau d'une longueur quelconque.* — Les résistances du frottement sont nuisibles quand la vitesse dans le tuyau est forte et quand la surface mouillée par le liquide l'est aussi. Soit donc $aba'b'$ (fig. 489) un tuyau de grosseur uniforme, joignant deux vases remplis de liquide jusqu'en $A'B'$ et AB, H la différence totale entre ces niveaux, ou la charge génératrice, a l'aire du tuyau ou des orifices, L la longueur développée du tuyau, C le contour ou périmètre de la section uniforme du tuyau, V la vitesse constante dans ce dernier. Les expériences connues, et les calculs de Coulomb, de Mest, Girard, Prony, Eytelwein et Navier, ont appris que la perte de travail occasionnée par le frottement ou la résistance d'un tuyau est proportionnelle dans le très-petit temps pendant lequel s'écoule le poids q du liquide, à

$$\frac{q}{g} \times \frac{L \times C \times V^2}{a};$$

ce travail est une certaine fraction n de ce produit; en un mot, il

est représenté par

$$n \cdot \frac{q}{g} \cdot \frac{L \times C \times V^2}{a}.$$

Si donc il n'y a pas d'étranglements, de coudes brusques qui occasionnent des chocs, les résistances se réduiront à celle dont il s'agit et à la perte de force vive qui a lieu après la contraction en *ab*. On aura donc, en considérant *a'b'* comme orifice de sortie,

$$\frac{q}{g} V^2 = 2qH - 2\frac{q}{g} \cdot K \cdot \frac{V^2}{2} - 2n \cdot \frac{q}{g} \cdot \frac{L \cdot C \cdot V^2}{a},$$

ou

$$V^2 = 2gH - K \cdot V^2 - \frac{2nLC \cdot V^2}{a},$$

ou

$$V^2 \left(1 + K + \frac{2nLC}{a}\right) = 2gH.$$

De là on tire aisément V, puis la dépense aV, quand on connaîtra n et la valeur $1 + K$, qui, calculée comme précédemment, est environ 1,515. Quant à n, les expériences apprennent qu'il est 0,0035 pour l'eau, et 0,00324 pour l'air et les gaz. On remarquera que s'il s'agit de l'écoulement de ces derniers, on doit remplacer (3e partie, 105 et 106) la charge génératrice H par $\frac{p - p'}{\pi}$, lorsque les pressions extérieure et intérieure ne diffèrent pas entre elles d'un dixième, ou par $\frac{T}{\pi}$ si cette différence est plus grande (T est le travail de la dilatation du gaz sous l'unité de volume primitif en passant de la pression p à la pression p').

Soit D le diamètre du tuyau, πD sera le contour C de la section transversale, et $\frac{\pi D^2}{4}$ son aire a; en sorte que

$$\frac{C}{a} = \frac{4\pi D}{\pi D^2} = \frac{4}{D}.$$

Si maintenant, dans la valeur de V, on fait ces diverses substitutions, on trouvera,

pour l'eau, $V = 26{,}44 \cdot \sqrt{\frac{DH}{L + 54 \cdot D}}$,

et, pour l'air, $V = 27{,}48 \cdot \sqrt{\frac{DH}{L + 58{,}3 \cdot D}}$.

On pourra même adopter la première formule pour l'air et les gaz, parce que n est très-peu différent, pourvu toutefois qu'à l'égard de ces derniers on remplace H comme on vient de le dire.

Enfin, si l'orifice de sortie $a'b'$ (fig. 490) est plus petit que la section a du tuyau, V étant la vitesse intérieure de ce tuyau, aV n'en serait pas moins la dépense. Si on appelle V' la vitesse de sortie, a' l'aire de $a'b'$ et m' son coefficient de contraction, on aura

$$aV = m'a'V', \quad \text{ou} \quad V' = \frac{aV}{m'a'}.$$

La force vive acquise par le fluide serait donc

$$\frac{q}{g} \cdot V'^2 = \frac{q}{g} \cdot \frac{a^2}{m'^2a'^2} \times V^2,$$

au lieu de $\frac{q}{g} \times V^2$. Il faudra donc, dans l'égalité précédente, remplacer l'unité par $\frac{a^2}{m'^2a'^2}$, et elle deviendrait

$$V^2 \left(\frac{a^2}{m'^2a'^2} + K + \frac{2nLC}{a} \right) = 2gH.$$

Lorsque a' est très-petit par rapport à a, on fera $m' = 0{,}60$. Si cet orifice est peu différent de a, ou si a est terminé par une buse ou tuyau additionnel (fig. 491), le coefficient m' variera de 0,82 à 0,96, comme il a été dit (3e partie, 111).

Application. — Les eaux qui arrivent de Scy à Metz, pour alimenter les fontaines de cette ville, sont conduites par des tuyaux de 3000 mètres environ de longueur et de $0^m{,}08$ de diamètre; la hauteur du niveau du réservoir supérieur au-dessus du bassin de distribution dans la ville est supposée de 20 mètres. Cherchons la quantité d'eau fournie dans vingt-quatre heures. A cet effet, dans la formule

$$V = 26{,}44 \cdot \sqrt{\frac{DH}{L + 54 \cdot D}},$$

nous poserons $H = 20^m$, $L = 3000^m$, $D = 0{,}08$; ce qui

donne

$$V = 26{,}44 \cdot \sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 20}{3000 + 54 \cdot 0{,}08}} = 26{,}44 \cdot \sqrt{\frac{1{,}60}{3004{,}32}}$$

$$= 26{,}44 \cdot \sqrt{0{,}000532} = 26{,}44 \times 0{,}023 = 0^{m},608.$$

Telle est la vitesse de l'eau dans le tuyau de conduite. L'aire de la section de ce dernier est déterminée par

$$\frac{\pi \cdot (0{,}08)^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot (0{,}08)^2}{4} = 0^{m\,car},005024.$$

Le volume de la dépense par seconde sera, par conséquent, $0{,}608 \cdot 0{,}005 = 0^{m\,cub},00304$. Dans vingt-quatre heures il y a 86400″; ainsi la quantité d'eau fournie en vingt-quatre heures sera environ $0^{m\,cub},00304 \times 86400$, ou $262^{m\,cub},656$.

XVI.

PRESSION EXERCÉE PAR LES FLUIDES EN MOUVEMENT CONTRE LES PAROIS DES VASES QUI LES CONTIENNENT.

117. *Mesure de la pression pour un vase de forme quelconque.* — Nous avons jusqu'ici uniquement recherché la vitesse d'écoulement et la dépense d'un fluide à la sortie des réservoirs ou des tuyaux de conduite. Il n'est pas moins intéressant, dans certains cas, de savoir déterminer la pression que les fluides exercent aux différents points d'un vase, afin de proportionner l'épaisseur des parois qui les contiennent à cette pression. Or, ce calcul est très-facile, comme on va le voir, pour toutes les sections où il est permis d'admettre que le fluide se meut par filets parallèles et avec la même vitesse dans tous les points de la section.

Soit *ABEFGHCD* (fig. 492) un vase de forme quelconque, contenant un fluide en mouvement qui s'écoule par un orifice inférieur *ab*, après avoir circulé dans le tuyau *EHGF*. Nous avons vu

précédemment comment on pouvait calculer la vitesse et la dépense qui se fait en ab par chaque seconde. Nous nommerons V cette vitesse dans la section contractée de ab, donnée par les formules, a l'aire de l'orifice de sortie, m le coefficient de la dépense, relatif à la contraction à la sortie, de sorte que la dépense véritable sera $m \cdot a \cdot V$. Cela posé, soit cd une section plane quelconque du vase, mais dans laquelle on suppose que les filets fluides se meuvent parallèlement entre eux et à la paroi de l'enveloppe, laquelle sera à peu près cylindrique sur une certaine étendue. Appelons b l'aire de cette section quelconque cd, et v la vitesse moyenne du fluide qui y passe, et commune à tous les filets. Le produit $b \cdot v$ sera aussi égal à la dépense maV, de sorte que $v = \frac{m \cdot a \cdot V}{b}$. Soit également p la pression moyenne sur l'unité de surface de la section cd, et remarquons que la pression effective sur le contour de cd sera un peu plus petite pour la position supérieure c, un peu plus grande pour la position inférieure d, si la section cd n'est pas horizontale, attendu que la charge totale du fluide au-dessus de d, comptée du niveau supérieur AB du réservoir, est un peu plus forte pour d que pour c; mais nous négligerons la différence de niveau entre ces points dans la supposition qu'elle est très-petite par rapport à la charge totale qui leur correspond. Nous nommerons pareillement p' la pression pour l'unité de surface, exercée extérieurement et en sens contraire sur les tranches ab qui sortent par l'orifice. Enfin, nous désignerons par h' la hauteur du centre de gravité de la tranche infiniment mince $cdc'd'$ au-dessus du centre de l'orifice ab, ou, plus exactement, au-dessus de sa section contractée, et, pour abréger, nous désignerons par q le poids de fluide écoulé à la fois par ab et par cd dans le petit instant où les molécules de cd arrivent en $c'd'$, et celles de ab en $a'b'$.

π étant la densité ou le poids de l'unité de volume du fluide dans l'intérieur du réservoir, $\frac{q}{g}$ sera la masse correspondante, et on aura

$$q = \pi \times \text{volume } cdc'd' = \pi \times b \times \overline{cc'};$$

d'où

$$b \cdot \overline{cc'} = \frac{q}{\pi}.$$

Raisonnant d'ailleurs comme au n° 103, et considérant ce qui se passe dans l'intervalle de fluide compris entre *cd* et *ab*, on trouvera que la force vive acquise par cette portion de fluide est . . . . $\frac{q}{g} V^2 - \frac{q}{g} v^2$; que le travail développé dans le sens du mouvement sur *cd* ou *b* par la pression *bp* est

$$b \,.\, p \times \overline{cc'} = p \times \frac{q}{\pi};$$

que celui qui est développé en sens contraire par la pression extérieure *ap'* sera

$$p' \,.\, a \times \overline{bb'} = p' \times \frac{q}{\pi},$$

et qu'enfin le travail développé par la gravité sur tout le fluide compris entre *cd* et *ab* sera $q \,.\, h'$. On aura ainsi, par le principe des forces vives, l'égalité

$$\frac{q}{g} V^2 - \frac{q}{g} v^2 = 2p \times \frac{q}{\pi} - 2p' \times \frac{q}{\pi} + 2qh',$$

et divisant par $2q$,

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} = \frac{p}{\pi} - \frac{p'}{\pi} + h'.$$

Donc

$$\frac{p}{\pi} = \frac{V^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} + \frac{p'}{\pi} - h'.$$

Remarquez maintenant que $\frac{V^2}{2g}$ est la hauteur due à la vitesse de sortie de l'orifice *ab*, qui est censée avoir été calculée par nos formules précédentes; $\frac{v^2}{2g}$ est la hauteur due à la vitesse dans la section considérée *cd* du vase, et qu'on sait aussi calculer, puisqu'on a $v = \frac{m \,.\, a \,.\, V}{b}$. Enfin $\frac{p}{\pi}$ et $\frac{p'}{\pi}$, d'après les principes d'hydrostatique, représentent les hauteurs de colonnes verticales du fluide sous la densité intérieure π, qui produiraient par leurs poids les pressions p et p' sur l'unité de surface, ou, si l'on veut, ce sont les hauteurs de pression correspondantes. La dernière égalité signifie, par conséquent, que « *la hauteur moyenne de pression du fluide sur*

« *la section* cd, *que l'on considère, est égale à la hauteur due à la vi-*
« *tesse de sortie, plus la hauteur de pression exercée à l'extérieur de*
« *l'orifice, diminuée de la hauteur due à la vitesse dans cette même*
« *section* cd *et de la hauteur de son centre de gravité au-dessus du*
« *centre de l'orifice.* »

Telle serait aussi la charge génératrice en vertu de laquelle le fluide s'écoulerait par un très-petit orifice pratiqué en *cd*. Mais il faut que cet orifice soit très-petit, pour que la dépense et la vitesse par l'autre orifice *ab* ne soient pas sensiblement altérées. S'il en était autrement, on aurait recours au principe des forces vives pour évaluer chacun des écoulements simultanés et chaque vitesse de sortie en particulier.

118. *Mesure de la pression quand le vase est très-grand par rapport à l'orifice.* — Lorsque le fluide, avant d'arriver à l'orifice *ab* (fig. 493), n'éprouve aucune résistance quelconque, aucun choc, et que de plus la section supérieure et d'arrivée *AB* du fluide dans le vase est très-grande relativement à l'orifice *ab* ou *a*, nous savons que la vitesse *V* de sortie est due à la charge totale *H* de fluide sur *ab*, de sorte que $\frac{V^2}{2g} = H$. Par conséquent, on aura, pour la pression autour de la section *cd*,

$$\frac{p}{\pi} = H - h' + \frac{p'}{\pi} - \frac{v^2}{2g}.$$

$H - h'$ étant ici la charge de fluide au-dessus de la section *cd*, on en conclut que « *la hauteur de pression sur une section* cd *d'un pa-*
« *reil vase est mesurée par la charge du fluide au-dessus de cette sec-*
« *tion, plus la hauteur de pression exercée à l'extérieur de l'orifice de*
« *sortie, diminuée de la hauteur due à la vitesse qui a lieu dans cette*
« *section.* »

119. *Diversité des pressions dans un tuyau.* — Soit *cd* (fig. 494) une section transversale quelconque d'un tuyau par lequel s'écoule un fluide. Imaginez qu'en cet endroit on insère la branche recourbée *yt'* d'un tube vertical *tu*, ouvert par les deux bouts, et que la pression exercée sur le sommet ouvert *u* soit égale à p' qui sera la pression atmosphérique, comme cela a lieu contre l'orifice de sortie du tuyau d'écoulement. Le fluide s'élèvera dans le tube vertical *tu* à une

hauteur ts, telle que $\frac{p'}{\pi} + ts$ sera égal à la hauteur de pression intérieure correspondante à la section cd ou à $\frac{p}{\pi}$. Donc, on aura

$$ts = \frac{p}{\pi} - \frac{p'}{\pi} = \frac{V^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} - h'.$$

S'il se trouvait que l'aire de la section cd ou b fût telle que $\frac{V^2}{2g}$ soit simplement égal à $\frac{v^2}{2g} + h'$, la hauteur ts du liquide dans le tube serait nulle. Mais si l'aire de la même section était telle que $\frac{V^2}{2g}$ fût moindre que $\frac{v^2}{2g} + h'$, alors le fluide extérieur tendrait à remonter dans le vase, la hauteur de la pression intérieure $\frac{p}{\pi}$ serait inférieure à celle de la pression extérieure $\frac{p'}{\pi}$. Par conséquent, si on établissait le tube vertical dans la position $y's't'$, l'extrémité en bas et plongée dans un fluide MN de même densité π, ce dernier remontera dans ce tube au-dessus de son niveau en s', tellement que la hauteur de la pression intérieure $\frac{p}{\pi}$, augmentée de $t's'$, ferait équilibre à celle de la pression extérieure $\frac{p'}{\pi}$, ou qu'on aurait

$$t's' = \frac{p'}{\pi} - \frac{p}{\pi} = \frac{v^2}{2g} + h' - \frac{V^2}{2g}.$$

Si, d'ailleurs, la hauteur $t's'$ était plus grande que la hauteur de s' au-dessus du niveau mn du vase inférieur, le fluide de ce dernier serait en quelque sorte aspiré, et monterait continuellement avec une vitesse due à la différence $t's' - t's$. Cette dernière conséquence n'est, au reste, qu'approximative; car elle suppose que la section cd du tuyau puisse recevoir cet excès de fluide sans augmenter de vitesse, et nécessairement il faut que sa vitesse v et celle de l'orifice V s'augmentent; modifications qui influeront elles-mêmes sur la pression $\frac{p}{\pi}$ et par suite sur la hauteur $t's'$.

120. *Pression dans les tuyaux cylindriques additionnels.* — Toutes ces circonstances se présentent dans le tuyau cylindrique additionnel horizontal (fig. 495). Ici h' est nul; d'où

$$\frac{p}{\pi} - \frac{p'}{\pi} = \frac{V^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}.$$

Supposons qu'il s'agisse de la section contractée, et que vers cet endroit on insère le tube vertical $x't'$ plongé dans un fluide inférieur. Je dis que ce fluide est susceptible d'être élevé ou aspiré par la veine, ou que la hauteur de pression intérieure $\frac{p}{\pi}$ est moindre que la hauteur de pression extérieure $\frac{p'}{\pi}$. Car V étant la vitesse dans le tuyau cylindrique plein, et a étant sa section, et m' le coefficient de la contraction; $m'a$ sera la section contractée, et si v est la vitesse de cette dernière section, on aura

$$m'av = aV, \quad \text{ou} \quad v = \frac{V}{m'}.$$

Mais, comme m' est fractionnaire, on voit que v est plus grand que V, et, par suite, $\frac{v^2}{2g} > \frac{V^2}{2g}$. Ainsi $\frac{p'}{\pi}$ l'emporte sur $\frac{p}{\pi}$. Cette théorie, donnée par M. Navier, est confirmée par les expériences de Venturi. Si nous considérons une section cd au delà de la section contractée, on a $b = a$, $v = V$, $h' = 0$, et, par conséquent, $\frac{p}{\pi} = \frac{p'}{\pi}$. Ainsi, le fluide inférieur ne montera plus quand le tube vertical $x't'$ sera inséré à la section cd.

121. *Pression dans les canaux découverts.* — Si dans un tuyau fermé où la section est constante ainsi que la vitesse, la pression est la même partout et égale à la pression atmosphérique, on conçoit qu'il doit en être de même dans un canal découvert où le mouvement est uniforme. La pression serait égale partout à la pression atmosphérique; mais, comme dans ce qui précède nous avons fait abstraction de la hauteur du fluide dans chaque section, on voit que dans un canal découvert *à régime réglé*, la hauteur de pression en chaque point se mesure par la pression atmosphérique augmentée de la charge de fluide correspondante, ou de la distance

verticale du centre de gravité de cette section au point le plus élevé de cette même section.

122. *Observation générale sur les pressions d'un fluide.* — Tous les principes exposés sur les pressions sont applicables aux fluides élastiques comme aux liquides, si la pression intérieure surpasse peu la pression extérieure ou d'un dixième environ. Lorsque cet excès sera devenu plus grand, on raisonnera sur la portion de fluide élastique comprise entre l'orifice et la section pour laquelle on cherche la pression, absolument de la même manière qu'on en a agi au n° 105.

XVII.

ÉCOULEMENT DE L'EAU PAR LES CANAUX DÉCOUVERTS.

123. *Mouvement de l'eau dans les canaux découverts, à pente uniforme et de grande longueur.* — Les canaux découverts par lesquels les eaux sont conduites, ont un profil en forme de trapèze ou de rectangle (fig. 496); et leur fond, horizontal dans le sens de la largeur, a, dans le sens de la longueur, une pente qu'on rend autant que possible uniforme. Il faut distinguer deux cas : tantôt un canal a une très-grande longueur et peu de pente; la vitesse y devient uniforme, de façon que les sections d'eau sont les mêmes dans tous les points du canal; c'est ce qu'on nomme *régime réglé*. Tantôt le canal a une faible longueur, comme il arrive dans les coursiers des usines; le régime varie alors d'un point à l'autre; des chocs, des pertes de force vive, des tourbillonnements se manifestent, et il devient difficile de soumettre le mouvement du liquide au calcul. Il faut donc ne pas confondre la circonstance où le canal a une longueur de dix à trente fois sa largeur, avec celle où cette longueur est cent fois la largeur; car, dans cette dernière, le régime est constant, et la vitesse se calcule ainsi qu'il suit :

Soit V la vitesse moyenne et constante dans chaque section, C le contour de la partie mouillée du profil, a l'aire du profil transver-

sal de l'eau, n la fraction qui multiplie la valeur du travail dû à la résistance des bords et du fond, L (fig. 497) la longueur du canal pour une hauteur de pente H, longueur qui se confond sensiblement avec la base, parce que la pente $\frac{1}{10}$ est déjà excessive; enfin $\frac{H}{L}$ est la pente pour un mètre de longueur. Pour une tranche quelconque, l'accroissement de force vive pendant son passage d'une section à l'autre est évidemment nul, puisque la vitesse V reste la même. La quantité de travail qH, imprimée par la gravité, sera, par conséquent, détruite par le travail de la résistance du canal sur la longueur L qui correspond à la hauteur H, et on aura

$$qH = \frac{nq}{g} \cdot \frac{L \times C \times V^2}{a};$$

d'où

$$V = \sqrt{\frac{gHa}{ncL}}.$$

Si on remplace n par sa valeur 0,0035, et g par $9^m,809$, on trouve

$$V = 53,58 \cdot \sqrt{\frac{aH}{LC}}.$$

$\frac{H}{L}$ étant la pente du canal, on voit que cette formule donnera la vitesse quand la pente est donnée. Réciproquement, si on veut trouver la pente pour une vitesse donnée, on se servira de la formule

$$\frac{H}{L} = \frac{CV^2}{(53,58)^2 a} = 0,000348 \cdot \frac{CV^2}{a}.$$

Il ne faut pas croire que la vitesse soit cependant arbitraire. On connaît évidemment le volume d'eau que ce canal doit conduire par seconde, et si on l'appelle Q, on aura $Q = aV$. De plus, cette vitesse ne saurait dépasser trente centimètres sans corroder le fond et les berges du canal; si, d'ailleurs, elle est réduite à $0^m,20$, l'eau ne serait plus susceptible d'emporter les limons qui surviennent dans les temps de crues, et le canal finirait par s'engorger. La vitesse doit donc être comprise entre 20 et 30 centimètres.

Enfin, une autre raison s'oppose à ce que la vitesse V soit rendue trop grande, c'est que la hauteur H croît avec la vitesse, et comme

celle-ci demeure la même en aval comme en amont, la hauteur de chute H, due à la pente du canal, est perdue pour l'usine où les eaux sont amenées. V étant donc ainsi déterminé, on conclut $a = \frac{Q}{V}$, et, par suite, C; donc, enfin, la pente $\frac{H}{L}$ est également arrêtée. Quoiqu'on vienne de dire que, connaissant a, le contour mouillé soit déterminé, cela suppose qu'on se soit donné la largeur du fond et les talus des bermes. Or, le calcul apprend que le rapport le plus favorable est celui pour lequel la largeur moyenne de la section mouillée est double de la profondeur d'eau; cependant, pour ne pas trop approfondir le canal, la largeur s'étend jusqu'à quatre fois.

124. *Moyen de mesurer la vitesse moyenne dans un canal. Jaugeage des eaux courantes.* — Pour mesurer la vitesse moyenne dans un canal, on se sert d'un flotteur ou d'un moulinet. Le flotteur n'est employé que quand la section et la largeur du canal sont constantes sur une grande longueur. Les flotteurs sont des disques de chêne d'un pouce environ, et dont la densité, très-approchante de celle de l'eau, ne les met point en prise aux courants d'air. Après avoir jeté à la surface de l'eau un de ces flotteurs, un peu en amont du point de départ, pour que l'uniformité de sa marche s'établisse, on compte, avec un pendule ou avec une montre à secondes, le temps qu'il emploie à parcourir une longueur déterminée, et on divise cette dernière par le nombre de secondes qu'a duré l'observation.

Si la vitesse n'est pas la même dans tous les points de la longueur du canal, on se sert du moulinet ou d'une roue très-légère en fer-blanc dont les palettes trempent faiblement dans l'eau. En multipliant le nombre des tours par la circonférence qui correspond au milieu de la partie plongée des palettes, et en divisant ce résultat par le nombre des secondes contenues dans le temps de l'observation, on obtient une vitesse un peu plus faible que celle de la surface de l'eau, mais qui en diffère d'une quantité à peine appréciable.

Mais une telle vitesse n'est que celle qui a lieu à la surface de l'eau, et doit être distinguée de la vitesse moyenne du canal ou de celle qui, multipliée par l'aire du profil, donne la dépense. D'après Dubuat, si on nomme V cette vitesse moyenne, V' la vitesse à la

surface de l'eau d'un canal et V'' celle qui a lieu au fond, on a

$$V = \frac{V' + V''}{2}.$$

Dans les cas ordinaires où la vitesse est comprise entre $0^m,30$ et $1^m,30$, $V = \frac{4}{5} V'$. M. de Prony a donné cette autre règle,

$$V = V' \frac{V' \cdot \frac{4}{5} \cdot 2^m,732}{V' + 3,153},$$

où la vitesse moyenne V et la vitesse à la surface V' sont exprimées en mètres, et de laquelle résulte le tableau suivant.

TABLEAU pour mesurer la vitesse moyenne de l'eau dans un canal, par la règle de M. de Prony.

VALEURS DE V'.	VALEURS DE $\frac{V}{V'}$.
m. 0,00	0,725
0,50	0,786
1,00	0,812
1,50	0,832
2,00	0,848
2,50	0,862
3,00	0,873

Il est convenable de faire remarquer que la vitesse moyenne ne répond pas au milieu de la profondeur ; la vitesse la plus grande est un peu au-dessous de la surface; c'est par cette raison que les roues plongent un peu. La vitesse est aussi plus faible vers les rives

qu'au milieu de la largeur ; aussi convient-il de jeter les flotteurs au milieu du canal, ou de faire en cet endroit les observations relatives au moulinet.

On a souvent besoin de jauger un cours d'eau. Si le canal est uniforme, on mesure la section à chaque extrémité ; puis on prend pour section la moyenne entre ces sections.

Enfin, la vitesse se mesure soit par le flotteur, soit par le moulinet, puis on déduit de cette vitesse à la surface, comme ci-dessus, la vitesse moyenne, laquelle, multipliée par l'aire de la section moyenne, donne le volume d'eau que le canal débite par seconde.

Mais, lorsque le canal n'est pas régulier et qu'on ne peut trouver une longueur suffisante en ligne droite, il faut établir un barrage ; et, lorsque la dépense en aval de ce dernier est telle que le niveau d'amont demeure de niveau, c'est une preuve que cette dépense est égale à celle qui alimente le canal. On en agira de même pour une rivière ; on observera près d'une usine établie, si le niveau reste constant pour une certaine ouverture de vanne ; la quantité d'eau que la vanne laissera alors échapper sera égale à celle que la rivière débite.

125. *Mouvement de l'eau dans les canaux découverts de petite longueur.* — Revenons aux canaux de petite longueur ou d'une longueur comprise entre trente et cent fois leur largeur. En général, la dépense s'obtient en considérant ce qui se passe près de l'orifice, et ne dépend pas de la longueur du canal. La dépense étant connue et déterminée selon que l'eau couvre ou non la veine contractée, si on voit que la section d'eau reste la même partout, on trouvera la vitesse moyenne en divisant la dépense par la section, parce qu'effectivement la marche des filets est alors parallèle. Si le mouvement n'est pas uniforme et que le canal soit abordable, on opérerait de la même manière, c'est-à-dire que, pour trouver la vitesse altérée en chaque point, on diviserait la dépense par la section correspondante. Mais si le canal n'est pas abordable, ou qu'il ne soit pas établi, on supposera qu'un peu au delà de la section contractée de la vanne, la vitesse est réduite à 0,82 . $V = v$. Soit h la pente du canal sur toute sa longueur, q le poids d'eau qui s'échappe dans un très-petit temps ou même pendant une seconde, V' la vitesse à l'extrémité du canal, on aura, si on ne tient pas

compte du travail de la résistance de ce dernier,

$$\frac{q}{g}(V'^2 - v^2) = 2qh, \quad \text{ou} \quad V' = \sqrt{2gh + v^2}.$$

Mais la véritable vitesse à cette extrémité doit être évidemment plus faible. Pour l'obtenir, on suppose que le mouvement a lieu dans le canal avec la vitesse $\frac{v + V'}{2}$, moyenne entre la vitesse d'arrivée v et celle de sortie V'; d'où on conclura la section moyenne. On pourra donc calculer (3e partie, 123) la pente qui correspond à cette uniformité hypothétique; cette pente serait la diminution à apporter à h dans la valeur de V', de sorte que cette dernière s'obtiendrait ensuite d'une manière plus rapprochée. De fait, on dispose ordinairement les coursiers de telle sorte que la vitesse n'y varie pas. S'ils sont inclinés à 45°, le canal est court, et la règle

$$V' = \sqrt{2gh + v^2}$$

donne assez bien la vitesse pour le point du canal le plus éloigné de la vanne.

126. *Établissement des coursiers dans les machines.* — Pour éviter les pertes de travail ou de force vive occasionnées par le frottement de l'eau le long des coursiers qui versent l'eau sur les machines, et par les chocs et les tourbillonnements qui résultent de la contraction produite à la sortie de l'orifice, il faudra 1° faire ces coursiers les plus courts possible; on mettra le récepteur de la machine tout contre le réservoir (fig. 498), et dans cette vue on incline quelquefois la paroi du réservoir en avant pour reporter l'orifice sous une roue hydraulique. 2° Il faudra éviter les contractions latérales et sur le fond de l'orifice; le moyen est tout simple : d'abord on mettra le fond de l'orifice et du coursier dans le prolongement exact de celui du réservoir; ensuite on donnera aux côtés du coursier près l'orifice la forme rétrécie que prend la veine fluide (fig. 499), comme cela a été expliqué (3e partie, 108). Mais on aura soin que le surplus du canal soit le prolongement exact de la partie rétrécie et soit bien raccordé avec elle; autrement il y aurait toujours choc et perte de force vive. Comme on ne connaît pas

rigoureusement la forme de la veine fluide, cette disposition donnera toujours lieu à des pertes de travail appréciables, et la moindre erreur de disposition aura de l'influence si la charge du fluide dans le réservoir est un peu forte.

Il vaudra mieux mettre les joues latérales du coursier dans le prolongement des faces du réservoir, ainsi qu'il est représenté (fig. 500) au plan et à la coupe pris par l'axe, et placer l'orifice ou vanne en aval de CA, face intérieure du réservoir, à une distance CD égale à une fois ou une demi-fois sa largeur horizontale ab; on fera

$$ef = \frac{ab}{0,8} = \frac{5}{4}\,ab.$$

Puis on tracera des arcs fb et ae, tangents en a et b aux joues bn et am du coursier. Si bn se trouvait juste dans le prolongement d'une grande face du réservoir, on laisserait les choses dans cet état, et on tracerait l'arc ae comme ci-dessus. Le dessus de $aefb$ doit être libre. Par là on évite les contractions intérieures et extérieures. Comme la vitesse en ef sera toujours très-petite par rapport à celle en ab, la perte de force vive résultant d'une erreur dans la disposition $abfe$ sera insensible.

Si la paroi de l'orifice est en charpente mince, on construira l'ouverture de la même manière; cela formera un petit réservoir à part.

Enfin, si la vanne est inclinée (fig. 501), $abfe$ se trouvera couvert par le talus de la paroi, et formera une sorte de buse saillante sur la face générale AB du réservoir.

Ces constructions sont faciles à saisir; on réduira la feuillure de la vanne le plus possible, et à cet effet, on la rendra mince si on la fait en fonte ou en fer et en calculant son épaisseur comme celle d'une barre, appuyée à ses deux bouts et chargée de la pression du fluide dans tous ses points. On évitera de même toute saillie et on fera des arrondissements à tous les angles. On aura d'ailleurs le soin de ne pas oublier que l'ouverture de l'orifice, dans le calcul de la dépense, doit être mesurée perpendiculairement au fond du coursier suivant IK (fig. 502).

A l'aide de toutes ces précautions la vitesse sera due ici à la charge H sur le centre de l'orifice, ou égale à $\sqrt{2gH}$; la contraction n'aura plus lieu que sur le sommet de l'orifice ; rien ne ralen-

lissant la vitesse en aval de l'orifice, il n'y aura plus de choc.

Le coefficient de la dépense sera plus grand que ne le donne la table du n° 109 à charge égale. Pour des charges de $0^m,80$ à 2^m et 3^m, on le supposera de $0^m,70$ si la vanne a sa paroi verticale, de $0^m,75$ si elle est inclinée à 1 de base sur 2 de hauteur, et de $0^m,80$ pour 1 de base sur 1 de hauteur.

Pour éviter, dans le cas des vannes inclinées, que la feuillure ne tombe dans l'arrondissement intérieur, on prolongera les joues du coursier vers l'intérieur (fig. 503); on fera les raccordements $a'e$, $b'f$ plus loin et plus courts, selon que le demandera l'inclinaison. La contraction sera toujours peu sensible.

XVIII.

RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES.

127. *Hauteur due à la vitesse d'arrivée du fluide sur le récepteur; vitesse de régime de ce dernier.*—Il existe un grand nombre de récepteurs hydrauliques, ou mis en mouvement par l'eau; nous ne considérerons que les récepteurs le plus en usage et les plus avantageux; en un mot ce sont les roues hydrauliques. Mais une même théorie leur est applicable, et nous commencerons par en donner un exposé succinct. La première chose qu'on doit connaître, c'est la vitesse V avec laquelle le fluide arrive sur le récepteur. Or, comme la hauteur h, due à cette dernière vitesse, diffère souvent beaucoup de la hauteur du niveau supérieur du réservoir au-dessus du point d'entrée sur le récepteur, la hauteur due à cette vitesse V sera ce qu'on nomme *hauteur disponible* ou *effective* d'entrée. Si Q est le poids de fluide dépensé par seconde, $Q \cdot h$, ou $Q \cdot \frac{V}{2g}$, sera le travail disponible à l'arrivée sur la machine.

Au premier instant la machine étant au repos, sa vitesse, d'abord zéro, augmente par l'action du fluide jusqu'à un certain terme où l'équilibre s'établit entre la puissance du moteur et les résistances

de toute espèce ; la vitesse que la machine a acquise est dite *de régime*, ou *permanente*, ou *de stabilité*. Lorsque la machine se compose uniquement de rouages et que la résistance est constante, la vitesse demeure uniforme, ou constante à chaque instant. Si, au contraire, le mouvement ou la résistance des pièces est variable, la vitesse du récepteur ne fait qu'osciller entre des limites peu étendues, de sorte qu'on en peut considérer la valeur moyenne comme la véritable vitesse uniforme.

128. *Effet utile des récepteurs.* — C'est donc à compter de l'instant où la vitesse de régime s'établit, et qui a lieu au bout de quelques minutes, que nous considérons le mouvement du récepteur censé uniforme. Le travail d'inertie employé à faire sortir le récepteur du repos est tout à fait négligeable, et, puisque sa force vive reste constante, l'accroissement de celle-ci entre deux temps donnés est zéro. Nous ne considérerons que le récepteur et la résistance utile P qu'il a à vaincre ; nous supposerons que v est la vitesse dirigée suivant la direction de P, de sorte que Pv est le travail utile pendant une seconde, et Pvt le travail utile pendant le très-petit temps t.

129. *Relation de l'effet utile avec les forces vives du fluide à l'entrée et à la sortie du récepteur.* — Nous nommerons $\frac{q}{g} = m$ la masse de fluide qui arrive sur le récepteur, ou qui en sort dans chaque élément du temps t, w la vitesse absolue que conserve le fluide en sortant du récepteur ; la force vive du fluide en entrant sera mV^2, et en sortant mw^2. Lorsqu'il entre, le fluide peut choquer le récepteur si sa vitesse diffère de celle de ce dernier ; il en résulte une perte de force vive, exprimée (3e partie, 113) par le produit de m et du carré de la vitesse relative que nous nommerons u, en sorte que la perte de force vive sera mu^2. Si le fluide ne quitte pas immédiatement le récepteur, qu'il reste dessus et descende avec lui de la hauteur h', la gravité développera sur le récepteur un travail égal à $q \,.\, h'$, ou à $m \,.\, gh'$. Cela posé, le principe des forces vives sera encore applicable comme pour l'écoulement des fluides, c'est-à-dire que la force vive mV^2 d'entrée, plus deux fois le travail mgh', ajouté par la gravité pendant la descente de m sur la machine, sera égale à deux fois le travail utile Pvt, plus la force vive mw^2 de sortie,

plus la force vive perdue mu^2. On aura donc

$$mV^2 + 2mgh' = mw^2 + 2Pvt + mu^2.$$

Cette égalité devant avoir lieu pour chaque petit temps t, on voit qu'au bout d'une seconde, $m \cdot V^2$ devient V^2 multiplié par la somme des masses m successives écoulées au bout d'une seconde, ou par M, et qu'il en est de même pour les autres termes. D'où il suit que, M étant la masse d'eau qui arrive ou qui sort par seconde, on aura cette relation,

$$MV^2 + 2Mgh' = Mw^2 + 2Pv + Mu^2.$$

130. *Valeur de l'effet utile.* — Nous avons appris, dans ce qui précède, à calculer le volume d'eau, en mètres cubes, écoulé pendant une seconde par un orifice, ou la dépense, que nous nommerons D. Son poids Q sera donc $1000^k \times D = Q$, et sa masse $M = \frac{Q}{g} = \frac{1000^k}{g} \cdot D$. Ainsi on aura M aisément, et on pourra calculer tous les termes de l'égalité ci-dessus, sauf Pv, si nous connaissons V, h', w et u. Nous trouverons ensuite

$$Pv = \frac{1}{2} MV^2 + Mgh' - \frac{Mw^2}{2} - \frac{Mu^2}{2}.$$

131. *Causes qui augmentent ou diminuent l'effet utile.* — On voit que l'effet utile Pv sera le plus grand possible quand

$$\frac{Mw^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}, \text{ ou } \frac{1}{2} M(w^2 + u^2) = 0,$$

c'est-à-dire quand $w = 0$ et $u = 0$. La condition $u = 0$ indique qu'il ne doit point y avoir de chocs à l'entrée, et la condition $w = 0$ que le fluide ne doit pas posséder de vitesse à sa sortie du récepteur. Il faut de plus que le fluide dans l'intérieur du récepteur ne tourbillonne pas non plus, et qu'en se mouvant sur la pièce il perde le moins possible de son travail par les frottements. L'effet Pv comprend en outre les résistances passives des pièces matérielles du récepteur, et cela occasionne un déchet de travail dont il faudra tenir compte dans certaines circonstances. Si, par exemple, le récepteur est un piston sur lequel le fluide vient tomber, comme dans les machines à colonne d'eau, le frottement de ce

piston est considérable. En appelant F la résistance de ce frottement, son travail sera $F \cdot v$, et on devra le retrancher de $\frac{1}{2} MV^2 + Mgh'$. Mais, comme nous n'avons en ce moment en vue que les roues hydrauliques dont les résistances se réduisent à celles de l'air et du frottement des tourillons, nous ne ferons pas d'abord entrer le terme Fv dans la relation précédente; toutefois on ne doit pas oublier qu'il existe et qu'il est à défalquer du travail disponible livré effectivement par le récepteur au reste de la machine.

132. *Maximum absolu de l'effet utile.* — Si donc w et u étaient nuls, on aurait

$$Pv = \frac{1}{2} MV^2 + Mg \cdot h'.$$

Nous avons d'ailleurs supposé $V^2 = 2gh$, h étant la chute disponible à l'entrée du récepteur. Ainsi,

$$Pv = Mgh + Mgh' = Mg(h + h') = Q(h + h').$$

Q est le poids de l'eau versé sur le récepteur par seconde; h' est la chute depuis l'entrée sur le récepteur jusqu'à la sortie. Si h était égale à la hauteur du réservoir sur le point d'entrée, $h + h'$ serait la chute totale ou H, et $Q(h + h')$ représentera le travail *absolu* ou totalement disponible, imprimé par la gravité à l'eau. C'est ce qu'on nomme le *maximum absolu* du travail d'une chute d'eau. Mais jamais $h + h'$ n'est égal à H : on est toujours, comme on l'a vu, soit par la contraction, soit par les pertes de force vive et par les résistances du fluide amené par un tuyau ou canal sur le récepteur ; on est, dis-je, toujours contraint à perdre quelque chose de la chute génératrice de V. Le récepteur sera donc considéré comme produisant le *maximum* d'effet quand il rend le travail $Mg(h + h')$, bien que h soit déjà affaibli. Quant à h', ou à la hauteur du point d'entrée du fluide sur le récepteur au-dessus du point de sortie, en la supposant entièrement parcourue par le fluide, c'est supposer que ce dernier quitte le récepteur au point le plus bas possible, ou au niveau du canal inférieur, sans quoi $h + h'$ serait encore plus au-dessous de la chute disponible. On voit, d'après cela, qu'il est nécessaire de disposer les canaux de fuite et d'arrivée de l'eau,

de façon à éviter toute cause de perte de force vive, telle qu'une trop grande pente, les coudes, rétrécissements, etc.

Quand la machine exige pour son travail régulier plus d'eau que n'en fournit le courant sur lequel elle est établie, la charge sur l'orifice diminuerait continuellement, si on ne pratiquait en avant de l'usine un grand réservoir qui sert de régulateur pendant cinq ou six heures au moins dans les grandes sécheresses; après quoi l'eau ayant baissé sensiblement, on interrompt le travail, jusqu'à ce que le bassin soit rempli. On conçoit que l'abaissement du niveau est lui-même une grande cause de perte de travail.

133. *Moyens d'obtenir le maximum absolu d'effet utile.* — Puisque, pour que le récepteur rende tout le travail disponible $Mg(h+h')$, il suffit des deux conditions $u=0$ et $w=0$, voyons comment on pourra rendre ces vitesses nulles ou les plus petites possibles.

u, la vitesse relative ou perdue, sera nulle si le mouvement du fluide est dirigé dans le sens du mouvement du point du récepteur qu'il tend à choquer, et si le fluide possède la même vitesse que ce point. Quand la vitesse du fluide est plus grande, il y a choc de la part du fluide contre le récepteur. Si elle est plus faible, c'est le récepteur au contraire qui choque le fluide. Mais u étant la différence des deux vitesses, Mu^2 n'en est pas moins une perte de force vive occasionnée par ce choc pendant une seconde; nous y reviendrons plus loin.

La vitesse absolue w, conservée par l'eau à la sortie du récepteur, dépend de la vitesse avec laquelle elle coule sur le récepteur et de la vitesse de ce dernier. Si la première est nulle, ou que le fluide fasse partie de la machine, ou soit au repos relatif sur elle, le fluide en la quittant possédera la vitesse v' du point par lequel il la quitte: ainsi $v'=w$. Or w ou v' sera alors nul ou très-petit, soit quand la machine se meut lentement, ou quand le point de sortie du fluide est très-près de l'axe de relation. Si, au contraire, le fluide se meut dans l'intérieur du récepteur avec une vitesse u', il en sortira avec une vitesse composée de u' et de la vitesse du point de sortie a (fig. 504), que nous nommerons encore v', c'est-à-dire avec la vitesse résultante w des vitesses u' et v', résultante qu'on trouvera par le parallélogramme des vitesses (2e partie, 4). Supposons que l'eau coule dans l'intérieur de canal ab entraînée avec le récepteur, et que la vitesse du point a de sortie soit av'. L'eau a d'abord cette

vitesse; de plus elle coule le long de *ab*, avec une vitesse relative qui est *av'* en *a*; sa vitesse *absolue* en sortant sera, par conséquent, la résultante *aw* de *av'* et de *au'*. Cette vitesse absolue peut être zéro dans deux suppositions : 1° Si *u'* et *v'* sont nuls à la fois, c'est le cas déjà spécifié ci-dessus ; 2° Si la courbe *ab* est tangente à *av'* et dirigée en sens contraire, et si de plus $u' = v'$.

134. *Moyens d'approcher du maximum absolu. Maximum relatif de l'effet utile.* — Il n'arrive en aucun cas qu'il soit possible de satisfaire exactement à ces conditions ; il faut au moins tâcher d'en approcher autant qu'il soit possible.

Ordinairement la tangente extrême en *a* du canal *ab* fait avec la direction *av'* du mouvement du récepteur un angle de 30° au moins. Si *v'* diffère peu de *u'*, *w* devient très-petit, ainsi que Mw^2.

Enfin, il y a des récepteurs dans la pratique, qui ne permettent ni d'éviter le choc à l'entrée, ni d'annuler la vitesse *w* à la sortie. On est alors réduit à combiner les choses de façon que $M(u^2 + w^2)$ soit seulement le plus petit possible, et l'effet utile Pv le plus grand, d'après les données ou dispositions qu'on peut faire varier ou changer, telles que, par exemple, la vitesse *v* du récepteur ou la vitesse *V* du fluide à l'arrivée. On obtient alors ce qu'on appelle le *maximum d'effet relatif*.

Cette question se présente, entre autres, sur des récepteurs déjà établis et dont il est seulement loisible de modifier la vitesse.

135. *Roues verticales à palettes planes mues par-dessous.* — Nous allons actuellement appliquer ces principes aux roues hydrauliques, en commençant par la roue à palettes planes, mues par-dessous dans un coursier rectiligne (fig. 505). C'est la roue le plus en usage pour les petites chutes au-dessous de deux à trois mètres, parce qu'elle prend une grande vitesse. Elle se compose de deux jantes égales et parallèles, dont chacune se trouve réunie à l'arbre tournant, par quatre ou six bras. Ces derniers sont saillants en dehors de la circonférence extérieure des jantes pour recevoir des palettes planes. Dans les intervalles de ces bras, les palettes sont fixées à des chevilles intermédiaires qu'on nomme *bracons*. Les palettes sont éloignées entre elles d'environ un pied à quinze pouces. Leur hauteur varie aussi selon le rayon de la roue, d'un pied à quinze pouces. Leur largeur est relative à la force qu'on veut obte-

nir et à la quantité de fluide dont la profondeur, dans le coursier, indépendamment de la roue, ne doit pas excéder le tiers ou le quart de la hauteur des palettes ; mais il arrive souvent qu'on fait cette profondeur plus grande, par rapport aux palettes. Le coursier doit bien emboîter les ailettes ; un jeu de deux centimètres suffit ; ce jeu est, par la maladresse des charpentiers, élevé à cinq ou six centimètres. Les coursiers sont inclinés d'un dixième à un quinzième ; quant à la vanne, elle est placée le plus près possible de la roue.

136. *Effet utile maximum de ces roues.* — Nous appellerons P l'effort exercé sur la roue par le fluide suivant la circonférence qui répond au milieu des ailettes, v la vitesse de cette circonférence, $P \cdot v$ sera le travail transmis ou effet utile par seconde. On peut se représenter P comme un poids soulevé par la roue au moyen d'une corde flexible passant sur une poulie supérieure et sur la circonférence moyenne ci-dessus ; v est la hauteur de l'élévation de ce poids pendant une seconde.

Le mouvement de la roue étant censé uniforme, l'eau se gonflera entre les palettes ou aubes, et fera un remous ou *matelas* qui se mouvra avec la vitesse v de la roue. L'eau qui affluera avec la vitesse V viendra choquer, non les palettes, mais le matelas ou remous qui se trouve en avant, avec une vitesse relative $u' = V - v$. Elle sortira d'ailleurs hors de la roue avec la vitesse de cette dernière ; ce qui donne $w = v$. Enfin, comme le coursier est sensiblement horizontal, on a $h' = 0$ à très-peu près. Faisant ces substitutions, $u = V - v$, $w = v$, et $h' = 0$, dans la relation de l'effet utile établie au n° 130, nous aurons ici

$$Pv = \frac{1}{2} M V^2 - \frac{M v^2}{2} - \frac{1}{2} M (V - v)^2 = \frac{1}{2} M \left\{ V^2 - v^2 - (V - v)^2 \right\}.$$

On voit que Pv est *égal à la moitié de la force vive en entrant, diminuée de la moitié de celle qui est conservée à la sortie et de la moitié de celle qui est détruite par le choc.*

La masse M s'obtient en observant que si D est le volume d'eau en mètres cubes par seconde, son poids $Q = 1000^k \times D$, et que

$$M = \frac{1000^k \times D}{g} = \frac{1000}{9{,}809} \cdot D.$$

Le calcul de Pv est donc facile en toute circonstance ; toutefois

on remarque que Pv varie avec v vitesse de la roue, et qu'il est nul soit que $v = 0$ ou que $v = V$. Il y a donc une valeur de cette vitesse v, valeur comprise entre 0 et V, qui doit rendre Pv un *maximum* relatif; c'est celle pour laquelle le terme $v^2 + (V - v)^2$, qui entre négativement dans l'expression de Pv devient le plus petit possible.

A cet effet, construisons cette quantité géométriquement. Sur une droite quelconque (fig. 506) nous prendrons $AV = V$, et $Av = v$, de sorte que sur cette droite la partie vV représentera $V - v$. Élevons vV' perpendiculaire à AV et égale à vV, ou à $V - v$; tirons AV'. Le carré de AV', d'après la proposition de Pythagore relative au triangle rectangle $AV'v$, sera tel qu'on aura

$$\overline{AV'}^2 = \overline{Av}^2 + \overline{V'v}^2, \quad \text{ou} \quad \overline{AV'}^2 = v^2 + (V - v)^2.$$

Si pour v on prend sur la même droite une autre grandeur Av' et qu'on élève à son extrémité v' une perpendiculaire $v'V''$ égale à $v'V$, on aura un autre point V'', lequel, avec le point V' et tous les points analogues, déterminera une droite VV'', inclinée à 45° sur AV. Or, de toutes les distances AV, AV'' du point A à la droite VV'', la plus courte est la perpendiculaire AV'' à cette dernière droite. Ainsi, l'angle $VV''A = 90°$, et $V''AV = 45°$. Le triangle $AV''V$ est donc isocèle, et Av' ou v est la moitié de la base AV, ou est $\frac{1}{2} V$; ce qui indique que le *minimum* de $v^2 + (V - v)^2$, ou le *maximum* de Pv, correspond à une vitesse de roue moitié de celle avec laquelle l'eau arrive. Si nous faisons $v = \frac{1}{2} V$ dans la valeur $v^2 + (V - v)^2$, celle-ci devient

$$\overline{Av'}^2 + \overline{v'V}^2, \quad \text{ou} \quad \frac{V^2}{4} + \frac{V^2}{4} = \frac{1}{2} V^2;$$

d'où

$$Pv = \frac{1}{2} M \left(V^2 - \frac{1}{2} V^2 \right) = \frac{1}{4} MV^2.$$

Maintenant on remarquera que si la roue transmettait tout le travail disponible de l'eau, elle donnerait $\frac{1}{2} MV^2$; ce qui prouve qu'au *maximum* elle ne fournit que la moitié de ce travail; le reste est perdu par les chocs et par la fuite de l'eau avec la vitesse de la roue.

Dans la réalité, et d'après les expériences de Bossut et de Smeaton, cette roue ne donne que $\frac{3}{10}$ ou 0,30 du travail possédé, c'est-à-dire les $\frac{6}{10}$ de l'effet donné par le calcul ; ce qui est dû au jeu indispensable et à ce que l'eau, en vertu de la charge du remous, s'écoule avec une vitesse plus grande que la vitesse v de la roue. L'expérience apprend aussi que la vitesse qui correspond au *maximum* est un peu au-dessous de $\frac{1}{2} V$, et égale environ à $\frac{2}{5} V = 0{,}4 . V$; ce qui est dû sans doute à ce que le remous est plus grand en amont, et que l'eau agit un peu par son poids sur les aubes, ce qui augmente d'autant plus l'effet que v est plus petit.

Telles sont les conditions du meilleur établissement de cette roue en la supposant exactement emboîtée dans le coursier.

137. *Diminution de l'effet utile par le jeu du coursier.* — Lorsqu'on laisse du jeu entre les palettes et le coursier, l'effet diminue rapidement. Une partie de la masse d'eau M s'échappe par le jeu. Connaissant l'épaisseur ab de la tranche fluide dans le coursier, on diminuera M dans la valeur de Pv, d'après le rapport de la section $a'b'c'd'$ (fig. 507), interceptée dans le fluide par la palette, à la surface $abcd$ de la section d'eau. Cette dernière section est égale à $\frac{D}{V}$. De là on conclura ab, en divisant le quotient $\frac{D}{V}$ par la largeur totale du coursier. V est la vitesse de l'eau à son arrivée sur la roue, et $\frac{D}{V}$ la section d'eau dans le coursier supposé libre. Il paraît que quand le jeu est très-grand, il faut prendre pour Pv les 0,75 de sa valeur théorique, c'est-à-dire qu'on a

$$Pv = 0{,}75 . M . \frac{a'b'c'd'}{abcd} . \frac{V^2}{4}.$$

Quant aux roues à palettes qui se meuvent dans un courant indéfini ou très-large, nous y reviendrons plus loin.

138. *Effet utile pour une vitesse quelconque de la roue.* — Souvent quand la vitesse de la roue est mal réglée, v diffère beaucoup de $\frac{1}{2} V$ ou de $\frac{2}{5} V$. Alors, pour avoir Pv, il faut calculer sa valeur

générale $\frac{1}{2} M \left\{ V^2 - v^2 - (V - v)^2 \right\}$, et en prendre encore les 0,60. On simplifie ces calculs, en observant que si sur $AV = V$ comme diamètre (fig. 508), on décrit la demi-circonférence AsV; elle coupera l'ordonnée vV' dont l'abscisse $Av = v$, en un point s, tel que le carré de sv sera $\frac{V^2 - v^2 - (V - v)^2}{2}$. En effet, le triangle AsV rectangle en s, donne $\overline{AV}^2$, ou $V^2 = \overline{As}^2 + \overline{sV}^2$. Par le triangle rectangle Asv, on a $\overline{As}^2 = \overline{Av}^2 + \overline{sv}^2 = v^2 + \overline{sv}^2$; et par le triangle rectangle sVv, $\overline{sV}^2 = \overline{sv}^2 + \overline{vV}^2 = \overline{sv}^2 + (V - v)^2$. Substituant ces valeurs de $\overline{As}^2$ et de $\overline{sV}^2$ dans celle de V^2, on trouve

$$V^2 = \overline{2sv}^2 + v^2 + (V - v)^2,$$

et, par suite, $$\overline{sv}^2 = \frac{V^2 - v^2 - (V - v)^2}{2}.$$

Or, sv est moyen proportionnel à Av et vV, ou à v et $V - v$. D'où $\overline{sv}^2 = v(V - v)$. Égalant entre elles ces mêmes valeurs de $\overline{sv}^2$, on aura, enfin,

$$V^2 - v^2 - (V - v)^2 = 2v(V - v).$$

Si nous faisons cette nouvelle substitution dans l'expression de Pv, nous aurons

$$Pv = \frac{1}{2} M \cdot 2v(V - v) = Mv(V - v)^{k \cdot m};$$

d'où on tire $$P = M(V - v)^k.$$

On prendra les 0,60 du travail Pv et de l'effort P de la roue, calculés ainsi théoriquement, pour avoir ceux qui correspondent à la pratique.

139. *Rapport de l'effet maximum utile à l'effet absolu de l'eau.* — On fera attention que V, ou la vitesse d'arrivée de l'eau sur la roue, diffère essentiellement de celle qui est due à la chute au-dessus du centre de l'orifice par lequel se fait l'écoulement; et que, par l'addition d'un petit tuyau (3e partie, 111), la première peut être réduite

aux 0,82 de la deuxième, en sorte que la force vive restante ou disponible sur la roue est les 0,82, ou les 0,67, ou les $\frac{2}{3}$ de la force vive absolue : c'est le cas de presque toutes les roues de moulin, parce que la roue est placée au delà de la section contractée. Or, la roue la mieux établie ne rend que les $\frac{3}{10}$ de l'effet de la chute disponible, et celle-ci n'est que les $\frac{2}{3}$ de l'effet absolu. Le travail *maximum* de la roue est, par conséquent, réduit à 0,20 ou au cinquième de la hauteur absolue de chute au-dessus du point de sortie sur la roue ; souvent encore ce travail n'en est que le dixième, comme dans les anciens moulins de la ville de Metz qui sont mus par des roues à palettes verticales.

140. *Roue verticale à aubes cylindriques mues par-dessous.* — La roue verticale à aubes cylindriques (fig. 509) diffère principalement de la précédente en ce que les palettes droites y sont remplacées par des aubes cylindriques qui se raccordent presque tangentiellement à la circonférence extérieure de la roue pour éviter le choc de l'eau à l'entrée, et qui, au lieu d'être isolées et soutenues par de petits bras ou bracons, sont solidement emboîtées dans deux couronnes planes concentriques à la roue. L'auteur a d'ailleurs eu soin de réunir dans les divers accessoires tous les genres de perfectionnements indiqués par la théorie et par l'expérience.

141. 1° *Vanne et pertuis.* — La vanne, le pertuis et la retenue sont disposés comme il a été dit (3e partie, 126), de façon à éviter les contractions latérales et intérieures, ainsi que toutes les résistances susceptibles de diminuer la vitesse.

2° *Fond du coursier antérieur.* — Le fond AT du coursier en amont de la roue est dirigé tangentiellement aux couronnes, et il est plan jusqu'au point de contact T, déterminé par la perpendiculaire CT, abaissée du centre C de la roue sur ce fond. Sa pente est de $\frac{1}{15}$, ou de $\frac{1}{10}$ au plus.

3° *Fond du coursier sous la roue.* — A partir de T, le fond est cylindrique, de façon à emboîter exactement la roue avec le jeu strictement nécessaire, qui est de 1 centimètre pour une roue en fer ou en fonte, et de 2 centimètres pour une roue en bois, qui

n'est jamais d'une exécution parfaite et qui peut fléchir ou se fausser; la portion circulaire *TB* est prolongée jusqu'en un point *B*, tel que l'intervalle *TB* surpasse de cinq à six centimètres celui qui existe entre deux aubes voisines, de façon qu'il y ait toujours une aube au moins emboîtée et que le fluide ne puisse librement s'en échapper.

4° *Ressaut en arrière; canal de fuite.* — Le coursier est brusquement interrompu en *B* par une marche ou ressaut *BD*, qui permet à l'eau de sortir librement de la roue; l'arête *B* de ce ressaut doit être placée au niveau *MN* du fluide dans le canal qui sert à évacuer les eaux de l'usine en temps ordinaires, c'est-à-dire quand il n'y a pas sécheresse ou surabondance d'eau. A partir de ce ressaut, le canal d'évacuation doit recevoir immédiatement en largeur et en profondeur les dimensions propres à faciliter l'écoulement sans exiger une trop grande pente, conformément à ce qui a été dit (3e partie, 123), pente qui est toujours une perte de la chute totale disponible sur une certaine étendue du cours d'eau.

5° *Largeur du coursier en amont et de l'orifice.* — On donne à la largeur *aa'* horizontale de l'orifice (fig. 510) et de la partie *aTT'a'* antérieure du coursier un peu moins que la largeur des aubes de la roue ou de l'intervalle des couronnes, afin que l'eau n'aille pas rencontrer l'épaisseur de ces dernières; cet excès de largeur doit être d'environ trois centimètres de chaque côté pour les roues bien construites.

6° *Logement des couronnes dans les joues du coursier.* — Pour donner aux couronnes la liberté de se mouvoir, on pratique des entailles cylindriques *ceT*, *c'e'T'* dans les joues latérales du coursier, avec un jeu suffisant de 2 à 3 centimètres sous l'épaisseur des couronnes.

7° *Tracé des aubes cylindriques.*— Comme l'eau se dégagerait mal des aubes à la sortie, si elles étaient exactement tangentes à la circonférence extérieure de la roue, et qu'elle choquerait le fluide en amont, on donnera à ces aubes une légère inclinaison relative à l'épaisseur de la lame d'eau que le coursier doit recevoir. *mn* (fig. 511) étant la nappe supérieure de cette lame, on élèvera, en un point de rencontre de cette nappe avec la circonférence extérieure des couronnes, la perpendiculaire *no* sur le fond du coursier, laquelle ira rencontrer la circonférence intérieure en *o*; du point *o* comme centre on décrira l'arc du cercle *np*, tangent à *mn*; ce sera le profil

des aubes. Si les couronnes étaient très-larges, on prendrait *o* au-dessous de la circonférence intérieure ; si elles l'étaient peu, on le prendrait au-dessus, afin de n'avoir pas des courbes *np* trop étendues. La seule attention à avoir, c'est que l'arc du cercle *np* occupe perpendiculairement la couronne intérieure, afin que si l'eau jaillissait au-dessus de l'aube, ce fût verticalement, et qu'elle y retombât immédiatement. D'après cette construction, l'angle *int*, formé par les aubes avec la circonférence extérieure de la roue, sera d'environ 30° sexagésimaux pour une hauteur d'ouverture de l'orifice de 30 centimètres, et de 20° à 25° pour une hauteur de 10 à 15 centimètres.

8° *Nombre et construction des aubes.* — Le nombre et l'espacement des aubes dépend aussi du volume d'eau admis sur la roue et du rayon de cette dernière. Pour les roues de 3 à 4 mètres de diamètre, on ne donnera pas moins de trente-six aubes à la roue ; on en donnera quarante-huit, au moins, pour celles de 6 à 7 mètres de diamètre.

9° *Largeur des couronnes.* — Nous nous bornerons à dire que l'intervalle entre leur circonférence extérieure et leur circonférence intérieure égale, au moins, $0^m,40$ à $0^m,35$ pour les charges de fluide dans le réservoir de $0^m,80$ de hauteur seulement, et qu'il est de $0^m,60$, au moins, pour les charges approchantes de 2 mètres. Cette largeur est motivée sur ce que l'eau ne doit pas pouvoir s'élever au-dessus des couronnes en suivant les aubes.

142. *Effet maximum utile des roues à aubes cylindriques.* — Occupons-nous maintenant des effets mécaniques de cette roue. Nous admettrons que l'eau, en arrivant dans la direction propre du mouvement des aubes et de la roue, et presque tangentiellement au premier élément de ces aubes, ne donne lieu à aucun choc à l'entrée. Cela posé, et conservant les dénominations du n° 136, on observera que, puisque l'eau arrive avec la vitesse V, tandis que les aubes fuient devant elle avec une vitesse v, cette eau entrera sur les aubes avec une vitesse $V - v$, en vertu de laquelle elle s'y élèvera contre l'action de la gravité et de la force centrifuge, à une certaine hauteur que nous ne calculerons pas, mais que l'expérience et le raisonnement s'accordent à ne pas supposer au-dessus de la hauteur due à $V - v$, ou de $\frac{(V-v)^2}{2g}$. L'eau, après être arrivée à ce point le plus élevé, tout en étant emportée par la roue, redescend

par l'action de la gravité et de la force centrifuge qui lui rendent en sens contraire la vitesse $V - v$ qu'elle possédait au moment de monter ; elle tendra donc à sortir des aubes avec cette vitesse. Mais, comme elle est emportée avec la vitesse v de la roue, elle sortira avec la vitesse absolue et tangentielle $(V - v) - v$, ou $V - 2v$. Telle sera la vitesse résultante de sortie, et si elle est nulle, ou si $v = \frac{V}{2}$, l'eau n'éprouvera pas de perte de force vive en sortant ; mais comme elle ne choque pas non plus en entrant, il s'ensuit que la roue produira le *maximum* d'effet absolu, ou que l'effet utile Pv sera égal à $\frac{1}{2} MV^2$, ou à la quantité de travail renfermé dans l'eau à son arrivée sur la roue. Nommant H la hauteur due à V, Q le poids d'eau écoulé dans une seconde, M sa masse ou $\frac{Q}{g}$, on a

$$V^2 = 2gH,$$

et
$$\frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \times 2gH = Q \,.\, H;$$

d'où
$$Pv = Q \,.\, H.$$

143. *Effet utile pour une vitesse de roue différente de celle qui correspond au maximum.* — Pour trouver l'effet utile relatif à une vitesse v de la roue différente de $\frac{V}{2}$, on répétera le raisonnement, fait aux n^os^ 129 et 130, de la théorie générale des récepteurs hydrauliques, et on aura évidemment

$$Pv = \frac{1}{2} MV^2 - \frac{1}{2} M (V - 2v)^2 = \frac{1}{2} M \left\{ V^2 - (V - 2v)^2 \right\},$$

relation qui conduit à la même conséquence pour le *maximum* d'effet. On peut simplifier l'expression de Pv en observant que

$$(V - 2v)^2 = V^2 + 4v^2 - 4Vv,$$

ce qui donne

$$V^2 - (V - 2v)^2 = V^2 - V^2 - 4v^2 + 4Vv$$
$$= 4Vv - 4v^2 = 4v (V - v),$$

et, par conséquent, $Pv = 2Mv (V - v)$.

On arrivera encore à ce résultat par des considérations géométriques et en construisant $V^2 - (V - 2v)^2$. A cet effet, prenez (fig. 512) $AV = V$ et $AV_2 = 2AV = 2V$. Portez de A en v_2 la longueur $Av_2 = 2v$, de sorte que $v_2V = (V - 2v)$. Si, du point V comme centre, et d'un rayon $AV = V$, vous décrivez une demi-circonférence qui coupe en z la perpendiculaire v_2z, et que vous joignez V et z par la droite $Vz = V$, vous aurez

$$\overline{v_2z}^2 = \overline{zV}^2 - \overline{v_2V}^2 = V^2 - (V - 2v)^2.$$

Mais, d'un autre côté, v_2z est une moyenne proportionnelle à Av_2 et à v_2V_2, c'est-à-dire à $2v$ et à $2V - 2v$; de sorte que

$$\overline{v_2z}^2 = 2v \times (2V - 2v).$$

Égalant entre elles ces deux valeurs de $\overline{v_2z}^2$, on aura

$$V^2 - (V - 2v)^2 = 4v(V - v),$$

et de cette manière on sera conduit encore à la dernière valeur de Pv.

144. *Coefficients pratiques de l'effet utile.* — Voici maintenant ce que l'expérience a appris de positif sur ces roues quand elles sont convenablement établies :

1° La vitesse v de la roue qui donne le *maximum* d'effet surpasse un peu la moitié de la vitesse d'arrivée V de l'eau ; elle en est au plus les 0,55 ; mais on peut sans inconvénient, quand l'eau afflue en grande masse sur la roue, la porter à 0,60, ce qui souvent est un avantage pour les machines qui doivent marcher vite.

2° L'effet utile réel est environ les 0,65 de celui que donne le calcul quand la hauteur de chute disponible H, ou $\frac{V^2}{2g}$, surpasse 2 mètres et que l'ouverture de l'orifice est faible, ou de 10 à 12 centimètres par exemple ; il en est les 0,75 quand la chute est beaucoup au-dessous de deux mètres et que l'ouverture de l'orifice est de 20 à 30 centimètres. Le résultat moyen 0,70 surpasse, comme on voit, le double de ce que donnent les roues à palettes planes les mieux construites.

3° Si l'on entend parler de l'effet *maximum* intégralement transmis par une telle roue construite à une machine, on peut admettre qu'il est moyennement les 0,6 de la quantité de travail absolue et

indépendante des pertes de force vive dues à la contraction, au frottement de l'eau, etc., ou du produit du poids de fluide écoulé, multiplié par la chute totale comprise depuis le niveau dans le réservoir jusqu'au-dessous de la roue.

145. *Détails de construction.* — Quant à la construction des couronnes ou des aubes, elle ne présente pas de difficultés particulières. Les aubes pourront se faire en petites planchettes de bois de chêne assemblées, comme les douves de tonneau, dans des rainures circulaires pratiquées aux couronnes; ces mêmes planchettes peuvent encore être clouées contre des rebords ou liteaux fixés aux couronnes. On remplacera le biseau extérieur des aubes par une lame de tôle de 6 à 8 centimètres de largeur, afin d'éviter tout affaiblissement.

Lorsque les couronnes (fig. 513) seront exécutées en bois, on les composera chacune de deux jantes assemblées à mi-bois et à queue d'hironde sur les bras sans tenon et de manière à affleurer la face intérieure verticale de chaque bras. Ces jantes auront deux pouces d'épaisseur sur six à sept pouces de largeur, et on recouvrira, intérieurement à la roue, leur système par des planches d'un pouce à quinze lignes d'épaisseur, lesquelles masqueront les joints des jantes avec les bras, et seront boulonnées de distance en distance contre les bras et les jantes. On remarquera qu'ici le fluide tend peu à écarter les couronnes, et qu'il ne fait que presser les aubes; néanmoins il sera bon de s'opposer à l'écartement des bras et des couronnes en traversant de part en part la roue par des boulons servant à les réunir.

146. *Avantage des roues à aubes cylindriques.* — Nous avons beaucoup insisté sur les roues à aubes courbes mues par-dessous, parce qu'elles sont destinées à remplacer désormais les anciennes roues à palettes pour toutes les chutes au-dessous de deux mètres. Il existe déjà un grand nombre de ces roues exécutées en France et dans les pays étrangers. Elles offrent sur toutes les autres l'avantage d'aller très-vite et de pouvoir marcher dans l'eau lors même qu'elles y sont noyées en arrière, lors des crues. Il suffit seulement de donner, dans cette dernière circonstance, la hauteur convenable aux couronnes et aux aubes.

147. *Roues à palettes, mues de côté dans un coursier circulaire.* — On a cherché à remédier à l'inconvénient des roues à palettes ordinaires sous le rapport de la perte d'effet, en emboîtant les aubes dans un coursier circulaire (fig. 514) qui se relève plus ou moins haut du côté de l'orifice, de manière à rendre la charge du fluide au-dessus du centre de ce dernier beaucoup plus faible. Mais alors la vitesse d'arrivée V de l'eau sur la roue est très-petite, et la perte de force vive à l'entrée est nécessairement amoindrie. On peut d'ailleurs aussi diminuer la vitesse de la roue, de façon que l'eau en la quittant ne conserve que peu de force vive. On pratique ici également un ressaut au coursier sous l'axe de la roue pour le libre dégagement de l'eau. La vanne est disposée de manière à éviter les contractions; la partie antérieure du coursier est raccordée tangentiellement à la roue ; le jeu est le moindre possible; les palettes sont un peu inclinées en avant du côté d'amont sur les rayons quand la vitesse de la roue doit être forte ; cette inclinaison diminue la vitesse absolue de sortie de l'eau hors des aubes.

Quand on craint que l'eau ne jaillisse par-dessus les aubes vers l'intérieur de la roue, on ferme en partie ce côté par des planches clouées sur les jantes, mais on laisse un vide vers le haut pour que l'air puisse s'échapper.

Le nombre des aubes est réglé comme dans ce qui précède.

148. *Moyens de rendre l'effet le plus près possible de l'effet absolu.* — Passons à la théorie de ces roues. Conservons toujours les mêmes dénominations, et nommons h' la hauteur du point d'arrivée de l'eau sur la roue au-dessus de l'arête B du ressaut qui sert de dégagement à l'eau. La vitesse de sortie étant à peu près celle v de la roue, on aura, d'après le principe des forces vives (3e partie, 130),

$$Pe = Mgh' + \frac{1}{2} MV^2 - \frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} M (V - v)^2.$$

$$= Mgh' + \frac{1}{2} M \left\{ V^2 - (V - v)^2 - v^2 \right\}.$$

On rendra presque nuls les termes soustractifs de cette expression, en faisant la vitesse v de la roue très-petite et en prenant $V = v$; c'est-à-dire en rendant la charge du fluide sur l'orifice aussi très-petite. On y parvient en prenant (fig. 515) l'eau à la surface du

réservoir et en la faisant passer au-dessus d'une vanne formant déversoir et qui est très-près de la roue. On calcule la largeur horizontale de cette vanne par la formule du n° 110, relative à la dépense d'un réservoir, de façon que l'épaisseur de la lame d'eau ne surpasse guère 20 centimètres, ce qui exige quelquefois de donner beaucoup de largeur à la roue et à l'orifice quand l'eau est abondante et que la roue doit être puissante. Mais il en résulte que l'eau acquiert au plus la vitesse moyenne de $1^m,50$ à 2^m avant d'atteindre les aubes. Quant à la vitesse v de la roue, l'expérience prouve qu'on ne peut la rendre beaucoup moindre d'un mètre, à cause des fuites dans le coursier dont l'effet croît avec le temps. On comprend donc que ces roues doivent approcher beaucoup du *maximum* d'effet absolu dans les circonstances dont il s'agit, effet absolu qui est ici mesuré par $\frac{1}{2} Mgh' + \frac{1}{2} Mv^2$. Aussi, des expériences faites par M. le capitaine Morin prouvent-elles que ces roues peuvent rendre au moins les 0,80 environ de cet effet total. Mais si on calcule ce dernier d'après la chute totale ou d'après la hauteur du niveau supérieur du réservoir au-dessus du ressaut, et si on défalque de l'effet utile la résistance des frottements, on trouve un résultat qui est moindre selon les cas, et qu'on évalue moyennement à 0,67. Quoi qu'il en soit, cette disposition n'en est pas moins très-avantageuse pour tous les cas où une grande vitesse de la roue n'est pas indispensable; dans le cas contraire, il faut des rouages intérieurs pour obtenir cette grande vitesse, et l'effet utile est de beaucoup réduit.

149. *Capacité de la roue.* — On doit d'ailleurs proportionner la capacité de la roue de manière à ce qu'elle puisse admettre tout le fluide qui arrive de l'orifice. Soit l la largeur des ailes parallèles à la direction de l'arbre, et K leur hauteur; $K \times l$ sera la surface de chacune, et le volume de l'espace que chaque aube parcourt dans une seconde est évidemment $K \times l \times v$. La dépense de l'orifice, ou D, doit être, au plus, moitié de ce volume. On aura

$$D = \frac{K \times l \times v}{2};$$

d'où

$$l = \frac{2D}{K \times v}.$$

150. *Maximum relatif de l'effet utile.* — Revenons maintenant au cas général où V et v surpassent beaucoup 2^m et 1^m. Si la vitesse v de la roue est obligée, et qu'il n'y ait que la vitesse d'arrivée V de l'eau sur la roue qu'on puisse modifier en faisant varier la position de l'orifice, notre équation ci-dessus montre que $(V-v)^2$ doit être nul ou qu'on aura $V=v$. La perte de travail sera réduite à

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}MV^2;$$

c'est-à-dire que la chute sera diminuée de la charge du fluide sur l'orifice. Supposons, par exemple, que la vitesse de la roue v soit de 3^m, on prendra une chute de $\frac{3\times 3}{2g} = 0^m,325$ environ. Si, au contraire, la vitesse de la roue n'était pas encore fixée, et que la position de l'orifice ou V le soit, il faudra rendre . . . . . $\frac{1}{2}M\left\{(V-v)^2+v^2\right\}$ le plus petit possible, comme pour les roues à palettes mues par-dessous, en faisant $v=\frac{1}{2}V$ (3e partie, 136).

151. *Calcul de l'effet utile pour des vitesses quelconques.* — Si, sur la valeur générale de Pv, on fait les mêmes transformations qu'au n° 138, on aura

$$Pv = Mgh' + Mv\,(V-v).$$

On prendra les $\frac{6}{10}$ ou les $\frac{5}{8}$ du résultat calculé lorsque $V=\sqrt{2gh}$ est très-grand, ou si h', hauteur du coursier circulaire, est seulement le tiers ou le quart de la hauteur disponible $h+h'$; et 0,80 si h' en diffère à très-peu de chose près et s'il y a peu de jeu dans le coursier. Dans le premier cas, les roues ne rendront, toute perte comprise, qu'environ 0,40 à 0,50 de l'effet total calculé sur la chute depuis le niveau du réservoir jusqu'au ressaut sous la roue, et que 0,60 à 0,70 dans le second, c'est-à-dire un sixième environ de plus que les roues à aubes courbes dont nous avons parlé ci-dessus.

152. *Roues à augets, recevant l'eau à une certaine hauteur.* — Les roues à augets sont composées de deux couronnes parallèles, ouvertes par le dessus, mais fermées hermétiquement en dedans par

un plancher qui empêche l'eau de couler vers l'axe. Les palettes sont remplacées par des planchettes brisées *abc* (fig. 516) ou par des aubes courbes *a'b'c'*. L'intervalle compris entre les palettes, les couronnes et le tambour intérieur forme une espèce d'auge qu'on nomme *auget*. On varie beaucoup sur la meilleure forme des augets ; le plus ordinairement *bc* est dans le prolongement du rayon et égal à la moitié de la largeur de chaque couronne. *ba* est tracé de façon que l'angle *bad* que cette droite forme avec la circonférence extérieure soit très-petit. Cependant, il y a une limite ; cet angle ne peut être moindre que 30° ; ou bien encore *bc* ne peut surpasser deux ou trois fois *bc*.

Quant au nombre des augets, il doit être assez limité pour que, entre la saillie *b* et l'aube suivante, il y ait un intervalle d'au moins 8 à 10 centimètres pour admettre l'eau. Sous ce dernier rapport, les aubes courbes en usage dans les bonnes constructions sont très-avantageuses ; elles permettent de donner plus de capacité aux augets.

153. *Dispositions les plus avantageuses de ces roues ; leur effet utile.* — La théorie des roues de côté et à palettes est également applicable aux roues à augets, et celles-ci rendent à peu près le même effet dans les mêmes circonstances. Si on veut que l'eau entre aisément dans les augets ou qu'elle ne soit pas rejetée au dehors, et qu'il n'y ait pas choc, il faut encore que l'eau arrive à peu près tangentiellement à la roue (fig. 517) autant qu'il est possible, condition à laquelle on satisfait bien en la faisant arriver vers le sommet par un petit bout de coursier et dans le sens du mouvement. Quand on est forcé de la faire arriver en avant ou de côté, l'eau doit être versée par la surface du réservoir et la roue avoir peu de vitesse, comme dans le cas des roues à palettes à coursier circulaire ; ou bien l'eau doit être dirigée sur la roue par une buse adaptée à l'orifice, si la charge d'eau est un peu considérable sur son centre ou si la roue doit marcher vite.

Le calcul des effets de cette roue et les conditions de son meilleur établissement sont absolument les mêmes que pour les roues précédentes. Il paraît qu'elles rendent aussi 0,80 de l'effet théorique quand les vitesses V et v sont faibles, et 0,60 à 0,67 quand elles sont fortes ou que la roue est prise par son côté. On remarquera qu'ici les fuites dues au jeu se trouvent remplacées par le versement de

l'eau hors des augets, qui augmente avec la vitesse à cause de la force centrifuge. C'est par cette raison qu'on donne aux augets une capacité qui est au moins le double du volume de l'eau qui y arrive, ou même le triple si la roue doit marcher très-vite.

Soit n le nombre des augets de la roue, qui varie de 36 à 60 selon le diamètre, R le rayon, $\pi = 3{,}142$, v la vitesse de la circonférence moyenne ou le chemin parcouru dans une seconde, K le nombre de révolutions dans une minute ;

$$\frac{K \,.\, 2\pi R}{60} = \frac{\pi \,.\, KR}{30} = v.$$

Soit q le volume d'un auget censé plein ; le volume de tous les augets qui passeront dans un tour vaut nq ; il sera dans une minute $K \,.\, nq$, et dans une seconde $\frac{K \,.\, nq}{60}$. Il faudra que la dépense de l'orifice dans une seconde soit au plus $\frac{1}{2}\frac{K \,.\, nq}{60}$, ou $\frac{K \,.\, nq}{120}$; appelant D cette dépense, on aura

$$D = \frac{K \,.\, nq}{120}, \quad \text{ou} \quad q = \frac{120D}{K \,.\, n}.$$

Ordinairement on estime, d'après les expériences de Smeaton, que l'effet utile intégral transmis par les roues à augets brisés ordinaires est au *maximum*, les deux tiers du travail dû à la chute totale. Mais quand les augets sont courbes et profonds de manière à se vider tard, que la roue va lentement ou avec une vitesse de 1^m environ, et qu'il y a une petite tête d'eau, on peut compter sur près de 0,80, pourvu que la roue ne soit pas trop lourde.

Les roues à augets ne sont ordinairement employées que pour les fortes chutes de 3^m, et au-dessus ; pour les petites chutes, il faudrait donner une trop grande largeur aux augets pour admettre l'eau et pour obtenir un travail un peu grand.

154. *Circonstances où l'on doit employer chaque espèce de roue hydraulique.* — Il est évident, d'après ce qui précède, que les divers roues hydrauliques ne sauraient être, dans tous les cas, employées indistinctement. On remarquera, en effet,

1° Que les roues à aubes planes ou courbes mues par-dessous conviennent particulièrement aux chutes des pays de plaines qui

excèdent rarement deux mètres à cause des frais qu'occasionneraient des digues plus hautes;

2° Que les roues de côté à coursier circulaire et prenant l'eau à la surface du réservoir conviennent aussi aux mêmes circonstances et à des chutes de trois mètres, pourvu que le mécanisme intérieur de l'usine n'ait pas besoin d'une grande vitesse;

3° Que pour les chutes de trois à huit mètres, les roues à augets recevant l'eau au sommet et se mouvant avec une faible vitesse, peuvent aussi être employées avec avantage; mais elles ne seraient plus guère applicables à des chutes de douze à vingt mètres, puisqu'elles auraient des dimensions exorbitantes, et que leur arbre supporterait une charge considérable d'eau qui produirait de grands frottements. C'est dans ces dernières circonstances qu'on emploie les chaînes à godets, les chaînes à chapelet, les machines à colonne d'eau. Nous allons successivement examiner les deux premières espèces de ces récepteurs hydrauliques, parce que nous aurons plus loin occasion de parler des machines à colonne d'eau.

155. *Chaînes à godets.* — Les chaînes à godets (fig. 518) sont soumises aux mêmes lois que les roues à godets. Pour se faire une idée de leur système, qu'on imagine deux roues hexagonales ayant leurs centres sur la même verticale, dont l'une est placée à la hauteur du niveau supérieur et l'autre dans le bief inférieur. Si, de plus, ces roues sont enveloppées d'une chaîne sans fin dont les maillons sont égaux à la longueur des côtés des hexagones des roues et qui est armée à chaque maillon d'un godet, on voit que, quand un filet d'eau plus étroit que la largeur des godets vient à tomber successivement dans les godets de la branche de gauche, le poids de cette eau produira sur les deux roues un mouvement de droite à gauche, et que quand ces godets seront parvenus au bas de leur course, ils se videront pour remonter à vide par la branche droite de la chaîne et se remplir de nouveau dès qu'ils se seront présentés à l'écoulement du filet d'eau. Ainsi que nous l'avons dit, il faut que le filet soit plus étroit que la largeur des godets. L'arbre qui communiquera le mouvement à la machine qu'on veut faire mouvoir, peut être indistinctement placé à l'axe de la roue supérieure ou de la roue inférieure. Il est évident que l'eau tombe dans les godets avec une vitesse acquise, et que ceux-ci fuient devant le filet avec une vitesse différente. Il y a donc choc et perte de force vive. Au-

rivée dans ces godets, l'eau y agit par son poids et n'a plus que la vitesse des roues ou de la chaîne. Cet exposé prouve que le choc à l'arrivée de l'eau devant être le moindre possible, ainsi que sa force vive à sa sortie, il convient que la vitesse des chaînes soit très-faible, ainsi que celle d'arrivée de l'eau; et qu'en même temps ces deux vitesses soient égales. Ces vitesses doivent être, autant que possible, réduites à un mètre. Comme l'eau se vide presque au bas, il y a très-peu de déchet dans la chute pour cette dernière circonstance.

156. *Chaînes à chapelets.*—Dans les chaînes à chapelets (fig. 519), les deux roues sont remplacées par deux étoiles évidées, et les godets par des disques de bois recouverts d'une plaque de cuir dont le diamètre est plus grand. La chaîne sans fin, après avoir traversé le réservoir supérieur, passe dans un tuyau dont le jeu est assez grand, et ensuite dans un autre tuyau inférieur bien alézé et dont le diamètre, plus petit que celui des plaques de cuir, force celles-ci à se relever de manière à retenir l'eau au-dessus de chaque disque. Ici les rondelles n'ont qu'un pied d'intervalle. La quantité de travail du moteur est mesurée par le produit de la vitesse de la chaîne qui multiplie le poids d'une colonne d'eau, dont la base est le diamètre du tuyau le plus étroit, et dont la hauteur est celle du niveau du réservoir supérieur au-dessus du débouché inférieur du tuyau dans lequel la chaîne a pénétré. Ce travail diffère peu de celui qui est transmis à la machine.

157. *Roues à palettes pendantes, mues dans un courant indéfini.* — On nomme courant *indéfini* celui dont la largeur et la profondeur sont très-grandes par rapport aux dimensions des ailes des roues qu'on veut y faire mouvoir. Tel est le cas des roues établies sur les grandes rivières. Elles sont montées sur des bateaux accouplés ou sur des pilotis (fig. 520). Les ailes ont une longueur de trois à quatre mètres; leur hauteur est de $0^m,50$ à $0^m,80$, ou plutôt elle est dans le sens du rayon d'un cinquième à un quart, au plus, de la longueur de ce rayon. Les roues baignent dans le liquide d'un quart ou d'un tiers au plus de leur rayon, de sorte que les aubes sont entièrement plongées dans le courant.

Le nombre des ailes est ordinairement de douze. Bossut a trouvé

qu'il était plus avantageux d'augmenter ce nombre, et il le porte de dix-huit à vingt-quatre.

Enfin, les ailes sont supportées chacune par un bras partant de l'arbre, et tous les bras sont reliés entre eux par des cercles de fer près des ailes. Il est bon d'incliner celles-ci un peu en avant sur le rayon, en écartant du côté d'amont leur partie extérieure hors de celui-ci. Nommant ici v la vitesse moyenne de la partie plongée des ailes, V la vitesse du courant à la surface mesurée avec un flotteur, Pv l'effet utile, A la surface d'une seule aube supposée choquée dans sa position verticale en vertu de la vitesse relative $V - v$, on admet que la pression produite par ce choc est proportionnelle au poids d'un prisme de fluide de base A et de hauteur $\frac{(V-v)^2}{2g}$; et, si on se rappelle que le poids du mètre cube d'eau est de 1000 kilogr., on aura

$$P = K \cdot 1000\, A \frac{(V-v)^2}{2g},$$

et

$$Pv = K \cdot 1000\, A \frac{(V-v)^2}{2g} \cdot v.$$

K est un coefficient relatif à la résistance absolue du fluide qui choque les aubes (Cours de la 1re année, § 199), et qui sert à corriger la formule d'après l'expérience.

158. *Valeur du coefficient de résistance des aubes.* — Il faut distinguer le cas où les aubes sont entièrement plongées dans l'eau de celui où elles n'y sont plongées qu'en partie. Dans ce dernier cas, on ne prend dans le calcul pour A que la partie plongée de la surface de l'aube, mais aussi le fluide formé en avant un remous qui pèse sur l'aube et doit augmenter la pression (fig. 521). On conçoit alors pourquoi le coefficient K doit être un peu plus fort. D'après les expériences de Bossut et de Boistard sur les aubes plongées en partie dans un courant, ce coefficient s'élève à tout près de 3. Mais, quand les aubes sont plongées entièrement, le remous n'a plus lieu et K paraît être au-dessous de la valeur précédente, sans cesser d'être supérieur à 2. M. Poncelet a fait, en 1825, sur trois moulins de bateaux établis à Lyon sur le Rhône, des expériences qui confirment que la valeur de K demeure comprise entre

2 et 3 pour le cas des ailes entièrement plongées. Ces ailes avaient moyennement 2 mètres carrés de surface, ou $2^m,60$ à $3^m,20$ de largeur horizontale sur $0^m,65$ à $0^m,75$ de hauteur; leur extrémité inférieure était plongée d'environ $1^m,20$ au-dessous de la surface de l'eau; elles étaient au nombre de douze seulement et montées sur des roues de $4^m,5$ à 6^m de diamètre.

La vitesse mesurée au centre de pression était d'un tiers à la moitié de celle du courant; cette dernière mesurée à la surface étant environ $1^m,30$ à 2^m. On a déterminé l'effet utile en admettant que la mouture d'un kilogramme de blé équivalait à une dépense de travail de $6700^{k\cdot m}$ environ sur la roue hydraulique, résistances comprises; les valeurs du coefficient K sont demeurées comprises entre 2,50 et 3,10, et ont donné pour valeur moyenne $K = 2,80$. On pourra donc adopter ce nombre avec confiance pour les roues à ailes pendantes des moulins établis sur bateaux, en observant qu'ici les ailes se mouvaient entre les corps de deux bateaux qui formaient une sorte de coursier laissant beaucoup de jeu; ce qui a dû augmenter un peu la vitesse générale du courant, ainsi que la valeur de K. Pour des roues se mouvant dans un fluide pour ainsi dire indéfini, il est probable que K ne surpasserait guère 2,50. L'expérience semble prouver d'ailleurs que ce coefficient ne dépend pas de l'étendue absolue de la surface des ailes.

159. *Vitesse de la roue pour le maximum d'effet.* — Quant à la vitesse v la plus avantageuse à leur imprimer, elle paraît devoir être comprise entre le tiers et la moitié de la vitesse V du courant, conformément à ce qui a été observé sur les moulins du Rhône, où une longue pratique a dû conduire au résultat le plus avantageux possible. Cette proportion est aussi justifiée par les résultats des expériences de Bossut et de M. Christian, qui ont trouvé $v = 0,40\,V$, environ, pour la vitesse la plus convenable de la roue à ailes. Il serait facile de prouver d'ailleurs, d'après les formules ci-dessus, que théoriquement elle devrait être $\frac{1}{3}\,V$, quantité inférieure à celle que donne l'expérience et qu'on doit réellement adopter dans la pratique.

160. *Roues à rames servant à mouvoir les bateaux.* — Ces roues sont disposées à peu près comme les précédentes sur les flancs du bateau

(fig. 522), et sont alors au nombre de deux. Quelquefois aussi on les place à l'arrière ou à la poupe du bateau, mais cette disposition a été reconnue moins avantageuse. Ici le bateau n'est point immobile, et les roues, au lieu de recevoir l'action du courant, sont destinées à faire cheminer le bateau en avant, en frappant le fluide. Le mouvement leur est communiqué par une machine et par un moteur quelconque, établis dans l'intérieur du bateau. Déjà anciennement on avait appliqué un pareil système aux bateaux servant de bac; le moteur consistait dans un ou plusieurs chevaux faisant tourner un manége. Récemment on y a appliqué les machines à vapeur qui ont permis d'entreprendre, avec le mécanisme des roues à rames, des voyages de long cours sur la mer et sur les fleuves. Avant d'être parvenu au point actuel de perfection, on a fait beaucoup de tentatives qui ont été infructueuses, parce qu'on en ignorait la théorie. Aujourd'hui on est plus avancé sur cette science, grâces aux observations et recherches de MM. Marestier et Navier.

161. *Travail des roues motrices.* — Nommons U la vitesse absolue de rotation des roues à rames au centre des ailes, A l'aire totale des ailes en n'en prenant qu'une pour chaque roue ou deux pour les deux roues ensemble, V la vitesse naturelle du courant, et v la vitesse du bateau par rapport aux rives. Supposons d'abord que le bateau remonte le courant avec cette vitesse v; les ailes, si elles ne tournaient pas, seraient animées de la vitesse v du bateau, et elles seraient choquées par le courant avec la vitesse $V+v$. Mais comme elles fuient en sens contraire de la vitesse v du bateau, en vertu d'un mouvement de rotation qui leur donne la vitesse U, elles choquent le fluide avec l'excès $U-(V+v)$ de leur vitesse propre U et de la vitesse relative $V+v$. On peut encore raisonner en observant que, si le bateau était immobile, les aubes, en tournant avec la vitesse U dans le sens de la vitesse V du courant, choqueraient le fluide avec la vitesse $U-V$. Mais, comme le bateau marche avec la vitesse v contraire à U, c'est comme si le courant était animé de la vitesse $V+v$, le bateau restant immobile.

Maintenant, puisque les ailes choquent le fluide avec la vitesse $U-V-v$, la résistance qu'elles éprouvent de sa part sera mesurée (Cours de la 1re année, §§ 199 et suivants) par une colonne de fluide ayant A pour base et $\frac{(U-V-v)^2}{2g}$ pour hauteur, et dont

le poids est $1000^k \times A \cdot \frac{(U - V - v)^2}{2g}$. En multipliant ce poids par un coefficient K que donne l'expérience, et en nommant P la pression exercée par les ailes sur le fluide, on aura

$$P = KA \cdot 1000 \cdot \frac{(U - V - v)^2}{2g} \text{ kilogr.}$$

La réaction contre les aubes, qui provient de l'eau, étant égale et contraire à P, le bateau se trouvera poussé en avant avec cet effort, de même que si un homme agissait avec un bâton ferré. Or, cet effort doit précisément égaler la résistance qu'éprouve le bateau à remonter le courant. Soit donc A' la section transversale la plus grande de la partie plongée du bateau qui remonte le courant avec la vitesse relative $V + v$; il est clair que cette dernière résistance aura pour valeur $K'A' \cdot 1000 \cdot \frac{(V + v)^2}{2g}$, K' étant un coefficient de la résistance relative à la forme du bateau et plus particulièrement de la proue ; c'est-à-dire qu'on a aussi

$$P = K' \cdot 1000A' \cdot \frac{(V + v)^2}{2g} = K \cdot 1000A \cdot \frac{(U - V - v)^2}{2g},$$

ou $$K'A' (V + v)^2 = KA (U - V - v)^2.$$

On tire $$\frac{K'A'}{KA} (V + v)^2 = (U - V - v)^2,$$

ou enfin

$$(V + v) \sqrt{\frac{K'A'}{KA}} = U - V - v).$$

Nous représenterons la quantité $\sqrt{\frac{K'A'}{KA}}$ par m. Il sera facile de la calculer dans chaque cas particulier d'après ce que nous dirons plus loin. Ainsi

$$m (V + v) = U - V - v,$$

et, par conséquent,

$$U = (m + 1) (V + v).$$

Si on halait le bateau du rivage par des hommes ou par des chevaux, leur travail par seconde serait évidemment

$$Pv = K' \cdot 1000A' \cdot \frac{(V+v)^2}{2g} v;$$

car le chemin parcouru par le point d'application du halage serait le même que celui qui est parcouru par le bateau par rapport aux rives. Dans la réalité, les hommes dépenseraient un peu plus de travail à cause de l'obliquité du tirage par rapport à la direction du courant, et parce que les traits trainent à terre ou dans l'eau; mais on peut négliger cette circonstance qui n'augmente probablement pas le travail d'un dixième de sa valeur.

Le même travail serait encore évidemment dépensé par des hommes qui agiraient avec des bâtons ferrés contre le fond de l'eau, de dessus le bateau, ou qui tireraient sur un câble fixé à une ancre. Or, il ne faut pas croire que ce travail est le même que celui que doit dépenser la machine qui met en mouvement les ailes. Car, bien que l'effet à appliquer au centre des aubes soit aussi P, cet effort dans une seconde décrit la vitesse U de la roue, en sorte que le travail à dépenser par la roue sera

$$PU \quad \text{ou} \quad K' \cdot 1000A' \cdot \frac{(V+v)^2}{2g} \cdot U;$$

ou bien, à cause de la valeur $U = (m+1)(V+v)$, on aura, pour le travail de la roue,

$$K' \cdot 1000A' \cdot \frac{(V+v)^2}{2g} \times (m+1)(V+v)$$

$$= \frac{K' \cdot 1000A'}{2g} (1+m)(V+v)^3.$$

Ce dernier travail est plus grand que celui du halage dans le rapport de U à v, ou de $(m+1)(V+v)$ à v, le facteur P étant le même de part et d'autre.

On voit aussi que le travail de PU de la machine, non compris les frottements, croît comme le cube de la vitesse relative $V+v$ du bateau par rapport au courant que le bateau remonte. Par exemple, dans la mer, sur un lac, ou à l'embouchure des grands fleuves où la vitesse du courant est faible, V peut être censé zéro, $V+v$

se réduit à v, vitesse du bateau, et le travail croît comme v^3 ; tandis que sur une rivière dont la vitesse $V = 2v$, ou est double de celle du bateau, le travail est proportionnel à $(V + v)^3 = 27v^3$, c'est-à-dire vingt-sept fois plus considérable. Ces réflexions serviront à faire entrevoir la différence qu'il y a entre le travail nécessaire à dépenser sur les lacs et sur les rivières rapides, telles que le Rhône, la Moselle.

Si, au lieu de remonter le courant, le bateau le descendait, on trouverait, en répétant tous les raisonnements ci-dessus, que la vitesse relative du fluide et du bateau qui marche plus vite que lui, serait $v - V$ au lieu de $V + v$; quant à celles des ailes qui tournent en sens contraire du mouvement du bateau, elle serait $U + V - v$, au lieu de $U - V - v$. Car si le bateau était immobile, cette vitesse relative des ailes deviendrait $U + V$, et comme il marche, ainsi que les ailes, dans le sens du courant, avec la vitesse v, la première est diminuée de cette dernière, ou devient $U + V - v$. D'après cela, on trouvera, pour le cas dont il s'agit,

$$P = K' \cdot 1000A' \cdot \frac{(v - V)^2}{2g},$$

$$U = (m + 1)(v - V),$$

et $$PU = \frac{K' \cdot 1000A'(1 + m)}{2g} \cdot (v - V)^3,$$

formules dans lesquelles il n'y a de changé que $V + v$ qui est devenu $v - V$.

162. *Valeurs des coefficients* K' *et* K, *relatifs à la résistance d'un bateau et des ailes.* — M. Navier, à qui nous empruntons les théories précédentes, estime que la valeur du coefficient K', relatif à la résistance d'un bateau, est comprise entre 0,20 et 0,30 pour les bateaux bien proportionnés dans toutes leurs parties, et qu'elle peut s'élever jusqu'à 0,50 pour les bateaux ordinairement employés sur les rivières à fond plat, et qui sont moins avantageusement disposés que ceux qui naviguent sur la mer et sur les lacs profonds. Pour la Moselle, par exemple, on fera $K' = 0{,}40$ environ.

Quant à la valeur du coefficient K de résistance des ailes, M. Na-

vier la suppose égale à 2,50. D'après des expériences que M. Poncelet a faites, en juin 1826, sur les roues à ailes d'un bateau à vapeur projeté pour la navigation de la Moselle, par M. Sallangre, ancien officier du génie, et où il a mesuré au dynamomètre de Régnier l'effort avec lequel le bateau tendait à être entraîné par l'action des ailes en mouvement dans une eau tranquille ; dans ces expériences, dis-je, K a varié depuis 2,1 jusqu'à 3,5, et même 3,6 pour des vitesses du centre qui ont varié entre $1^m,25$ et $0^m,85$ par seconde; la valeur moyenne a été de 3,2. Mais on remarquera qu'ici les choses ne se passaient pas tout à fait comme dans le cas où le bateau eût été entièrement libre ; de plus les ailes, qui avaient environ $0^m,38$ de hauteur sur $3^m,30$ de longueur totale, étaient disposées en arrière du bateau, et il y a lieu de croire que K doit être un peu moindre dans les circonstances ordinaires, ainsi que M. Navier le suppose.

163. *Remarques sur les moyens de diminuer les résistances.* — On remarquera d'ailleurs que ce qui précède suppose les ailes dirigées au centre de la roue, et qu'alors ces ailes choquent le fluide obliquement et le soulèvent en arrière en se retirant. Or, il est aisé de voir qu'une portion du travail qui leur est appliqué, est consommée en pure perte pour l'effet utile; l'effort exercé dans une direction horizontale, et qui n'est que la composante horizontale des pressions réelles exercées par le fluide, contribue seul à faire marcher le bateau. Pour éviter ces décompositions, on a imaginé de disposer les roues de façon que les ailes restent constamment verticales ou se meuvent parallèlement à elles-mêmes. C'est à quoi on parvient en montant les ailes sur deux jantes excentriques et de même diamètre, dont les plans sont parallèles et dont les centres respectifs sont compris dans un même plan vertical, perpendiculaire à ces deux plans. On conçoit, en effet, que si chaque aile est attachée à deux rayons parallèles de ces jantes, avec deux charnières qui lui permettent de conserver la position que lui affecte cette combinaison géométrique, cette aube, pour des angles égaux décrits par les deux jantes, conservera toujours son parallélisme. Ce système donne d'ailleurs lieu à des frottements énormes.

En examinant la valeur ci-dessus du travail PU dépensé par les roues, on verra que V et v, ainsi que tout ce qui concerne le bateau, c'est-à-dire K' et A' restant les mêmes, on peut réduire cette

dépense en diminuant m ou $\sqrt{\frac{K'A'}{KA}}$, ou en augmentant la surface A des aubes. Mais on est limité par l'embarras de les placer commodément sur le bateau. Il faut, d'ailleurs, que leur hauteur soit au plus le quart ou le cinquième du rayon. Quant à la longueur, elle est du double ou du triple seulement de la hauteur pour une même roue, afin d'éviter les trop grandes saillies en dehors des flancs du bateau.

XIX.

MOULINS A VENT.

164. *Idées sur les divers moulins mus par le vent.* — On distingue diverses sortes de moulins à vent : les uns tournent autour d'un axe vertical, et les autres autour d'un axe horizontal. Ces derniers, malgré les inconvénients qu'ils offrent à certains égards, sont jusqu'à présent les seuls dont on fasse usage dans la pratique, parce qu'à dimensions égales ils produisent un effet qui est au moins octuple de celui des autres. Cette différence est due à ce que, dans le moulin à axe horizontal, la surface totale des ailes est en prise au vent et l'est d'une manière utile pour l'effet. Dans les moulins à axe vertical, au contraire, il n'y a qu'une aile qui reçoive l'action du vent dans la direction même du mouvement, et si les autres ailes sont à la fois en prise, les actions du vent sur elles occasionnent des résistances qui détruisent une partie de l'effet. Tel est le cas des roues qu'on nomme *panémores* (fig. 523) et dont les ailes sont formées de surfaces coniques qui présentent à l'action du vent tantôt leur concavité et tantôt leur convexité, de telle sorte que la roue ne marche qu'en vertu de l'excès de l'une des actions sur l'autre.

Dans les moulins dits *à la polonaise* (fig. 524), l'axe vertical de la roue est armé de plusieurs ailes rectangulaires qui tournent dans une enveloppe cylindrique dont une partie est supprimée pour permettre l'accès au vent dans la direction la plus convenable.

La disposition la plus ingénieuse dans les moulins à axe vertical

est celle qui consiste dans des ailes verticales rectangulaires recevant de l'arbre un mouvement tel qu'elles s'orientent de la manière la plus avantageuse dans leur mouvement de transport autour de l'axe; mais ce système exige des combinaisons assez compliquées. Il ne sera ici question que des moulins ordinaires à axe horizontal dont l'effet a été étudié par Smeaton et par Coulomb.

165. *Moulin à axe horizontal.* — La roue d'un moulin à axe horizontal (fig. 525), qu'on nomme *volant*, porte quatre bras ou rayons de trente-six pieds de longueur environ, perpendiculaires à l'arbre du mouvement et sur lesquels est une aile plus ou moins inclinée par rapport au plan du mouvement de la roue. Ordinairement, on donne à cette aile la forme d'un rectangle, et au lieu de la composer d'un seul plan, on la construit en surface gauche dont les éléments sont perpendiculaires à la direction du bras correspondant. Ce bras est lui-même à peu près rectiligne, de façon que la surface des voiles appliquées sur les lattes qui représentent les génératrices de cette surface, offre une certaine concavité à l'action du vent. L'arbre doit être toujours parallèle à la direction du vent, et comme la nature des vents qui soufflent dans les pays de plaines est telle que leur direction fait avec l'horizon un angle de 18°, c'est pour cette raison que l'arbre est aussi tenu incliné sous cet angle. Enfin, les bras sont plus gros près de l'arbre qu'aux extrémités, et les lattes qui reçoivent les voiles sont fixées perpendiculairement à chacun de ces bras.

Si l'arbre doit être toujours dirigé vers le vent, il faut évidemment pouvoir l'orienter. On se sert à cet effet d'un grand levier qui entraîne la charpente supportant la machine autour d'un axe vertical fixe; quelquefois même le moulin porte une voile du côté opposé à l'arbre et qui force la machine, par l'action du vent, à s'orienter d'elle-même. Pour concevoir comment l'action du vent fait tourner la roue, il faut remarquer que cette action se décompose en deux autres, l'une dans le sens de la voile, dont l'effet est nul, et l'autre perpendiculaire à la voile; de cette dernière composante, on conclut la pression reçue par la voile. Mais cette pression elle-même se décompose en deux nouvelles actions, dont l'une, parallèle à l'axe, ne peut produire aucun effet, et dont l'autre, située dans le plan du mouvement, fait tourner l'aile. Si deux ailes opposées étaient inclinées dans le même sens par rapport au plan

du mouvement, les pressions qu'elles éprouveraient, tendraient à faire tourner l'arbre dans deux directions contraires, de façon que ce dernier ne pourrait pas se mouvoir : voilà pourquoi ces inclinaisons seront égales, mais contraires, pour deux ailes opposées.

166. *Établissement du moulin à axe horizontal.* — Sans nous livrer à des calculs théoriques, lesquels font voir que l'angle des éléments des ailes avec l'axe de rotation est d'autant plus petit que leur distance à l'axe est elle-même plus petite, nous nous bornerons à ce que les expériences de Smeaton et Coulomb ont appris sur l'établissement des moulins à vent.

1° *Figure des ailes.* — Les ailes étant rectangulaires, la forme la plus avantageuse est celle des ailes dites *à la hollandaise* (fig. 526), qui offrent au vent une surface légèrement concave, et dont les éléments sont disposés ainsi qu'il suit :

Concevons le rayon de l'aile partagé en $6 + \frac{4}{6}$ parties, le premier élément à partir du centre à une distance égale aux cinq tiers de l'unité des divisions étant désigné par n° 1, et celui qui répond à l'extrémité de l'aile par n° 6.

TABLEAU des Éléments des ailes du moulin à axe horizontal.

NUMÉROS des ÉLÉMENTS.	ANGLE qu'ils font avec L'AXE.	ANGLE qu'ils font avec le plan du MOUVEMENT.	OBSERVATIONS.
	Degr. sexagésimaux.	Degr. sexagésimaux.	
1	72°	18°	
2	71	19	
3	72	18	Milieu de l'aile.
4	74	16	
5	77 $\frac{1}{2}$	12 $\frac{1}{2}$	
6	83	7	Extrémité.

La largeur de l'aile ne doit pas excéder le quart de sa longueur ;

elle en est ordinairement le cinquième ou le sixième. L'expérience a appris qu'on doit plutôt diminuer l'angle des éléments avec le plan du mouvement que l'augmenter. D'après Smeaton, les ailes qui vont en s'élargissant vers leurs extrémités paraissent être plus avantageuses que les autres à dimensions égales. La figure qui réussit le mieux est celle d'un trapèze (fig. 527), formé en plaçant à l'extrémité du rayon un barreau égal au tiers de ce rayon, et partagé au point où il le coupe dans le rapport de 3 à 2. Les inclinaisons des éléments transversaux restent les mêmes que ci-dessus. Ainsi, on a

$$AB = \frac{1}{3}\,CO, \quad BC = \frac{3}{5}\,AB, \quad \text{et} \quad AC = \frac{2}{5}\,AB.$$

2° *Vitesse des ailes par rapport à celle du vent.* — Si on suppose les ailes construites comme ci-dessus, on doit, pour le meilleur effet, maintenir la vitesse de rotation dans un rapport constant avec celle du vent. Cette vitesse de rotation, mesurée à l'extrémité de l'aile, doit être, d'après Smeaton, égale à 2,6 ou 2,7 fois celle du vent; ce qui s'accorde avec les expériences de Coulomb sur les moulins belges, desquels on déduit le rapport 2,50 à 2,60.

3° *Travail transmis par les ailes.* — Les ailes étant établies, toujours suivant la méthode hollandaise, et leur vitesse étant dans le rapport 2,60 assigné avec celle du vent, le travail transmis croît comme la surface des ailes. Il croît aussi un peu moins rapidement que le cube de la vitesse du vent, de sorte que celle-ci devenant double, il s'en faut de $\frac{1}{20}$ que le travail transmis ne soit octuple. On peut négliger cette différence, et alors on aura pour le travail transmis dans une seconde, d'après les expériences de Smeaton et de Coulomb,

$$Pv = 2{,}60 \,.\, VP = 0{,}13 \,.\, A \,.\, V^3 \text{ kilogrammètres},$$

formule dans laquelle P est l'effort en kilogrammes à l'extrémité des ailes et dans le sens du mouvement de rotation de cette extrémité, V la vitesse du vent en mètres, A la surface d'une *seule* aile en mètres carrés. On n'a pas eu égard dans les expériences, à la variation de densité de l'air selon la température; mais elle modifiera peu les résultats, qui seront toujours suffisamment exacts pour la pratique. D'ailleurs, au moyen des données ci-dessus, on aura tout

ce qu'il faut pour faire l'établissement des moulins à vent, quand on connaîtra la vitesse moyenne des vents régnants. La vitesse la plus convenable du vent pour le travail paraît être de 6 à 7 mètres. Si on veut que la machine marche en tout temps, on déterminera la surface A de l'aile pour $V = 2^m$; mais, alors, dans les jours de vents plus considérables, il faudrait replier les voiles en partie. Ces relations concernent d'ailleurs le *maximum* d'effet de la machine.

Smeaton a observé que lorsque les ailes ne sont pas chargées, ou tournent à vide, la vitesse que prennent leurs extrémités est en rapport constant avec celle du vent, de même que pour la charge qui répond au *maximum* d'effet; d'où il conclut un moyen assez simple de mesurer la vitesse du vent. Ce rapport est 4 pour les ailes hollandaises et élargies; c'est-à-dire que, pour avoir la vitesse du vent, on devra diviser par 4 la vitesse de l'extrémité de l'aile, quand celle-ci tourne à vide.

XX.

MACHINES ALTERNATIVES MUES PAR L'EAU.

167. *Machine à colonne d'eau.* — On a parlé jusqu'à présent des récepteurs à mouvement continu, soit qu'il s'agisse de l'eau ou du vent. Ces mêmes récepteurs ont été également essayés pour la vapeur; mais, comme leur emploi paraît difficile pour ce dernier cas, la vapeur travaille d'ordinaire sur des machines alternatives. Il en est de même pour les fortes chutes d'eau de dix à vingt mètres; leur travail est reçu par une machine à piston, laquelle se nomme *machine à colonne d'eau*, et dont nous allons faire connaître les principales propriétés mécaniques.

La machine à colonne d'eau (fig. 528) consiste dans un corps de pompe A, fermé par le haut et par le bas, et en communication avec un autre corps de pompe BB beaucoup plus petit, par deux ouvertures supérieure et inférieure O et O'. P est le grand piston moteur dont la tige CD, tenue verticale par la combinaison

du jeu d'un parallélogramme (3e partie, 20), transmet un mouvement circulaire alternatif au balancier *EF* autour de son axe de rotation *G*. Ce mouvement circulaire alternatif se transforme, par l'intermédiaire de la bielle *FH* et d'une manivelle *HI*, en un mouvement de rotation continu autour de l'arbre *I* d'un volant destiné à régulariser l'action alternative du moteur ; et cet arbre transmet immédiatement le mouvement à la machine que l'on veut faire marcher. Quand le travail consiste à tirer l'eau du fond d'un puits, le corps de pompe *A* se trouve placé sur la verticale de ce puits ; le piston moteur *P* porte une tige inférieure *LM*, armée d'un autre piston, lequel joue dans un corps de pompe *U* pour aspirer et élever les eaux qu'on veut extraire. On remarquera que les tiges du piston, à l'endroit où elles traversent le fond du corps de pompe, glissent dans ce qu'on nomme *boîte à étoupe* (fig. 529). C'est une espèce de cône creux adapté au fond du corps de pompe, dans lequel se meut la tige du piston, et qui est rempli d'étoupes imbibées d'huile qu'on presse avec des vis, au moyen d'un autre cône qui pénètre le premier.

Revenons à la manière dont le grand piston *P* reçoit son mouvement vertical de va-et-vient. Le petit corps de pompe *BB* (fig. 528) communique par deux tuyaux de même diamètre *N* et *N'* avec un tuyau vertical ou incliné *TS*, par lequel l'eau afflue d'un réservoir supérieur où le niveau *XY* est tenu constant, si la quantité d'eau qui y arrive est égale à celle qui tombe dans le tuyau *TS*. Cette eau doit arriver tantôt au-dessous du piston *P* et tantôt au-dessus, selon que ce piston monte ou descend, tandis que celle qui se trouve dans le grand corps de pompe du côté opposé au mouvement doit pouvoir être refoulée dans le corps de pompe *BB*, et de là s'échapper par un dégorgeoir *Z*. Ainsi, dans le cas où le piston *P* monte, l'ouverture inférieure *O'* est en communication avec le tuyau *TS* ; et l'ouverture supérieure *O* communique seulement avec le corps de pompe *BB* et avec son dégorgeoir. Dans le cas de la descente, c'est au contraire l'ouverture supérieure *O* qui communique avec le tuyau *TS*, et l'ouverture inférieure *O'* avec le dégorgeoir *Z*. Il faut donc un système particulier pour que chaque ouverture inférieure ou supérieure soit alternativement en communication tantôt avec le tuyau *TS* de la chute motrice et tantôt avec le dégorgeoir *Z*, en même temps que l'autre communique soit avec ce dernier, soit avec le tuyau *TS*. Tel est l'objet des deux petits

pistons *a* et *b* dans le corps de pompe *BB*, lesquels sont réunis entre eux par une tige commune *cd*. Tant que le grand piston *P* monte, les deux petits pistons *a* et *b* occupent une position telle que leur face inférieure arase les parois des ouvertures *O* et *O'*; car de cette manière il y a communication immédiate 1° entre l'eau de la chute *TS* et la partie inférieure du piston *P*; 2° entre l'eau de la partie supérieure de ce dernier et le dégorgeoir; de plus, la communication entre le tuyau *N* et la partie supérieure *P* est fermée par le piston *a*. Lorsque le piston *P* va descendre, les deux petits pistons doivent prendre les positions ponctuées *a'*, *b'*; dès lors la communication du tuyau *TS* s'établit par le tuyau *N* et par l'ouverture *O* avec la partie supérieure du piston *P*, ainsi que la communication par l'ouverture *O'* de la partie inférieure du piston *P* avec le dégorgeoir; mais en même temps le petit piston inférieur dans sa position *b'* intercepte toute communication entre le bas du grand piston *P* et le tuyau *N'* ou le tuyau de chute *TS*. On voit que c'est aux époques de la position la plus haute et de la position la plus basse du grand piston *P*, que doit s'opérer le déplacement simultané des deux petits pistons *a* et *b*. L'amplitude de ce déplacement est égal au diamètre de l'une des ouvertures *O* et *O'* qui sont égales, plus l'épaisseur de l'un de ces petits pistons qui sont aussi égaux. Pour produire cet effet, la tige *cd* des deux petits pistons, tenue verticale par le guide *K*, est munie d'un renflement évidé dans lequel peut jouer un levier *fg* à articulation semblable à celui qui a été décrit à la fin du n° 30, et mobile autour de l'axe fixe *i*. Deux chevilles *m* et *m'*, attachées à la tige *CD* du piston *P*, distantes entre elles d'une quantité égale à sa course, sont destinées à faire baisser, à la fin d'une montée, ou à faire monter à la fin d'une descente, les deux pistons *a* et *b* par l'intermédiaire du levier *fg*, dont ces chevilles rencontrent tour à tour l'extrémité.

168. *Idées sur le calcul du travail des machines à colonne d'eau.* — S'il n'y avait aucune résistance dans la machine, il est évident que le travail transmis à l'arbre du volant serait égal à celui de la chute. Si on désigne par *q* le poids de l'eau qui tombe par seconde, et par *H* la hauteur du niveau supérieur *XY* au-dessus du dégorgeoir *Z*, *qH* sera le travail de la chute dans une seconde. Mais il s'en faut que ce travail soit transmis intégralement à l'arbre du volant. Une partie est absorbée par le frottement du piston *P*, une

autre partie par le frottement de l'eau contre les tuyaux, une troisième partie par les pertes de force vive dues aux étranglements et aux contractions, et une quatrième aux coudes. Enfin il y en a une cinquième partie due aux frottements du balancier, des articulations, de la bielle, etc. Examinons principalement les quatre premières espèces de pertes.

1° *Pertes dues au frottement du grand piston P.* — Le frottement d'un piston contre son corps de pompe est évidemment proportionnel à l'action qu'il exerce contre les parois. Celle-ci est non-seulement proportionnelle à la surface enveloppe latérale du piston, mais encore à la différence des pressions par unité de surface, auxquelles le piston est soumis par le haut et par le bas. C'est, en effet, en vertu de cette différence que les fuites de liquide tendent à s'opérer par le jeu ménagé entre le piston et le corps de pompe; il est donc naturel de supposer que cette différence soit aussi la mesure de la résistance que le piston oppose au passage du liquide ou du fluide, par unité de surface. Soient donc p et p' les pressions unitaires exercées sur les deux bases du piston, $p - p'$ sera la réaction par unité de surface qu'il doit au moins exercer contre les parois, et si je nomme R son rayon et e son épaisseur,

$$2\pi Re\,(p - p')$$

exprimera la totalité de ses pressions latérales. Comme les pressions p et p' varient d'une position à l'autre du piston, on aura soin de considérer la position pour laquelle la différence $p - p'$ est la plus grande. Par exemple, dans le cas qui nous occupe, cette différence sera mesurée par le poids d'une colonne d'eau dont la hauteur est celle du niveau XY au-dessus de la base inférieure du piston P; et il est évident que cette différence sera la plus grande quand le piston occupe la position la plus basse. Si cette hauteur est de 20^m, la pression de cette colonne par mètre carré de surface sera 20×1000^k, ou $20\,000^k$; de sorte que si $R = 0^m,30$, et $e = 0^m,12$, on aura

$$2\pi Re = 2 \,.\, 3,14 \,.\, 0^m,30 \,.\, 0^m,12 = 0^{m\,qu},23.$$

La pression totale contre les parois ou

$$2\pi Re\,(p - p') = 0,23 \times 20000^k = 4600^k.$$

Connaissant cette pression totale, ainsi que le rapport f du frotte-

ment à la pression, rapport qui dépend de la nature des substances en contact, et qui est donné par les tableaux du n° 106, 2e partie,

$$2\pi Ref(p - p')$$

mesurera la résistance du frottement du piston. Mais, afin d'obtenir le travail qu'il absorbe dans une seconde, il faudrait connaître le chemin que parcourt ce piston dans cette unité de temps, c'est-à-dire sa vitesse. C'est ici le lieu de remarquer que cette dernière n'est pas constante, et qu'elle varie, comme celle de la manivelle, de manière à devenir nulle aux positions extrêmes, et la plus grande possible vers une position moyenne. Toutefois on peut, pour la pratique, s'en tenir à une vitesse moyenne du piston, en comptant le nombre de courses qu'il fait dans un temps donné, et en divisant le produit de ce nombre et de l'amplitude de chaque course par le nombre de secondes pendant lequel l'observation a duré. Le quotient ne sera autre chose que la vitesse moyenne du piston, vitesse que je nomme V; en sorte que le travail absorbé par son frottement dans une seconde sera exprimé par

$$2\pi Ref(p - p') \times V.$$

2° *Résistance des tuyaux.* — Je supposerai que le tuyau TS, les tuyaux NN', les ouvertures O et O' qui amènent l'eau, ainsi que le dégorgeoir, le petit corps de pompe BB, ont même diamètre, en sorte que la vitesse de l'eau dans ces divers tuyaux sera partout constante et égale à v. Si je nomme a l'aire de leur section transversale, A celle du grand piston ou de son corps de pompe, on aura évidemment la relation

$$av = AV, \quad \text{d'où} \quad v = \frac{A}{a} \times V.$$

Cette relation est fondée sur ce que la quantité d'eau qui arrive dans le grand corps de pompe est la même que celle qui s'écoule dans le tuyau. On a vu, d'ailleurs, que le travail absorbé par la résistance d'un tuyau pendant le temps que s'écoule un poids q de liquide (et ici c'est la seconde), était exprimé par $\frac{q}{g} \varkappa . \frac{CL}{a} v^2$, formule dans laquelle $\varkappa = 0{,}0035$, C représente le contour de la section transversale du tuyau, a l'aire de cette dernière, L la longueur développée du tuyau, et v la vitesse dans ce tuyau. Si nous rem-

plaçons v par $\frac{V}{a} \times V$, on trouvera, pour le travail que consomme dans une seconde la résistance des tuyaux, cette valeur

$$0{,}0035 \cdot \frac{C}{a^3} \cdot A^2 L V^2 \times \frac{q}{g}.$$

3° *Pertes de force vive dues aux étranglements et à la contraction.* — L'eau, en passant du réservoir supérieur XY dans l'orifice S, se contracte d'abord, et se dilate ensuite dans le tuyau, de sorte que si on nomme m le coefficient de contraction pour l'orifice S, et v la vitesse dans le tuyau, la perte de force vive due à cette contraction sera

$$\frac{q}{g}\left(\frac{1}{m} - 1\right) v^2, \quad \text{ou} \quad \frac{q}{g}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 \frac{A^2 V^2}{a^2},$$

qui correspond à une perte de travail représentée par

$$\frac{q}{2g}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 \frac{A^2 V^2}{a^2}.$$

Lorsque l'eau passe du tuyau d'arrivée, sous le piston P, sa vitesse v dans le tuyau se réduit à V sous le piston, et elle éprouve par seconde une perte de force vive exprimée par

$$\frac{q}{g}(v - V)^2, \quad \text{ou par} \frac{q}{g} V^2 \left(\frac{A}{a} - 1\right)^2,$$

qui correspond à une perte de travail dont la valeur est

$$\frac{q}{2g}\left(\frac{A}{a} - 1\right)^2 V^2.$$

En passant par l'orifice supérieur O, l'eau se contracte encore avant de reprendre la vitesse v; cependant la perte de force vive n'est pas ici assez sensible pour en tenir compte. Arrivée dans le petit corps de pompe BB, où elle conserve la vitesse v, si l'eau s'en échappait par une paroi mince latérale, sa force vive à la sortie serait $\frac{q}{g} v^2$. Mais, comme elle s'écoule par un bout de tuyau Z qui consomme un tiers de la force vive, on peut estimer que la perte

sera ici

$$0{,}33 \cdot \frac{q}{g} \cdot v^2, \text{ ou } 0{,}33 \cdot \frac{q}{g} \cdot \frac{A^2}{a^2} \cdot V^2,$$

qui correspond à un travail

$$0{,}33 \cdot \frac{q}{2g} \cdot \frac{A^2}{a^2} \cdot V^2.$$

La perte totale du travail due aux étranglements aura, par conséquent, pour valeur

$$\frac{qV^2}{2g} \left\{ \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 \frac{A^2}{a^2} + \left(\frac{A}{a} - 1\right)^2 + 0{,}33 \cdot \frac{A^2}{a^2} \right\}.$$

4° *Perte de travail due aux coudes.* — La perte de force vive occasionnée par un coude, et dans une seconde, est, d'après Dubuat, exprimée par la formule

$$\frac{q}{g} v^2 (0{,}0039 + 0{,}0186 \cdot r) \frac{s}{r},$$

dans laquelle v est la vitesse dans le coude ou le tuyau, r le rayon moyen de l'arc du coude, et s le développement moyen de l'arc du coude. Si le coude est rectangulaire, on prend pour arc moyen s celui qui, de l'angle rentrant comme centre, est décrit avec un rayon égal à celui du tuyau et qui est tangent aux axes du tuyau, de façon que le rayon moyen du coude est égal au rayon du tuyau. Cette perte de force vive, à cause de $v^2 = \frac{A^2}{a^2} \cdot V^2$, correspond à une perte de travail par seconde ayant pour valeur

$$\frac{q}{2g} \cdot V^2 \cdot \frac{A^2}{a^2} (0{,}0039 + 0{,}0186 \cdot r) \frac{s}{r}.$$

Il est entendu qu'on multipliera cette valeur par le nombre de coudes que l'eau traverse en passant dans les tuyaux, pour avoir la perte totale dont il s'agit.

Nous ne parlerons pas des pertes occasionnées par le frottement des articulations, du balancier, de la bielle, etc., attendu que ces calculs, qui nous conduiraient trop loin, sont fondés sur les principes que nous avons établis à cet égard dans la seconde partie du cours. Ce qui précède suffit pour faire voir toutes les causes qui

diminuent le travail q . H de l'eau avant d'arriver à l'arbre du volant. L'effet utile dans les meilleures machines à colonne d'eau ne s'élève pas à 0,80 du travail moteur, ou à 0,80 . qH; dans les machines ordinaires de Bélidor il n'excède pas 0, 40 . qH.

XXI.

MACHINES A VAPEUR.

169. *Description de l'ensemble des parties d'une machine à vapeur.* — Les machines à vapeur sont organisées à peu près de la même manière que les machines à colonne d'eau; et comme nous avons expliqué, dans notre Cours de la 1re année, pages 167 à 186 (*), le mode d'action de la vapeur alternativement au-dessus et au-dessous du piston, avec ou sans détente, ainsi que le rôle du condensateur, il ne nous reste qu'à donner une idée sur l'ensemble des diverses parties de la machine.

ABDC (fig. 530) est un corps de pompe fermé dans lequel se meut le piston moteur *P*, qui communique le mouvement au balancier *EF*, puis à la bielle *FG*, puis enfin à la manivelle *GH*, montée sur l'arbre *H*, qui porte un volant régulateur.

LI représente le tuyau d'admission de la vapeur, partant de la chaudière et se rendant dans la capacité *I*, nommée *boîte de distribution*, parce que c'est là que s'opère le jeu des soupapes qui donnent accès à la vapeur alternativement au-dessus et au-dessous du piston et qui la laissent échapper dans le condensateur *X* après son action sur ce piston. Ce condensateur est noyé dans une bâche d'eau froide. (Nous renverrons au cours de M. Dupin pour le détail du jeu de ces soupapes.)

Y est une pompe simplement aspirante, dite *à air*, et mise en mouvement par un piston vertical attaché au parallélogramme du

(*) *Mécanique Industrielle*, exposant les différentes méthodes pour déterminer et mesurer les forces motrices, ainsi que le travail mécanique des forces; chez Lereux; Liége et Bruxelles, 1839.

balancier; cette pompe rejette la vapeur et son eau de condensation, ainsi que l'air contenu par cette dernière, dans la bâche Z, d'où elle s'écoule à l'air libre par un canal de trop plein V.

U est une pompe aspirante et foulante qui puise de l'eau chaude dans la bâche Z et la refoule dans un tuyau u, qui se rend dans la chaudière à vapeur; c'est la pompe *alimentaire* de la chaudière et qui sert à rendre à celle-ci l'eau de la vapeur qui lui est enlevée à chaque instant par le corps de pompe $ABDC$.

O est un corps de pompe ordinaire qui puise de l'eau froide plus ou moins bas dans le sein de la terre ou dans une rivière, et qui la verse par un tuyau O' dans la bâche enveloppant à la fois le condensateur X et sa pompe à air Y. Souvent aussi cette pompe, qu'on nomme *pompe à eau froide*, refoule l'eau directement dans l'intérieur du condensateur X et devient *pompe d'injection*. Mais quand il y a une bâche-enveloppe, ainsi que le suppose le dessin de la figure 530, l'eau froide est injectée par une pompe d'arrosoir v, au moyen d'un robinet x que manœuvre de haut en bas un levier mobile. Toutes les pompes sont mues par des tiges attachées au balancier. Quand la machine est destinée à puiser de l'eau, la pompe prend des dimensions plus grandes; rien n'est changé quant au mécanisme. Seulement l'eau froide, dont l'élévation constitue le travail, est refoulée dans un réservoir à air, d'où elle s'élève ensuite par un tuyau d'ascension selon un jet continu, ainsi qu'il a été expliqué au chapitre XIII (*des pompes*).

Enfin, il arrive que dans les épuisements on supprime le volant et la bielle, qui ne serviraient qu'à régulariser le mouvement. Le balancier subsiste toujours, mais on profite de la suppression de la manivelle pour placer à l'extrémité correspondante la tige de la grande pompe O (fig. 532) à épuiser. On met alors le système en équilibre par des contre-poids Q; tout le surplus reste le même.

170. *Détails des chaudières.* — On emploie généralement deux espèces de chaudières, la chaudière *à tombeau* en forte tôle pour les machines à basse pression, et la chaudière en fonte pour les machines à haute pression.

La chaudière *à tombeau*, due à Watt, est représentée (fig. 533) par son profil transversal. Elle a la forme d'un cylindre dont les arêtes sont horizontales et dont les bases sont verticales. Le contour de chaque base est convexe et demi-circulaire en dessus; il est con-

cave des deux côtés comme en dessous. *E* représente la chaudière en tôle, *A* le cendrier, *BB'* la grille. La flamme lèche d'abord le dessous de la chaudière qui est fort longue. Arrivée au bout, elle se partage par le moyen d'un diaphragme *GG'*; une partie va en *C'*, et l'autre en *C*. Ces deux parties reviennent le long des côtés par des tuyaux de conduite, se réunissent de nouveau en avant, et s'échappent par une cheminée générale. Souvent aussi la flamme se rend du foyer par le fond de la chaudière dans un seul conduit *C* à gauche; de là elle circule dans ce tuyau, passe en avant de la chaudière pour se rendre dans le conduit *C'*, à l'extrémité duquel se trouve une cheminée pour la recevoir.

La chaudière pour les machines à haute pression, inventée par Woolf, est en fonte ou en tôle forte. Elle consiste dans un cylindre horizontal *E* (fig. 534), en communication directe, par des tuyaux *aa*, avec deux autres cylindres plus petits *GG*, plongés dans le foyer et qu'on nomme *bouilleurs*. La flamme, après avoir léché la surface de ces bouilleurs et le dessous de la chaudière, se rend dans le tuyau latéral *C*, puis dans le tuyau latéral *C'*, et arrive enfin dans une cheminée placée à l'opposé du foyer.

171. *Usage des ouvertures pratiquées au sommet des chaudières.*— Le haut des chaudières porte plusieurs ouvertures dont il faut connaître l'usage; ce sont :

1° Le *trou d'homme*, espèce d'ellipse de 18 pouces sur 10, ordinairement fermée par une plaque métallique avec boulons, et qui n'est ouverte que pour réparer l'intérieur de la chaudière.

2° Une ouverture pour laisser échapper la vapeur dans un tuyau destiné à la conduire vers le piston moteur de la machine.

3° Une ou deux autres ouvertures *x* (fig. 535), portant la soupape de sûreté *y*, qui bouche l'ouverture hermétiquement au moyen de la pression exercée par un couteau *u* adapté à une romaine *lm* avec contre-poids *Q*, tournant en *m* sur un boulon fixe. *Q* est réglé ou posé sur la longueur *lm*, de façon que la soupape s'élève dès que la tension de la vapeur dans la chaudière surpasse une limite assignée. Souvent encore on remplace la soupape de sûreté par des plaques fusibles à la température qui correspond au *maximum* de tension. Si nous revenons à la soupape de sûreté, nous voyons que le moment de la pression limite contre la base du petit massif retenu par le couteau *u*, serait égal au moment du poids *Q*, si les

frottements n'altéraient cet équilibre. L'adhérence et les frottements deviennent, au bout d'un certain temps du repos de la soupape, tels que celle-ci peut cesser de s'ouvrir quand la vapeur est parvenue à sa tension limite.

4° Une autre ouverture pour faire arriver la vapeur dans le manomètre, qui sert à mesurer plus exactement la pression, que ne le fait le contre-poids des soupapes de sûreté. La vapeur est conduite par un tuyau dans un réservoir à bain de mercure (fig. 536), dans lequel plonge un tuyau rempli d'abord d'une certaine quantité d'air sec. Tant que la vapeur est à la pression atmosphérique, la colonne de mercure dans le tube est au niveau de celui du réservoir. Mais, dès que la vapeur prend une tension plus grande, sa tension est mesurée par la hauteur de la colonne de mercure dans le tube, augmentée de la pression de l'air resserré entre cette colonne et le sommet du tube. Cette dernière tension se mesure au moyen de ce principe de Mariotte, que les pressions de cet air sont en raison inverse des volumes ou des hauteurs comprises entre le sommet du tube et le haut de la colonne.

5° Une ouverture très-petite garnie d'étoupe, servant à laisser passer la tige déliée qui supporte le flotteur *F* (fig. 537), dont les mouvements accusent la hauteur du niveau *cd* de l'eau dans la chaudière, et mettent en action un levier à contre-poids *Q* qui ferme ou ouvre le robinet *R* d'alimentation de la chaudière.

6° Enfin, une ouverture pour un dernier tuyau qui débouche dans l'eau même de la chaudière, au-dessous du niveau *cd*, et qui lui apporte l'eau fournie par la pompe alimentaire.

Nous renvoyons pour plus de détails aux traités spéciaux ; les notions précédentes suffisent pour se former une idée de l'ensemble et du jeu de la machine.

172. *Idées sur les précautions à prendre.* — Par l'action de la chaleur du foyer, l'eau entre en ébullition, et la vapeur se transforme au-dessus du niveau *cd*. Lorsque le robinet, qui permet à volonté d'intercepter le tuyau d'arrivée de la vapeur dans le cylindre où se meut le piston moteur, est fermé, la pression et la température de la vapeur dans la chaudière augmentent de plus en plus; mais dès que la vapeur a acquis le degré voulu de tension, ce qu'indique le manomètre, le chauffeur ouvre le robinet, la vapeur arrive alternativement au-dessus et au-dessous du piston moteur.

Ce dernier dans son mouvement entraîne ainsi toute la machine.

Le robinet d'admission de la vapeur est mis en communication avec un régulateur à force centrifuge (3e partie, 47), lequel participe lui-même au mouvement de la machine, et est destiné à fermer ou à ouvrir le robinet d'admission selon que ce mouvement s'accélère ou se ralentit. Mais ce régulateur ne préserve point des dangers de l'élévation de tension qui survient dans la chaudière; la soupape de sûreté est seule chargée de ce soin; elle doit s'ouvrir quand la pression intérieure devient trop forte, et permettre à la vapeur de s'échapper. Cette circonstance arrive quand le chauffeur fait trop de feu. Quelquefois la soupape de sûreté adhère contre le tuyau ou fonctionne mal; de là il résulte des accidents. C'est pourquoi il faut que le chauffeur la fasse de temps en temps jouer, pour entretenir la mobilité de ses diverses parties.

Lorsque le flotteur ne marche point, ou qu'il éprouve des résistances accidentelles, il ne suit plus la descente de l'eau, celle-ci baisse dans la chaudière sans qu'on en ait aucun indice, et laisse à nu les parois exposées à la flamme. Ces parois, au lieu de se maintenir à la température de l'eau bouillante, comme cela a lieu tant qu'elles sont couvertes d'eau, passent au rouge sans cependant faire élever beaucoup la température de la vapeur. Mais quand ensuite le jet d'eau d'alimentation arrive sur l'enveloppe, ce jet se vaporise instantanément et développe une action très-énergique qui fait éclater la chaudière (voyez la notice de M. Arago, sur les explosions des machines à vapeur, insérée dans l'Annuaire de 1830 du Bureau des longitudes). Beaucoup de soins et un bon chauffeur sont les moyens d'éviter de pareils accidents.

Quand une machine est puissante, on emploie deux ou trois chaudières séparées.

178. *Volumes de l'eau et de la vapeur dans la chaudière.* — Ces observations font voir que le niveau de l'eau dans l'état ordinaire doit s'élever, pour les chaudières, de quelque chose au-dessus des conduites de la flamme. Ordinairement elles sont remplies d'eau de la moitié aux $\frac{6}{10}$ de leur hauteur; le surplus de leur capacité forme le réservoir de la vapeur. Ce dernier doit être assez grand pour que la soustraction de la vapeur à chaque coup de piston ne fasse pas trop varier la tension dans la chaudière. Voici comment on déterminera le volume de la partie de la chaudière qui forme ré-

servoir de vapeur, d'après le volume de vapeur qui est introduit sur une machine à double effet et à détente.

Soit A la capacité de la chaudière, affectée à la vapeur; a le volume de vapeur introduit à chaque coup de piston dans le corps de pompe, volume mesuré par la portion de course du piston pendant laquelle la vapeur est reçue à plein sans détente. Soit na le volume de la course totale du piston, de sorte que la vapeur peut être considérée comme admise dans un temps qui est la fraction $\frac{1}{n}$ du temps total de la course. Au commencement de la course du piston, le volume de la vapeur dans la chaudière est A sous la pression p; mais au moment où la chaudière a fourni au piston un volume a de vapeur sous la tension p pendant la n^e partie de sa course, il n'a pu se former dans l'intérieur de la chaudière qu'un volume $\frac{a}{n}$ de nouvelle vapeur sous cette même tension. Ainsi, au moment où l'introduction de la vapeur sous le piston cesse, la vapeur dans la chaudière sous la tension p occuperait un volume $A - a + \frac{a}{n}$. Or, en réalité cette même quantité de vapeur doit remplir la capacité totale A, et, par conséquent, conserver une tension p' inférieure à la tension première p. Cette tension inférieure p' s'obtient d'après le principe de Mariotte, au moyen de la relation

$$p : p' :: A : A - a + \frac{a}{n};$$

d'où on tire

$$p' = p\left\{\frac{A - a\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{A}\right\} = p\left\{1 - \frac{a}{A}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= p - p \cdot \frac{a}{A}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Donc, $$p - p' = p \cdot \frac{a}{A}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Si l'on veut que la variation de tension $p - p'$ soit seulement

$\frac{1}{30}p$, on aura

$$\frac{1}{30} = \frac{a}{A}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad \text{ou} \quad A = 30 \cdot a\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

S'il n'y a pas de détente, n devient l'unité, et A est zéro. En effet, la vapeur qui, dans ce cas, se forme à l'intérieur, est précisément égale à celle qui s'échappe. Toutefois, comme il y a des intervalles pendant lesquels les robinets ne sont pas ouverts, on prendra, suivant Tredgold, $A = 3a$, quand il n'y a pas de détente. Si la détente a lieu pour le quart du volume de la course totale du piston, comme dans les machines de Woolf, on fera $n = 4$, et $1 - \frac{1}{n} = \frac{3}{4}$; donc $A = \frac{3}{4}\,30a = 22\frac{1}{2}$ fois a, ou 5 fois environ le volume de la course totale du piston. Si $n = 3$, on trouve . . . . . $A = \frac{2}{3}\,30a = 20a$, ou environ 6 fois le volume de la course totale. Enfin, si $n = 2$, $A = 15a$ ou $7\frac{1}{2}$ fois le cylindre total.

174. *Relations entre la densité, la température, et la tension des gaz.* — Pour établir une machine à vapeur, on a différentes choses à calculer, telles que le poids de la vapeur à former, de la houille à brûler, l'effet utile transmis, l'eau nécessaire à l'injection, etc. Déjà nous avons enseigné dans le Cours de la 1re année (§§ 187 et suivants), à évaluer le travail des pistons quand on connaît la tension et le volume de la vapeur introduite dans les corps de pompe, c'est pourquoi nous n'y reviendrons pas.

Quant au poids de la vapeur formée dans un temps déterminé, il dépend de sa densité, et celle-ci est liée à la pression et à la température de cette vapeur. Mais, afin de faire connaître cette relation, nous commencerons à l'établir pour les gaz permanents, quoique ceux-ci, comme nous le verrons, diffèrent de la vapeur d'eau en quelques points.

Quand on connaît la tension et la température d'un gaz, ainsi que la densité de ce gaz à zéro de température et sous la pression atmosphérique ordinaire, on a fait voir, dans le Cours de la 1re an-

née (§ 211), comment il était possible de calculer la densité de ce même gaz pour la tension et la température dont il s'agit. Mais, plus généralement, au lieu de partir de la densité du gaz dans les circonstances ordinaires de zéro de température et de la pression atmosphérique, on a besoin de passer de sa densité sous une température et sous une pression quelconque, à la connaissance de sa densité sous une autre température et sous une autre pression données. Soit, par exemple, π la densité ou le poids d'un mètre cube de gaz lorsque n est sa température et p sa tension par centimètre carré de surface, et soient π', n', p' sa densité, sa température et sa pression dans un autre état, je dis qu'on pourra calculer π au moyen de la formule

$$\pi = \pi' \frac{1 + 0{,}00375 \cdot n'}{1 + 0{,}00375 \cdot n} \times \frac{p}{p'}.$$

En effet, considérons un mètre cube de ce même gaz à zéro de température, soit p_0 sa pression correspondante, on trouvera, si p_0 correspond à la pression de 76 centimètres de mercure ; on trouvera, dis-je, en cet état, son poids π_0 dans la table du § 40 du Cours de la 1re année. Maintenant, si de zéro la température s'élève de n degrés centigrades, sans que la pression p_0 change, le volume 1 deviendra, en vertu du principe de Gay-Lussac (§ 26, Cours de la 1re année) $1 + 0{,}00375 \cdot n$. De plus, si la pression p_0 est augmentée et devient p, ce dernier, en vertu de la loi de Mariotte (§ 16, Cours de la 1re année), sera réduit à $(1 + 0{,}00375 \cdot n)\frac{p_0}{p}$. Divisant par ce nouveau volume le poids du gaz qui n'en est pas moins toujours π_0, le quotient sera la densité π de ce gaz, mais à la pression p et à la température centigrade n, en sorte qu'on aura

$$\pi = \frac{\pi_0 p}{(1 + 0{,}00375 \cdot n)\, p^0}.$$

Enfin, si la pression et la température du gaz, au lieu d'être p et n, étaient p' et n', sa nouvelle densité π' sera telle qu'on aura

$$\pi' = \frac{\pi_0 p'}{(1 + 0{,}00375 \cdot n')\, p_0};$$

d'où on tire la proportion

$$\pi : \pi' :: \frac{\pi_0 p}{(1 + 0{,}00375 \cdot n)\, p_0} : \frac{\pi_0 p'}{(1 + 0{,}00375 \cdot n')\, p_0},$$

ou bien $$\pi : \pi' :: \frac{p}{1 + 0{,}00375 \cdot n} : \frac{p'}{1 + 0{,}00375 \cdot n'};$$

d'où on tire, comme on l'a énoncé plus haut,

$$\pi = \pi' \times \frac{1 + 0{,}00375 \cdot n'}{1 + 0{,}00375 \cdot n} \times \frac{p}{p'}.$$

175. *Caractères distinctifs de la vapeur d'eau. Relations entre sa tension et sa température.* — Revenons à la vapeur d'eau. Elle diffère des gaz permanents en ce qu'elle peut se condenser quand on la comprime ou qu'on la refroidit, et en ce qu'elle se forme dans tout espace en contact avec de l'eau.

Supposez une chaudière ou vase fermé, contenant de l'eau à une certaine température. Le vase étant en outre vide d'air, il se formera, au-dessus du liquide, de la vapeur dont la densité et la tension sont uniquement relatives à la température du vase et de l'eau.

On dit que l'espace est saturé, quand le liquide ne fournit plus de vapeur dans cet espace sous la température qu'on considère; c'est de la vapeur *à saturation* ou au *maximum* de tension. Car si on imagine qu'on veuille augmenter la tension de la vapeur ainsi formée, en réduisant l'espace avec un piston, il se condensera une certaine portion de vapeur, et la tension de la portion restante demeurera la même, c'est-à-dire telle que le comporte la température qui est supposée n'avoir pas changé.

Si la température vient à baisser, une portion de la vapeur se condense jusqu'à ce que la densité de la portion restante soit réduite à celle qui répond à la nouvelle température et à la nouvelle tension; car la tension diminue, aussi bien qu'elle augmente, avec la température. Ainsi, les vapeurs diffèrent d'un gaz permanent, en ce qu'on n'est pas le maître de faire varier à volonté leur tension et leur température. L'expérience seule peut faire connaître la loi qui, dans ce phénomène, lie la température et la tension de la vapeur saturée. Nous allons, à cet égard, rapporter le tableau des expériences entreprises et publiées en 1829 par l'Académie des sciences.

TABLE des forces élastiques de la vapeur d'eau et des températures correspondantes de 1 *à* 24 *atmosphères, d'après l'observation, et de* 24 *à* 50 *atmosphères par le calcul.*

ÉLASTICITÉ DE LA VAPEUR exprimée en atmosphères de 0m,76 de mercure.	ÉLASTICITÉ en mètres de MERCURE à 0 degrés.	TEMPÉRATURE CORRESPONDANTE. (Thermomètre centigrade.)	PRESSION SUR UN CENTIMÈ. CARRÉ.
	m.	°	k.
1	0,76	100,00	1,033
1 ½	1,14	112,20	1,549
2	1,52	121,40	2,066
2 ½	1,90	128,80	2,582
3	2,28	135,10	3,099
3 ½	2,66	140,60	3,615
4	3,04	145,40	4,132
4 ½	3,42	149,06	4,648
5	3,80	153,08	5,165
5 ½	4,18	156,80	5,681
6	4,56	160,20	6,198
6 ½	4,94	163,48	6,714
7	5,32	166,50	7,231
7 ½	5,70	169,37	7,747
8	6,08	172,10	8,264
9	6,84	177,10	9,297
10	7,60	181,60	10,330
11	8,36	186,03	11,363
12	9,12	190,00	12,396
13	9,88	193,70	13,429
14	10,64	197,19	14,462
15	11,40	200,48	15,495
16	12,16	203,60	16,528
17	12,92	206,57	17,561
18	13,68	209,40	18,594
19	14,44	212,10	19,627
20	15,20	214,70	20,660
21	15,96	217,20	21,693
22	16,72	219,60	22,726
23	17,48	221,90	23,759
24	18,24	224,20	24,792
25	19,00	226,30	25,825
30	22,80	236,20	30,990
35	26,60	244,85	36,155
40	30,40	252,55	41,320
45	34,20	259,52	46,485
50	38,00	265,89	51,650

Dans le tableau précédent, les températures qui correspondent aux tensions de plus de vingt-quatre atmosphères ont été calculées par la formule

$$t = \frac{\sqrt[5]{e - 1}}{0{,}7153},$$

où e exprime l'élasticité en atmosphères et t la température à partir de 100°, en prenant l'intervalle de 100° pour unité. On a de fortes raisons pour croire que l'erreur ne serait pas de 1 à cinquante atmosphères.

Souvent on a besoin de connaître la tension de la vapeur pour des températures au-dessous de 100°; tel est en particulier le cas des condensateurs. On aura alors recours au tableau suivant.

TABLE des forces élastiques de la vapeur pour des températures correspondantes au-dessous de 100°.

ÉLASTICITÉ en MÈTRES DE MERCURE.	TEMPÉRATURE CORRESPONDANTE. (Thermomètre centigrade.)	PRESSION SUR UN CENTIMÈTRE CARRÉ.
m.	d	k.
0,00946	10	0,013
0,01731	20	0,023
0,03164	30	0,041
0,05300	40	0,071
0,08874	50	0,121
0,14466	60	0,197
0,22907	70	0,313
0,35208	80	0,479
0,52528	90	0,714
0,76000	100	1,033

176. *Densité de la vapeur dont la tension et la température sont données.* — D'après la tension de la vapeur, on trouve avec les tableaux précédents sa température ; puis, à l'aide de la formule

$$s = s' \times \frac{1 + 0{,}00375 \cdot n'}{1 + 0{,}00375 \cdot n} \times \frac{p}{p'},$$

on détermine sa densité. On sait par expérience qu'à 0° de température, et sous la pression atmosphérique qui est de $1^k{,}033$, le mètre cube de vapeur pèse $0^k{,}81$. Si donc on fait $n' = 0$, $p' = 1^k{,}033$, et $s' = 0^k{,}81$, on aura,

$$s = \frac{0{,}81p}{(1 + 0{,}00375 \cdot n)\ 1{,}033} = \frac{0{,}7841}{1 + 0{,}00375 \cdot n} \times p.$$

Ordinairement, on connaît le nombre d'atmosphères qui mesure la tension de la vapeur, c'est-à-dire le rapport de p à p', et on aura alors recours à cette expression fort simple

$$s = \frac{0{,}81}{1 + 0{,}00375 \cdot n} \times \frac{p}{p'}.$$

Que, par exemple, la tension de la vapeur soit de quatre atmosphères ; le tableau indique que la température correspondante est de 145°,4. Nous ferons, par conséquent,

$$n = 145{,}4; \quad 1 + 0{,}00375 \cdot n = 1{,}55, \quad \text{et} \quad \frac{p}{p'} = 4;$$

et on trouvera

$$s = \frac{0{,}81}{1{,}55} \times 4 = 2^k{,}09;$$

ce qui indique que la densité de la vapeur à quatre atmosphères est de $2^k{,}09$.

On aurait pu arriver à un résultat semblable, si, au lieu de la densité correspondante à zéro de température, on fût parti de celle de la vapeur qui se forme à l'eau bouillante, c'est-à-dire sous 100° et sous une pression de $1^k{,}033$. On ferait alors $n' = 100°$ et $p' = 1^k{,}033$ dans la formule générale. Quant à s', l'expérience apprend que la densité de la vapeur à 100° est de $0^k{,}58955$, c'est-à-dire $\frac{1}{1697}$ de celle de l'eau, ou qu'un mètre cube d'eau peut former environ 1700 mètres cubes de vapeur à 100°.

Toutes les fois que la température de la vapeur saturée viendra à augmenter, sans que de nouvelle vapeur se forme, la tension augmentera aussi sans précipitation. Cette tension décroîtra, au contraire, dans le sens où le volume s'agrandirait dans les mêmes circonstances. Dans l'un et dans l'autre cas on admettra que la tension de la vapeur se comportera de la même manière que pour les gaz permanents; en un mot, la vapeur leur est comparable toutes les fois qu'il n'y a ni précipité ni nouvelle vapeur formée, et sa tension suit absolument les lois de Mariotte et de Gay-Lussac.

177. *Quantité de chaleur absolue développée par les différents combustibles. Effets des foyers.* — Les physiciens ont fait des expériences pour déterminer la quantité *absolue* de chaleur des divers combustibles. Par *quantité absolue de chaleur,* on entend celle qui serait accusée au calorimètre; cette quantité est, par conséquent, proportionnelle au poids de la glace à 0° fondue par des poids constants de combustible; et, comme pour fondre un kilogramme de glace à 0°, il faut, d'un autre côté, un kilogramme d'eau à 75°, on voit qu'en prenant pour unité la chaleur nécessaire pour élever un kilogramme d'eau de 0° à la température d'un degré, il sera facile de déterminer le nombre d'unités de chaleur que fournit chaque combustible; ce sera le produit d'un nombre de kilogrammes de glace fondue multiplié par 75. M. Clément, qui nomme *calorie* cette unité de chaleur, a établi la table suivante :

Un kilogramme	d'Hydrogène fournit . .	22125	unités.	
»	Charbon de bois sec. .	7050	»	N'importe le bois.
»	» ordinaire .	6000	»	Contient $\frac{1}{4}$ de son poids d'eau ou d'humidité.
»	Coke pur	7050	»	
»	Houille à $\frac{1}{15}$ de cendre.	6545	»	
»	» à $\frac{1}{25}$ de cendre.	7050	»	
»	» à $\frac{1}{2}$ de cendre.	5932	»	
»	Bois séché au feu. . .	5666	»	N'importe le bois.
»	» à l'air. . .	2945	»	Moitié environ du charbon et de la houille.
»	Tourbe (la meilleure).	3000	»	
»	» de qualité inférieure . .	2000	»	

Ce tableau montre, par exemple, qu'un kilogramme de charbon

de bois sec est capable d'élever d'un degré la température de 7050 kilogr. d'eau, ou, ce qui est la même chose, d'élever à 7050° un kilogramme d'eau pris à zéro. D'après cela, on sera à même de calculer le poids d'une espèce déterminée de combustible qui serait capable d'élever à une température donnée un poids donné d'eau. On remarquera, d'ailleurs, qu'à poids égal,

1° Les bois donnent en général la même quantité de chaleur, quelle que soit leur espèce : charme, saule, chêne, etc.; ce qui tient à ce qu'ils renferment la même proportion d'eau et de charbon;

2° Que les bois ne donnent que moitié environ de la quantité de chaleur des charbons;

3° Que la bonne houille, le coke et le charbon de bois donnent à peu près la même quantité de chaleur.

Les résultats qui précèdent ne peuvent être obtenus en pratique. Dans les foyers ordinaires les mieux construits, on compte seulement sur les deux tiers des résultats ci-dessus, et sur la moitié dans les cas des foyers de chaudières à vapeur, parce que, dans ce dernier cas, l'enveloppe du foyer se refroidit, ou perd sans cesse de la chaleur, et que la fumée en enlève elle-même. Les briques ordinaires, le charbon pilé peu carburé, l'air, ont la propriété d'être mauvais conducteurs ou de retenir la chaleur dans le foyer; mais ils en laissent toujours passer un peu. On a, de plus, observé qu'un kilogramme de charbon exige, pour être brûlé, dix mètres cubes d'air atmosphérique à la température et à la pression moyennes, mais qu'en pratique il faut compter sur vingt mètres cubes, et même sur trente, pour que la combustion soit complète; que le volume des gaz, qui sont les résidus de la combustion, reste le même que celui de l'air fourni, à la différence près apportée par la température de la cheminée; qu'enfin la chaleur développée par les combustibles est la même dans une combustion lente que dans une combustion rapide. Il résulte aussi des expériences de MM. Clément et Desormes, que la capacité de l'air pour la chaleur est 0,25 de celle de l'eau; ainsi, l'unité de chaleur pourra élever 4 kilogr. d'air d'un degré, ou un kilogramme d'air de 4 degrés. Ces données supposent qu'à poids constants, les capacités de l'air et de l'eau, pour le calorique, restent les mêmes dans les divers degrés de température; ce qui est sensiblement vrai.

178. *Quantité de chaleur contenue dans un poids donné de vapeur*

à une certaine température. — M. Clément, en France, Southern et autres, en Angleterre, ont reconnu qu'un kilogramme de vapeur d'eau à 100° et sous la pression atmosphérique, est susceptible de lever à 100° la température de 5^k,50 d'eau à 0°. Le mélange contenant à 5^k,50 un kilogramme d'eau, cela fait 6^k,50 à 100°, ou 650 calories contenues dans un kilogramme de vapeur à 100°. Si la vapeur était à 120°, elle contiendrait par kilogramme . . . . . 550 + 120 = 670 calories, et en général 550 + n, n étant la température de la vapeur à saturation. Donc, si le poids total de vapeur est égal à $\tilde{u}$, le nombre d'unités de chaleur contenues sera $\tilde{u}$ (550 + n).

179. *Poids de l'eau froide pour condenser la vapeur.* — Ces principes nous permettent de calculer l'eau froide nécessaire pour abaisser la température d'un kilogramme de la vapeur à un degré donné. Soit, en effet, n'' la température de cette eau froide, $\tilde{u}'$ son poids, n' la température à laquelle on veut que soit abaissée celle du kilogramme de vapeur qui, dans son état actuel de saturation, se trouve à la température n degrés. Ce kilogramme de vapeur contient 550 + n, et l'eau d'injection en contient $\tilde{u}'n''$. Ainsi, le mélange en contiendra 550 + n + $\tilde{u}'n''$. Mais le poids du mélange est 1^k + $\tilde{u}'$, et il est de plus à la température n', ou bien enfin il contiendra (1 + $\tilde{u}'$) n' unités de chaleur. On aura donc

$$(1 + \tilde{u}') n' = 550 + n + \tilde{u}'n'',$$

et, par suite,
$$\tilde{u}' = \frac{550 + n - n'}{n' - n''}.$$

Tel sera le poids d'eau froide d'injection pour condenser un kilogramme de vapeur, et si le poids total de cette dernière est encore $\tilde{u}$, le poids d'eau froide pour la condenser sera $\tilde{u} \times \frac{550 + n - n'}{n' - n''}$.

Que, par exemple, la vapeur à condenser soit de 140° de température, que la température de l'eau froide soit de 12°, et que celle du mélange doive être de 40°, ainsi que cela a lieu ordinairement dans les condensateurs, on fera, dans les formules précédentes, n = 140°, n' = 40°, et n'' = 12°, ce qui donne

$$\tilde{u}' = \frac{550 + n - n'}{n' - n''} = \frac{650}{28} = 23^k,22,$$

et qui nous apprend que, pour condenser un kilogramme de vapeur de 140° de température, il faut 23^{k},22 d'eau froide à 12°, ou qu'en général une telle vapeur, pour être condensée convenablement, exige 23,22 fois son propre poids en eau froide.

180. *Poids du combustible pour former une certaine quantité de vapeur donnée.* — On peut aisément calculer aussi le nombre d'unités de chaleur à dépenser pour réduire en vapeur un poids ϖ de liquide dont la température n' est donnée. Car si n est la température que la vapeur doit obtenir, il est évident que le liquide contient déjà $\varpi n'$ calories, et que la vapeur devra en posséder ϖ (550 + n) : donc, il faudra seulement en dépenser ou lui en fournir ϖ (550 + n − n'). D'après cela, on déduit le poids du charbon nécessaire pour former la vapeur dans les chaudières des machines. Car, par exemple, un kilogramme de houille donnant environ 7050 calories sans perte (3^{e} partie, 177), ou . . . . . $\frac{1}{2}$ 7050 = 3500 environ, avec les pertes dues au foyer, à la cheminée, etc., le poids ϖ ci-dessus de vapeur exigera évidemment

$$\varpi \frac{(\,550 + n - n'\,)}{3500} \text{ kilogr. de houille.}$$

Réciproquement, si on veut trouver le poids de vapeur à la température n que peut former un kilogramme de houille, il suffira de diviser le poids ϖ précédent de vapeur, par le nombre . . . . . $\varpi \frac{(\,550 + n - n'\,)}{3500}$ de kilogrammes de houille qui peuvent le former, en sorte qu'un kilogramme de houille fournira . . . . $\frac{3500}{550 + n - n'}$ kilogr. de vapeur.

Comme il est toujours possible d'évaluer dans les machines le volume de vapeur introduit dans un temps déterminé, d'après le nombre des coups de piston et d'après le volume de course du piston, on peut déduire encore la quantité de combustible d'après ce volume. Car la densité π de cette vapeur s'obtient (3^{e} partie, 176) au moyen de la formule

$$\pi = \frac{0,81}{1 + 0,00375 \,.\, n} \times \frac{p}{1^{k},033},$$

et si a est le volume de la vapeur que doit fournir la quantité cherchée de combustible, on aura $\varpi = \pi a$. Donc, le poids du combustible employé à la formation du volume a de vapeur sera également

$$\pi \cdot \frac{a\,(550 + n - n')}{3500}.$$

Si la machine est bien organisée, elle ne dépensera pas plus de combustible; si elle en dépense davantage, ce sera un signe que le foyer est mal disposé, ou qu'il y a des fuites dans le cylindre, etc.

181. *Plus grand travail d'un kilogramme de combustible, et sa comparaison avec le travail obtenu dans la pratique.* — Nous sommes maintenant en état de trouver intégralement le travail d'un kilogramme de combustible, en ne supposant aucune perte. Car, si le cylindre du corps de pompe reste échauffé, si la température de la vapeur ne baisse pas, non-seulement il n'y aura pas de précipité, mais encore la détente s'effectuera, comme pour l'air, d'après la loi de Mariotte, et le calcul du travail s'opérera, comme on va le voir, avec facilité. Nous avons vu que, pratiquement, un kilogramme de houille donnait $\frac{3500}{550 + n - n'}$ kilogr. de vapeur, et que, théoriquement, il pourrait en fournir $\frac{7050}{550 + n - n'}$; si nous divisons ce dernier poids par la densité π de la vapeur, c'est-à-dire par le poids d'un mètre cube, il est évident que le quotient . . . . . $\frac{7050}{\pi\,(550 + n - n')}$ représentera le volume b de la vapeur à n degrés centigrades formée par un kilogramme de charbon. Désignons d'ailleurs par p la tension de la vapeur correspondante à la température n et donnée par la table du n° 175. Or, la recherche du travail que peut produire un kilogramme de charbon revient à celle du travail que peut produire le volume b de la vapeur dont p est la tension, n la température, pendant qu'elle se détend le plus possible, ou qu'elle prend un volume dix fois, cent fois plus grand que son volume primitif. J'appelle k le travail que fournit un mètre cube de vapeur sous la pression atmosphérique, ou de $1^k,033$ par centimètre carré, dont le volume se détend de la même manière

que le volume b de la vapeur dont la tension est p. Ce travail k se trouve immédiatement donné au moyen de la table du § 196 du Cours de la première année. Pour avoir celui du volume b de vapeur qu'on considère, on se rappellera que les quantités de travail de la même détente de deux gaz dont les volumes primitifs et les tensions sont différentes, sont entre elles, § 186 du Cours de la première année, comme les produits de ces tensions et de ces volumes. Désignant donc par x le travail cherché, on aura

$$x : k :: b \times p : 1^{\text{m cub}} \times 1{,}033;$$

d'où on tire $$x = k \times b \times \frac{p}{1^{k},033}.$$

Tel sera, par conséquent, le travail d'un kilogramme de charbon pour une certaine détente déterminée. Il nous reste, cependant, à modifier cette expression, en remplaçant la valeur de b par $\frac{7050}{\pi(550 + n - n')}$; ce qui donne

$$x = \frac{7050 \times k}{(550 + n - n')\pi} \times \frac{p}{1^{k},033}.$$

Mais observons que la densité π de la vapeur (3e partie, 176) est égale à $\frac{0{,}81}{1 + 0{,}00375 \cdot n} \times \frac{p}{1^{k},033}$. D'où on tire

$$\frac{p}{\pi \times 1^{k},033} = \frac{1 + 0{,}00375 \cdot n}{0{,}81};$$

en sorte que la valeur du travail produit par un kilogramme de charbon devient

$$x = \frac{7050\,(1 + 0{,}00375 \cdot n)}{0{,}81\,(550 + n - n')} \times k.$$

Cette expression, dans laquelle k ne dépend que du rapport du volume primitif au volume de la détente, et où la tension p de la vapeur n'entre plus, prouve qu'il n'y a pas un très-grand avantage à augmenter la tension p dans la chaudière, si la détente reste la même. Car si le numérateur $1 + 0{,}00375 \cdot n$ augmente un peu, attendu que la température n croît avec la pression, le dénomina-

teur $550 + \pi - \pi'$ augmente très-rapidement. C'est donc bien à tort que certaines personnes espèrent obtenir un très-grand travail de la vapeur à haute pression ; elles ne font pas attention que la dépense de vapeur en poids augmente proportionnellement à la quantité de calorique ou de combustible. D'ailleurs, les foyers perdent plus de chaleur; les fuites sont plus abondantes autour des pistons, de sorte que passé quatre atmosphères l'avantage est presque nul. Pour appliquer la formule précédente, nous supposerons que le charbon doive former de la vapeur dont la tension soit de quatre atmosphères ; que l'eau qui la produit soit d'ailleurs de 40°, comme celle qui provient du condensateur, et que la détente de la vapeur soit poussée à dix fois son volume primitif. Une tension de quatre atmosphères, d'après le tableau du n° 175, correspond à une température de 145°,4 ; d'où $\pi = 145,4$. La température de l'eau ou $\pi' = 40°$. Quant à la valeur de k, elle représente ici le travail de la détente d'un mètre cube de vapeur sous une pression atmosphérique qui prend dix fois son volume primitif, et d'après le tableau du § 196 du Cours de la 1re année, on aura $k = 34116^{k \cdot m}$. Faisant ces substitutions dans la formule

$$x = \frac{7050\,(1 + 0,00375\,.\,\pi)}{0,81\,(550 + \pi - \pi')} \times k,$$

$$x = \frac{7050(1 + 0,00375\,.\,145°,4}{0,81\,(550 + 145,4 - 40)} \times 34116^{k \cdot m}$$

$$= 7050\,.\,\frac{1,55}{530,87}\,.\,34116 = 7050 \times 0,0029 \times 34116^{k \cdot m}$$

$$= 20,45 \times 34116 = 697672^{k \cdot m}.$$

Ainsi, un kilogramme de houille serait capable de produire un travail de $697672^{k \cdot m}$; et cependant les meilleures machines de Woolf, travaillant à quatre atmosphères et où la détente est de quatre fois le volume primitif, ne donnent qu'un cheval-vapeur pour $2^k,50$ de houille brûlée par heure, c'est-à-dire . . . . . $3600'' \times 75^{k \cdot m} = 270000^{k \cdot m}$. Donc, dans ces machines un kilogramme de houille fournira un travail égal à

$$\frac{270000}{2,5} = \frac{540000}{5} = 108000^{k \cdot m}.$$

Ce n'est pas le sixième de la quantité ci-dessus. Ce même résultat ne serait pas le dixième du travail théorique du charbon dans le cas où on aurait supposé la détente prolongée jusqu'à $0^k,014$ de pression seulement. Mais on ne doit nullement s'étonner de ces différences. La détente n'a lieu qu'à quatre fois dans les machines de Woolf, parce que les frottements du piston rendent une trop grande détente nuisible pour l'effet utile (Cours de la 1re année, § 195). Le vide parfait n'existe pas dans le condensateur, il y reste toujours de l'eau à une température d'au moins 40° qui sature l'espace en avant du piston, d'une vapeur dont la tension est de $0^k,071$. A cette tension l'air contenu dans l'eau de condensation ajoute souvent une pression de $0^k,05$ et même davantage. La pression totale qui provient du condensateur est donc de $0^k,12$ environ par centimètre carré, et occasionne une perte de travail contre le piston. Enfin, les résistances, les frottements, les fuites, etc., absorbent souvent plus de moitié du travail restant. C'est ce qu'il est facile de reconnaître en faisant le calcul précédent du travail que produit un kilogramme de charbon pour 3 atmosphères et demie de tension et en tenant compte de la perte due au condenseur, on trouve effectivement environ le double de 108000^k.

Nous avons dit, à l'occasion des machines à colonne d'eau, comment il est possible de calculer les frottements des pistons qui, parmi toutes les résistances, sont celles qui exercent sur les machines à mouvement alternatif le plus d'influence. On peut juger d'après cela, que les machines puissantes, dont les pistons ont une grande surface et qui travaillent sous les mêmes conditions que les petites machines, doivent éprouver moins de déchet de travail proportionnellement que ces dernières. Nous n'insisterons pas sur cet objet, non plus que sur la manière d'estimer le travail pour une machine donnée et le déchet qu'elle éprouve ; nous renverrons au Cours de la 1re année, pages 167 — 186.

182. *Proportions des chaudières, foyers, grilles, cheminées, etc.* — Après ces différentes considérations théoriques sur la constitution de la vapeur et sur le travail absolu de son combustible, nous allons passer aux conditions mêmes de l'établissement des machines que la vapeur fait mouvoir.

Chaudières et foyers. — Déjà nous avons donné (3e partie, 170) la disposition des chaudières, ainsi que celle du foyer, et des cir-

cuits de la flamme et de la fumée. Nous avons dit que la chaudière devait être remplie d'eau jusqu'au-dessus de ces conduits, et que le vide pour la vapeur devait être au moins (3e partie, 173) trois fois le volume du cylindre qui reçoit immédiatement de la chaudière la vapeur *en plein*; mais, dans la pratique, on donne à ce vide jusqu'à dix fois et quinze fois ce volume, afin d'éviter les variations de tension dans la chaudière. Il nous reste encore beaucoup de choses à dire sur la proportion des chaudières et foyers.

Surface de chauffe. — Le liquide ne s'échauffe que par l'intermédiaire des parois qui sont exposées directement à l'action du foyer ou de la flamme. La surface de ces parois exposée immédiatement à la flamme se nomme *surface de chauffe*. Elle est à peu près la moitié de la surface totale de la chaudière dans les chaudières à tombeau de Watt, et un peu plus forte dans celles de Woolf avec bouilleurs. La quantité de chaleur transmise dans un temps donné et à surface égale de chauffe dépend de la conductibilité de la matière de l'enveloppe et de son épaisseur. C'est pourquoi les chaudières épaisses en fonte de ce dernier système exigent plus de surface de chauffe que celles de tôle du premier.

D'après M. Clément, une chaudière en fonte avec bouilleurs laisse passer, par mètre carré de surface de chauffe, 20 000 à 25 000 unités de chaleur par heure. Or, un kilogramme de vapeur exige un peu plus de 650 unités (3e partie, 178) de chaleur; ainsi, un mètre carré de surface de chauffe fournira $\frac{20000}{650}$, ou $\frac{2500}{65}$, ou 30 à 38 kilogr. de vapeur par heure. On doit compter au plus sur 30 kilogr. Dans les chaudières en tôle de Watt, on compte sur environ 36 kilogr. de vapeur par mètre carré et par heure.

Grille, cheminée, cendrier. — Selon M. Clément, on ne doit pas charger la grille du foyer de plus de 6 centimètres d'épaisseur de combustible. Pour brûler 20 kilogr. de houille par heure, il faut une surface de grille de cinq pieds carrés, ou $0^{m\,car}$,50 (*). Les parois du foyer et celles du fond de la première conduite de la fumée ne doivent pas être levées de plus de 0^m,10 au-dessus de la grille. On évalue la surface des vides de la grille du quart au tiers de sa

(*) Suivant Tredgold, il faut environ $0^{m\,car}$,09, ou $(0^m,30)^2$, de surface de grille, pour brûler par heure 5 kilogr. de houille : ce qui s'accorde avec la taxe.

surface totale. La grille a en projection horizontale une longueur égale à peu près au tiers de la longueur de la chaudière, et une largeur égale à celle de cette dernière. La surface supérieure de cette grille se trouve à environ 50 centimètres au-dessous des bouilleurs ou du fond de la chaudière. Ordinairement, la longueur totale de la chaudière est au moins égale à trois fois sa plus grande largeur quand elle est cylindrique, et seulement deux fois et demie quand elle est à tombeau ou rectangulaire; la hauteur de celle-ci surpasse un peu sa largeur. D'où l'on voit qu'une fois la surface du fond de la chaudière fixée, on conclut celle de la grille. C'est de cette dernière qu'on déduit l'aire de la section de la cheminée ou des circuits de chaleur, laquelle doit être égale partout entre le sixième et le quart de la surface de la grille. Quand les cheminées sont fort hautes ou de 33 mètres, on peut se borner à un sixième.

La surface de section du cendrier par laquelle l'air arrive sous la grille doit, suivant Tredgold, être un peu moindre que celle de la cheminée. Enfin, Tredgold estime que la longueur utile de la surface de chauffe des circuits n'excède pas quatre fois l'aire de la grille; ce nombre est trop faible, et on peut le porter à six ou sept fois.

183. *Quantité de vapeur formée par un kilogramme de combustible dans les chaudières de Watt et de Woolf.*—Watt estimait que dans ses chaudières la combustion d'un kilogramme de bonne houille donne 6 kilogr. de vapeur. Ici la vapeur est à basse pression, ou à la température moyenne de 105°; et elle est formée avec de l'eau dont la température, égale à celle du condenseur, est de 40°. Ainsi, un kilogramme de vapeur exigerait théoriquement dans cette chaudière (3e partie, 180) $\frac{1^k \times (550 + 105° - 40°)}{7500} = 0^k,082$ de houille; partant un kilogramme de combustible donnera $\frac{1}{0,082}$, ou $12^k,2$ de vapeur. Donc, les chaudières de Watt qui sont bien disposées, ainsi que leur foyer, ne donnent pas la moitié de la chaleur intégrale : ce qui est conforme à ce qui a été déjà dit.

Selon Woolf, ses chaudières à bouilleurs en fonte pourraient fournir 8 kilogr. de vapeur pour un kilogramme de houille. Mais ce résultat est exagéré, puisqu'il y a ici les mêmes causes de perte et un peu plus de dépense théorique. La température étant environ

de 145° pour une tension de quatre atmosphères, un kilogramme de houille donnerait intégralement . . . . . .

$\frac{7500}{550 + 145 - 40} = \frac{7500}{655} = 11^{k},45$ de vapeur seulement. Réduisant toujours à moitié, on obtiendra encore 6 kilogr. de vapeur au plus.

Il n'y a qu'un bon chauffeur, ou un système de grille tournante et toutes les précautions possibles, qui puissent faire obtenir au plus les deux tiers de la quantité théorique de vapeur, c'est-à-dire 8 ou 9 kilogr. par kilogramme de houille ou de charbon de première qualité. Mais on ne doit pas compter sur un tel avantage dans l'établissement des machines à vapeur de l'industrie.

184. *Dimensions des chaudières et des foyers de Watt et de Woolf par force de cheval.* — En adoptant toutes les données ci-dessus, et en supposant que les machines de Watt à basse pression dépensent 6 kilogr. de houille par cheval-vapeur ($75^{k} \cdot ^{m}$) et par heure, 6 kilogr. de houille donneraient 6×6 ou 36 kilogr. de vapeur ; ce qui est à peu près ce que fournit dans le même temps un mètre carré de surface de chauffe. Ainsi, il faudra par cheval de force un mètre carré de surface de chauffe, $0^{m\,car},1$ à $0^{m\,car},12$ de surface de grille, $0^{m\,car},04$ à $0^{m\,car},02$ de section de cheminée et de conduits.

Pour les machines de Woolf travaillant de trois à quatre atmosphères, un cheval exige 3 kilogr. de houille par heure, qui produisent 3×6 ou 18 à 20 kilogr. de vapeur ; un mètre carré de surface de chauffe donnant par heure 30 kilogr. de vapeur, il faudra environ deux tiers de mètre carré de surface par cheval.

Pour une machine de Woolf de 20 chevaux, le gros cylindre de la chaudière a une longueur de 4 mètres, un diamètre de $1^{m},10$. L'épaisseur de la fonte de ce même cylindre est de 45 millimètres. Les deux bouilleurs ont chacun 4 mètres de longueur, 38 centimètres de diamètre, et 40 millimètres d'épaisseur. La surface de chauffe est de 12 à 14 mètres carrés, ou les deux tiers de 20.

185. *Cylindres à vapeur, des corps de pompe.* — Il est d'usage de ne donner au plus au piston moteur qu'une vitesse moyenne d'un mètre par seconde, la raison en est toute simple. Le travail développé par les frottements croît comme la vitesse, et à travail moteur

égal, il sera plus sensible pour une grande que pour une petite vitesse. S'il y a détente, comme dans les machines de Woolf, il ne faudra pas qu'elle surpasse quatre ou cinq fois le volume primitif (Cours de la 1re année, § 195). C'est par cette raison que le diamètre du plus petit piston dans ces machines sera un peu plus de moitié de celui du grand. On suppose que la vapeur ne se détende pas au-dessus du petit piston, de sorte que le volume du corps de pompe de ce dernier sera la mesure du volume de vapeur introduit à chaque coup. Connaissant le nombre de chevaux de force que doit avoir la machine, on saura que la vapeur doit développer près du double de ce travail utile à cause des résistances, d'après quoi on calculera le volume de vapeur à fournir pour la chaudière dans une seconde, puis le diamètre du piston du plus petit corps de pompe, puis celui du grand, etc.

186. *Application numérique à l'établissement d'une machine particulière à vapeur.* — Ces idées générales vont s'éclaircir par un exemple particulier. Supposons qu'il s'agisse d'établir une machine de Woolf de la force de vingt chevaux, que la détente y soit quatre fois le volume primitif a de la vapeur fournie dans une seconde, que la tension primitive dans la chaudière soit de 3,5 atmosphères.

Volume de vapeur introduit par seconde. — Il est visible que la quantité absolue de travail produite par la détente du volume a de vapeur fourni dans une seconde sera (3e partie, 181) . . . . . $a \times k \times \frac{p}{1^k,033}$, ou 3,5 . $a \times k$, expression dans laquelle k est le travail développé par un mètre cube de vapeur sous une atmosphère de pression pour une détente de quatre fois son volume ; ce travail k, d'après la table du § 196 du Cours de la 1re année, est égal à $24\,650^{k.m}$. Donc, le travail que produira le volume a de vapeur à la tension de 3,5 atmosphères pour faire mouvoir la machine sera $3,5 \times 24\,650 \times a$, ou $a \times 86275^{k.m}$. Mais ce travail est contrarié par la réaction qui provient du condenseur contre le piston du grand cylindre. Nous avons vu (3e partie, 181) que cette réaction était produite, 1° par la tension de la vapeur qui dans le condenseur est de $0^k,07$ par centimètre carré ; 2° par la pression de l'air contenu dans l'eau de condensation, pression évaluée à $0^k,05$ ou même davantage, de sorte que la réaction totale

est moyennement de $0^k,12$ par centimètre carré de surface, c'est-à-dire enfin de 1200 kilogr. par mètre carré. La pression totale contre la face du grand piston en communication avec le condensateur sera égale au produit de sa surface multipliée par 1200 kilogr. Quant à la quantité de travail qu'elle absorbe dans une seconde, ce sera le produit de 1200 kilogr. multiplié par la surface du grand piston et par son chemin dans une seconde; ou bien encore ce sera le produit de 1200 kilogr. multiplié par le volume que parcourt le grand piston dans une seconde, volume qui est quadruple de la même course pour le petit piston ou qui est égal à $4a$. Donc le travail résultant produit par la vapeur dans une seconde sera, en définitive,

$$(a \times 86275) - (1200 \times 4 \,.\, a) = a\,(86275 - 4 \,.\, 1200)$$
$$= a\,(86275 - 4800) = a \,.\, 81475^{k.m}.$$

Ce travail devant être double du travail utile de la machine, qui est de 20 chevaux ou de $20 \times 75^{k.m}$ par seconde, ou de $1500^{k.m}$, on aura

$$a \,.\, 81475 = 2 \,.\, 1500, \quad \text{ou} \quad a \times 81475 = 3000;$$

d'où on tire $$a = \frac{3000}{81475} = 0^{m\,cub},0368.$$

Tel sera le volume de vapeur introduit par seconde sous le piston.

Rayons du petit et du grand piston. — Nous savons que la vitesse du petit piston égale au plus 1^m, ou $0^m,9$; c'est le chemin décrit en une seconde. Si r est le rayon du petit piston, πr^2 sera sa surface. Le volume cylindrique qu'il décrira dans une seconde est au plus $0,9\pi r^2$; d'ailleurs, comme les soupapes ne s'ouvrent point ou ne se ferment point instantanément, et qu'il y a un peu de fuite de vapeur, on fera bien de supposer le volume de vapeur introduit par seconde moindre que la course cylindrique précédente, et de le réduire à $0,8 \,.\, \pi r^2$. Donc, on aura

$$0^{m\,cub},0368 = 0,8 \times 3,1416 \,.\, r^2 = 2,512 \,.\, r^2;$$

d'où $$r^2 = \frac{0,0368}{2,512} = 0,01465,$$

et $$r = \sqrt{0,01465} = 0^m,121.$$

Le diamètre du petit piston sera, par conséquent, de $0^m,242$, et, comme celui du grand doit être réglé de façon que la détente soit de $\frac{1}{4}$, ce dernier aura, par conséquent, un diamètre double, savoir, $0^m,484$.

Course du petit piston. — Cette course dépendra du nombre des oscillations du volant. Supposons que ces oscillations soient de 28 par minute, et nommons c l'amplitude d'une course à raison de 2 par oscillation. Puisque la vitesse est de 1^m par seconde, on aura

$$\frac{28 \times 2c}{60} = 1^m;$$

d'où

$$c = \frac{60^m}{56} = \frac{15}{14} = 1^m,07.$$

Poids de vapeur fourni par seconde. — Nous avons vu que le poids de vapeur fourni par la chaudière au petit piston dans une seconde était de $0^{m\,cub},0368$. Pour en conclure le poids, il faudra multiplier ce volume par la densité π qui, d'après le n° 176, est égal à

$$\frac{0,81}{1 + 0,00375 \,.\, \pi} \times \frac{p}{1^k,033} = \frac{0,81}{1 + 0,00375 \,.\, \pi} \times 3,5.$$

Or, la table du n° 175 nous apprend que la température π de la vapeur à 3,5 atmosphères de tension est de 140°,6. La densité précédente devient

$$\frac{0,81 \times 3,5}{1 + 0,00375 \,.\, 140,6} = \frac{2,84}{1,53} = 1^k,85.$$

Partant, le poids de vapeur fourni au petit piston dans une seconde sera le produit $1,85 \times 0,0368 = 0^k,0681$.

Poids d'eau d'injection par seconde. — Ce poids se calcule au moyen de la formule du n° 179, qui nous apprend que pour condenser de la vapeur de 140° de température avec de l'eau à 12° et pour ramener le mélange à la température de 40°, il faut que le poids de l'eau d'injection soit de 23,22 fois le poids de la vapeur. Or ce dernier a été trouvé de $0^k,0681$. Ainsi, le poids d'eau d'injection par seconde sera $23,22 \times 0^k,0681$, ou $1^k,58$.

Dimensions de la pompe à air. — La pompe à air doit élever par seconde le mélange de vapeur et d'eau, c'est-à-dire $1^k,58$, $0^k,0681$,

ou $1^k,65$. Comme cette pompe est simplement aspirante et qu'elle donne 28 coups par minute, elle enlèvera un poids d'eau, par coup, égal à $\frac{60 \times 1,65}{28} = \frac{99}{28} = 3^k,54$. D'ailleurs, un kilogramme d'eau équivaut à la capacité d'un litre. Tel devrait être le volume de la course du piston de la pompe à air ; ou bien encore il sera représenté par $0^{m\,cub},0035$. L'amplitude de l'oscillation du piston est réglé par la position du point de suspension de la tige sur le balancier. En admettant que cette oscillation soit de $0^m,50$, la surface du piston sera $\frac{0^{m\,cub},0035}{0^m,50} = 0^{m\,car},007$. Son rayon r' sera donné par la formule $\pi r'^2 = 0,007$, et sera encore de 4 centimè.,7. Mais comme cette pompe doit aussi enlever l'air qui arrive avec la vapeur, on donnera à son piston un plus grand rayon.

Dimensions du condenseur. — Le condenseur ne doit pas seulement contenir l'eau d'injection et l'eau de condensation de la vapeur qui arrivent à chaque oscillation, il faut encore qu'il soit suffisamment étendu pour que l'air contenu dans l'une et l'autre s'y dilate de façon que sa tension n'y soit pas très-considérable. Car cette tension s'ajoute à celle de la vapeur qui correspond à la température 40° du condenseur pour contrarier le mouvement du piston moteur. Nous supposerons, comme nous l'avons déjà dit (3e partie, 181, et précédemment), que la tension de cet air dilaté doive être dans le condenseur de $0^k,05$ par centimètre carré de surface, et nous rappellerons en outre que de l'eau à l'extérieur ou à l'air libre contient toujours un volume d'air égal au vingtième du sien propre, sous une tension de $1^k,033$. Cela posé, nous avons vu que la somme des quantités de vapeur et d'eau d'injection qui arrivaient à chaque oscillation était égale à $3^k,54$, ou que le volume en était de $3^{li},54$, qui, étant supposés venir du dehors, contiendront en air ordinaire $\frac{1}{20} \times 3^{li},54$, ou $\frac{3^{li},54}{20}$, ou enfin $0^{li},16$. Ce volume d'air venant du dehors est censé être à la tension de $1^k,033$ et à la température de 12° ; et en arrivant dans le condenseur il doit à la fois passer à la température de 40° et réduire sa tension à $0^k,05$.

D'après cela, nous pouvons conclure le volume de cet air dans le condenseur. Si nous faisons d'abord abstraction du changement de température, il est évident que, sous la pression de $0^k,05$, l'air en question devra occuper dans le condenseur un volume de

$0^{li},16 \times \frac{1^k,032}{0,05} = 0,16 \times 20,6 = 3^{li},30$. Mais, comme la température s'élève de 12° à 40° dans le condenseur, l'espace de l'air contenu dans le mélange de l'eau d'injection et de la vapeur s'augmentera dans le rapport de $1 + 0,00375 . 12$, ou 1,045, à $1 + 0,00375 . 40$, ou 1,15, c'est-à-dire dans le rapport environ de 1 à 1,1. Donc, l'espace occupé par l'air dans le condenseur $= 3,30 \times 1,1 = 3,63$, ou est égal à peu près au volume 3,54 de l'eau mélangée. Enfin, puisqu'il est nécessaire que la pompe à air puisse vider à chaque coup au moins la capacité du réservoir, on voit que le volume cylindrique de la course de la pompe à air devra être le même que celui du réservoir ou condenseur, et, par conséquent, être double de la quantité d'eau mélangée que cette pompe doit élever dans un coup. Donc, le rayon du piston de cette pompe, au lieu de 4 centimè.,7 comme nous l'avons trouvé tout à l'heure, doit être de 9 centimè.,4.

Pompe à eau froide et pompe alimentaire. — La pompe à eau froide doit se calculer de manière qu'elle fournisse par seconde $1^k,58$ d'eau, ou $\frac{60 \times 1,58}{28} = 3^{li},37$, par coup si elle est à simple effet, ou seulement $1^{li},69$ si elle est à double effet. Le volume cylindrique de la course doit être augmenté de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{15}$, à cause des pertes et fuites.

Quant à la pompe alimentaire, prenant une partie de l'eau de la pompe à air à 40° pour la faire passer dans la chaudière, elle devra enlever $0^k,0681$ d'eau par seconde, ou $\frac{60 \times 0,07}{28}$, ou $\frac{4,2}{28}$, ou $0^{li},15$, à chaque coup, puisqu'elle est à simple effet.

Travail des diverses pompes. — Si l'on veut évaluer le travail de ces pompes, on prendra, pour tenir compte des frottements, les quatre tiers du produit de l'eau qu'elles élèvent par seconde, et de la hauteur à laquelle cette eau est élevée. Cette hauteur, pour la pompe d'injection, est celle du dégorgeoir au-dessus du niveau du puisard dont l'eau est extraite. Pour la pompe alimentaire, cette hauteur est due à la différence des pressions dans la chaudière et à l'extérieur, c'est-à-dire ici à $3^{atm},5 - 1$, ou $2^{atm},5$; en un mot, cette hauteur sera $2,5 \times 10^m,33$, ou $25^m,83$.

Enfin, on remarquera que, pour la pompe à air, le piston est pressé de haut en bas par une pression atmosphérique ou par une

pression de $1^k,033$, et de bas en haut par une pression intérieure de $0^k,12$, de sorte que la pression résultante est de $0^k,913$, qui équivaut à une hauteur de $9^m,13$. L'eau est, en outre, élevée dans la bâche, qui n'est pas à plus d'un mètre de hauteur, de sorte que 10 mètres représenteront la hauteur à laquelle l'eau est élevée par la pompe à air.

187. *Diamètres des conduits de vapeur et des soupapes.* — Il nous reste à calculer le diamètre de conduite de la vapeur, et des orifices des soupapes. Ordinairement on dit que les tuyaux de la vapeur n'ont pas besoin d'un grand diamètre, parce que la vapeur tend à prendre une grande vitesse, et on a assigné, par exemple, un à deux centimètres de diamètre au tuyau qui conduit la vapeur sur une machine de huit chevaux ; mais cela est fautif. Car la vapeur ne chemine dans les conduits et orifices qu'en vertu de la différence des tensions aux extrémités. Par exemple, dans le passage de la chaudière aux cylindres, cette différence ne peut pas excéder sans inconvénient le vingtième de la tension dans la chaudière. Elle est ainsi pour une machine de Woolf de $0^{atm},175$, et elle répond à une hauteur de colonne de vapeur facile à calculer, et qui donnera la vitesse avec laquelle la vapeur s'échappe de la chaudière ; d'après quoi, connaissant la dépense, on conclura le diamètre du tuyau. On remarquera, en outre, que la vapeur, en arrivant sous le piston, perd toute la force vive qu'elle a acquise par la différence de tension dans la chaudière et le cylindre. D'où l'on doit l'avantage de diminuer cette différence le plus possible en agrandissant les tuyaux. Cette détermination des tuyaux repose tout à fait sur les principes exposés relativement à l'écoulement des gaz.

XXII.

DES MOTEURS ANIMÉS.

188. *Définition du travail mécanique des moteurs animés.* — Les moteurs animés diffèrent des moteurs uniquement soumis aux lois

de la physique, en ce qu'ils ne peuvent agir d'une manière continue, qu'ils sont susceptibles de se fatiguer au bout d'un certain temps de travail, et forcés de prendre un repos plus ou moins long. La quantité de travail mécanique qu'ils peuvent livrer journellement varie suivant le mode de leur emploi et selon les circonstances; mais elle est, dans chaque cas, susceptible d'un *maximum* comme pour les autres moteurs à égalité de *fatigue journalière;* en un mot il existe une vitesse du point d'application, un effort et une durée de travail qui sont les plus convenables pour l'effet utile (Cours de la 1re année, § 148).

Nommons, en général, V la vitesse moyenne en mètres du point d'application du moteur, ou le chemin censé décrit uniformément dans chaque seconde, P l'effort moyen en kilogrammes qu'il exerce et estimé dans le sens de ce chemin, enfin T la durée totale en secondes de l'action journalière, qui peut être ou continue, ou coupée par des repos plus ou moins fréquents nommés *relais* ou *haltes*, dont la durée n'est pas comprise dans T. La quantité de travail mécanique développée par le moteur aura évidemment pour mesure le produit $PVT^{k} \cdot ^{m}$. A cet égard il est nécessaire de rappeler que, d'après les principes jusqu'ici exposés, le travail mécanique peut se mesurer en un point quelconque de la transmission du mouvement, pourvu que l'effort soit estimé dans le sens de ce mouvement ou que le chemin décrit soit estimé dans le sens de l'effort, et pourvu encore que le travail des résistances passives entre le point où on estime le travail et celui où le moteur opère réellement, puisse être négligé vis-à-vis du premier, ainsi qu'il arrive dans beaucoup de circonstances.

189. *Conditions pour lesquelles ce travail est le plus avantageux.* — Cela posé, le produit $PVT^{k} \cdot ^{m}$, qu'on nomme *quantité de travail journalière*, est, comme nous l'avons dit, susceptible d'un *maximum* à égalité de fatigue journalière, en donnant à P, à V et à T des valeurs qu'une longue expérience indique comme convenables. Dans aucun cas on ne peut faire travailler le moteur sous un effort et une vitesse qui excèdent les limites données également par l'expérience, et il n'est pas non plus possible d'augmenter la durée T du travail journalier au delà d'un certain terme, quelque faible que soit d'ailleurs le travail PV, livré dans chaque seconde. Cette durée limite paraît être de dix-huit heures au plus par jour, ou

environ le double de la durée ordinaire et la plus avantageuse du travail.

Quant à la limite de l'effort, il varie entre le triple et le quintuple de l'effort qui convient au *maximum* d'effet, selon les circonstances ou la durée plus ou moins prolongée de cet effort. Enfin, la vitesse limite paraît varier aussi en raison de la durée totale du mouvement, et être comprise entre quatre fois et dix fois la vitesse la plus convenable au travail. Du reste, entre ces limites extrêmes, les moteurs animés ont la faculté de faire varier, pour ainsi dire arbitrairement, leur effort et leur vitesse, pourvu que, quand l'un augmente l'autre diminue, et que si l'un et l'autre excèdent l'effort et la vitesse les plus convenables, la durée T du travail journalier soit moindre. En effet, le produit $PV^{\alpha}T^{\beta}$, dans de telles circonstances, ne peut jamais atteindre sa valeur *maximum* sans que la fatigue journalière de l'animal ne soit augmentée, et sans que sa santé ne soit compromise si ce travail doit être renouvelé plusieurs jours de suite. Cette faculté qu'ont les animaux de pouvoir accroître jusqu'à un certain point la quantité de travail PV qu'ils livrent dans chaque seconde, est souvent précieuse dans l'industrie manufacturière. Mais il ne faut pas oublier que la durée entière du travail doit être coupée par de fréquents repos, et qu'enfin l'effet utile journalier PVT, qu'on pourra espérer d'un semblable emploi du moteur, sera moindre que celui qu'on obtiendrait d'un travail mieux réglé.

190. *Avantages du mode continu d'action des moteurs animés sur le mode d'action intermittente.* — Quelques auteurs il est vrai, et Coulomb entre autres, pensent que, dans certains genres de travaux, tels que celui qui consiste à battre des pieux, à sonner une cloche, etc., le mode intermittent dont il s'agit présente des avantages particuliers, et est susceptible d'un effet utile journalier plus considérable que si le moteur agissait avec plus de continuité et sous de moindres efforts ou vitesses. Mais, quoique ce mode d'opérer soit souvent nécessité par des circonstances particulières où l'on tient à accélérer le travail tout en diminuant le nombre des moteurs qui y sont à la fois appliqués, l'augmentation du travail journalier n'en paraît pas moins douteuse. Il y a tout lieu de croire, par exemple, que les hommes qui sont appliqués à une *sonnette*, en exerçant un effort de 18 kilogr., et dont le travail est inter-

rompu par de fréquents repos, développent un effet utile journalier sensiblement moindre que les *scieurs de long* qui agissent avec un effort égal au plus à 10 kilogr. M. Hubert, célèbre ingénieur de la marine, correspondant de l'Académie des sciences, a fait à l'arsenal de Rochefort des expériences très-suivies qui ont appris que les quantités de travail journalières développées par des forgerons qui frappent jusqu'à 2560 coups avec des marteaux de $7^k,065$ mus en avant, s'élevaient environ à $67\,000^{k\cdot m}$; ce qui est un peu moins que le travail du *sonneur*, parce que la vitesse imprimée au marteau est très-grande. Or, il résulte d'autres observations de M. Marestier, que le travail augmente sensiblement à mesure que le poids du marteau diminue, et il pense que le marteau des cloutiers est celui qui permet le plus de travail journalier à égalité de fatigue. C'est qu'en effet ici l'action est plus continue, et le travail par seconde moindre. On peut admettre, sans risque de se tromper, que, dans cette dernière circonstance, comme dans celle du sciage dit *de long*, le travail journalier fourni par des hommes exercés peut s'élever à $160\,000^{k\cdot m}$, ou plus du double du travail ci-dessus, sans qu'il en résulte un excès de fatigue.

191. *Valeur du travail mécanique des moteurs animés.* — Ce résultat est consigné dans le tableau ci-après, que nous avons emprunté à M. Navier (*Architecture hydraulique* de Bélidor, pages 394 et suivantes), et auquel nous avons fait plusieurs additions propres à le compléter et à en faciliter l'application dans quelques cas particuliers. Nous ferons remarquer avec M. Navier, que les données de ce tableau concernent les valeurs de la vitesse, de l'effort ou du temps qui paraissent les plus avantageux dans chaque cas spécial, et que les résultats ne doivent être regardés que comme des termes moyens qui peuvent s'écarter, en plus ou en moins, du quart au tiers du travail effectif, suivant l'âge, la vigueur des individus, leur genre de nourriture et le climat qu'ils habitent. Ces observations appartiennent d'ailleurs à divers auteurs, et notamment à Coulomb.

Il faut aussi observer que, d'après ce qui précède, on peut, sans craindre une diminution sensible de l'effet utile journalier, faire varier de quelque chose la vitesse et l'effort indiqués au tableau, pourvu que leur produit ne soit pas trop changé et que la durée journalière du travail soit établie en conséquence.

TABLEAU des quantités de travail mécanique que peuvent f

NUMÉROS D'ORDRE.	NATURE DU TRAVAIL.
	1° ÉLÉVATION VERTICALE DES POIDS.
1.	Un homme montant une rampe douce ou un escalier, fardeau, son travail consistant dans l'élévation du poi son corps. . . . .
2.	Un manœuvre élevant des poids avec une corde et une po ce qui l'oblige à faire descendre la corde à vide. .
3.	Un manœuvre élevant des poids en les soulevant av main. . . . .
4.	Un manœuvre élevant des poids et les portant sur son d haut d'une rampe douce ou d'un escalier, et revena vide. . . . .
5.	Un manœuvre élevant des matériaux avec une brouett montant une rampe au $\frac{1}{12}$, et revenant à vide. . .
6.	Un manœuvre élevant des terres à la pelle à la hau moyenne de 1m,60. . . . .
	2° ACTION SUR LES MACHINES.
	Un manœuvre agissant sur une roue à chevilles ou à bour :
1.	1° Au niveau de l'axe de la roue. . . . .
2.	2° Vers le bas de la roue, ou à 24° . . . . .
3.	Un manœuvre marchant et poussant ou tirant horizon ment. . . . .
4.	» agissant sur une manivelle. . . . .
5.	» exercé, poussant et tirant alternativement le sens vertical. . . . .
6.	Un cheval attelé à une voiture ordinaire et allant au pa
7.	» attelé à un manége et allant au pas . . .
8.	» » et allant au trot . . .
9.	Un bœuf attelé à un manége et allant au pas. . . .
10.	Un mulet » » . . . .
11.	Un âne » » . . . .

gennement l'homme et les animaux dans différentes circonstances.

DIDS ÉLEVÉ, ou PORT MOTEU exercé.	VITESSE ou CHEMIN par seconde.	TRAVAIL par SECONDE.	DURÉE du TRAVAIL journalier.	QUANTITÉ de TRAVAIL journalier.
k.	m.	k . m.	h.	k . m.
65	0,15	9,75	8	280 800
18	0,20	3,60	6	77 760
20	0,17	3,40	6	73 440
65	0,04	2,60	6	56 160
60	0,02	1,20	10	43 200
2,7	0,40	1,08	10	38 880
60	0,15	9,00	8	259 200
12	0,70	8,40	8	251 120
12	0,60	7,20	8	207 360
8	0,75	6,00	8	172 800
5	1,10	5,50	8	158 400
70	0,90	65,00	10	2 168 000
45	0,90	40,50	8	1 166 400
30	2,00	60,00	4 ½	972 400
65	0,60	39,00	8	1 123 200
30	0,90	27,00	8	777 600
14	0,80	11,60	8	334 080

XXIII.

TRANSPORT HORIZONTAL DES FARDEAUX.

192. *Différence entre le travail des transports horizontaux et le travail mécanique des moteurs.*— Des observateurs habiles, en tête desquels nous devons placer Coulomb, ont fait aussi des expériences sur ce genre de travail, qui, ainsi que nous l'avons déjà remarqué dans le Cours de la première année, § 92 et suivants, ne doit pas être confondu avec le travail mécanique véritable. L'unité qui a été adopté pour la mesure de l'utilité du transport horizontal, quoique analogue à celle du travail mécanique, en est dans le fond fort différente, puisqu'il ne s'agit pas ici d'effort exercé ou de résistance vaincue dans le sens propre du chemin parcouru. Sans aucun doute, le transport horizontal, tout au moins de la part du moteur, est un travail mécanique intérieurement développé, d'où résulte un degré plus ou moins grand de fatigue; mais comme on substitue ici, dans la mesure de l'effet utile, le poids propre du fardeau à la résistance que ce fardeau oppose au mouvement, et que cette résistance non-seulement varie dans chaque cas, mais encore peut en quelque sorte devenir aussi petite qu'on veut sans que l'effet utile soit amoindri, il est évident qu'on ne doit pas attacher la même idée à la mesure de cet effet utile et à celle du travail mécanique qui, dans certains cas, serait employé à le produire, comme, par exemple, quand le fardeau est posé sur une voiture, sur un bateau, ou quand il est simplement traîné à terre ou porté sur un traîneau.

193. *Manière d'estimer le travail du transport horizontal.* — A cela près, il est aisé de s'apercevoir que si on considère un même mode de transport, la fatigue, ou la quantité de travail effectivement développée, doit croître proportionnellement au poids du fardeau et à la distance parcourue, ou au produit du nombre de kilogrammes que pèse le fardeau, multiplié par le nombre de mètres de chemin parcouru; ce qui revient à prendre pour unité propre à mesurer l'utilité du transport, l'unité de poids transporté à l'unité de distance. Mais on remarquera que, si la circonstance du transport, ou

si seulement la viabilité de la route parcourue, ou même encore la vitesse viennent à changer, l'effet utile restant le même, le travail mécanique ou le degré de fatigue que ce transport suppose, peut être très-différent. Il en est ici à peu près comme du travail du *sonneur*, et du *scieur de long*, pour lesquels une même quantité d'ouvrage ou d'effet utile peut représenter des quantités très-variables de travail mécanique selon la nature de l'outil, la dureté de la matière, etc.

194. *Changements occasionnés dans le travail des transports horizontaux, par la différence des communications.* — A ce sujet, nous ferons observer que les transports inscrits dans le tableau suivant, et qui sont effectués avec des voitures, des brouettes, etc.; supposent des chemins d'une viabilité ordinaire, et que, pour des routes parfaitement unies, l'effet utile augmenterait à égalité de travail mécanique, comme il diminuerait par des routes en mauvais état. Voici, au reste, quelques-uns des résultats que l'expérience a fait connaître à l'égard des voitures ordinaires.

Pour un terrain horizontal ferme et uni, ou pour les chaussées pavées, la force du tirage des chevaux allant au pas est d'un vingtième ou d'un trentième de la charge totale, voiture comprise, ou moyennement d'un *vingt-cinquième*. Elle est d'un *quatorzième* de la charge pour une voiture suspendue allant au grand trot sur une chaussée pavée, c'est-à-dire que pour le pavé la traction croît avec la vitesse. Enfin, elle est le *huitième* de la charge totale pour un terrain sablonneux ou sur des cailloux nouvellement placés, soit au pas, soit au trot. Quant aux chemins en fer à ornières saillantes, l'effort du tirage varie depuis un *quatre-vingtième* jusqu'à un *centième* de la charge totale.

Nous ne parlerons pas du transport par bateaux, dont le tirage pourra toujours être apprécié d'après ce qui a été dit au § 212 de notre Cours de la première année.

TABLEAU des effets utiles que peuvent produire l'homme et en div

NUMÉROS D'ORDRE.	NATURE DU TRANSPORT.
1.	Un homme marchant sur un chemin horizontal sans fard son travail consistant dans le transport du poids de corps . . . . .
2.	Un manœuvre transportant des matériaux dans une pe charrette ou camion à deux roues, et revenant à vide. .
3.	Un manœuvre transportant des matériaux dans une broue et revenant à vide chercher de nouvelles charges. .
4.	Un homme voyageant, emportant des fardeaux sur le dos.
5.	Un manœuvre transportant des matériaux sur le dos, et venant à vide chercher de nouvelles charges. . .
6.	Un manœuvre transportant des fardeaux sur une civière revenant à vide chercher de nouvelles charges. . .
7.	Un cheval transportant des matériaux sur une charrette marchant au pas, continuellement chargé. . . . .
8.	Un cheval attelé à une voiture, et marchant au trot, co nuellement chargé . . . . .
9.	Un cheval transportant des fardeaux sur une charrette revenant à vide chercher de nouvelles charges. . . .
10.	Un cheval chargé sur le dos, et allant au pas. . . . .
11.	» » et allant au trot . . . .

FIN DU COURS

inaux, dans le transport horizontal des fardeaux, considéré rconstances.

POIDS TRANSPORTÉ.	VITESSE ou CHEMIN par seconde.	EFFET UTILE par seconde exprimé en kilogrammes TRANSPORTÉS à 1 mètre.	DURÉE de L'ACTION journalière.	EFFET UTILE par JOUR.
k.	m.	k. m.	h.	k . m.
65	1,50	97,5	10	3 510 000
100	0,50	50	10	1 800 000
60	0,50	30	10	1 080 000
40	0,75	30	7	756 000
65	0,50	32,5	6	702 000
50	0,33	16,5	10	594 000
700	1,10	770	10	27 720 000
350	2,20	770	4 $\frac{1}{2}$	12 474 000
700	0,60	420	10	15 120 000
120	1,10	132	10	4 752 000
80	2,20	176	7	4 435 000

ANIQUE INDUSTRIELLE.

RÉSUMÉ ANALYTIQUE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

I. — PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES CORPS.

N°.		Pages.
1.	États principaux des corps.	1
2.	Divisibilité des corps. — Décantation; ventilation; sublimation.	2
3.	Porosité des corps. — Volume réel, apparent; densité; poids spécifique.	4
4.	Compressibilité des corps. — Tissus; pierres; métaux; liquides; gaz.	5
5.	Élasticité des corps.	6
6.	Dilatabilité des corps. — Résultats d'expériences de 0° à 100° (centigrades). — Altérations sur les pièces des machines.	8

II. — NOTIONS SUR L'ESPACE, LE TEMPS, LE MOUVEMENT, LA VITESSE ET LA FORCE.

7.	Espace.	10
8.	Temps. — Mesure du temps; instrument pour mesurer le temps; division du temps.	10
9.	Repos.	11
10.	Mouvement.	11
11.	Diverses espèces de mouvements.	12
12.	Notions sur la vitesse.	12
13.	Mouvement uniforme.	12
14.	Mesure de la vitesse uniforme.	13
15.	Mouvement périodique, régulier.	13
16.	Représentation des divers mouvements par la géométrie ou par le dessin.	14
17.	Inertie.	16

Nos. Pages.

18. Forces. 17
19. Divers effets des forces. 17
20. Nature des forces et leur mesure. 18
21. Moyen direct de mesurer les forces. 18
22. Remarque sur la pesanteur. 19

III. — MODE D'ACTION DES FORCES. — ÉQUILIBRE. — TRAVAIL MÉCANIQUE.

23. Manière dont les forces extérieures aux corps exercent leur action. 20
24. La réaction est égale et contraire à l'action. 20
25. Une force peut être censée appliquée en un point quelconque de sa direction. 21
26. Les corps peuvent être regardés comme rigides dans la plupart des circonstances. 21
27. L'inertie de la matière peut se mesurer au moyen des forces. 21
28. Choses à distinguer dans les forces. 22
29. Représentation des forces par le dessin. 22
30. Définition de l'équilibre des forces. 22
31. Influence de l'inertie sur l'état d'équilibre. 23
32. Résultantes et composantes. 23
33. Équilibre et résultante des forces agissant sur la même droite. 24
34. Définition et examen du travail mécanique des forces. 24
35. Mesure du travail quand la résistance est constante. 25
36. Mesure du travail quand la résistance est variable. 26
37. Valeur de l'effort moyen. 27
38. Divers exemples du travail mécanique et principalement de celui qui consiste à bander un ressort. 27
39. Réflexions et distinctions relatives au travail mécanique des matières. 28
40. Complication inhérente à certains travaux industriels. 28
41. Ce qu'on doit entendre spécialement par le travail mécanique d'une force. 29
42. Simplicité de la mesure du travail qui consiste à élever verticalement des fardeaux. 29
43. Dénominations diverses données au travail mécanique. — Le travail mécanique est ce qui se paye dans les forces. 31
44. Manière d'exprimer en nombres le travail continu des forces. 31
45. Diverses unités de travail proposées ou adoptées. 33
46. Erreur que l'on commettrait en appréciant la force des moteurs simplement par leur plus grand effort ou par leur plus grande vitesse. 33
47. Les forces ne peuvent agir, même sur des corps fixes, sans produire un certain effet. 34

Nos. Pages.
48. Moyen d'apprécier cet effet ou le travail qu'il nécessite. 35
49. Ce travail peut être négligé ou considéré comme nul. 35
50. Les forces peuvent travailler sans produire d'effet utile ; une partie de leur travail est consommée par la déformation des corps. 36
51. Cette perte de travail augmente avec le nombre des intermittences d'action de la force. 37
52. Elle peut être très-grande dans le cas du choc. 37
53. Avantages qu'il y a de régulariser l'action des forces, et de faire usage des corps roides et élastiques. 37
54. Les ressorts parfaitement élastiques restituent dans le débandement toute la quantité de travail qu'ils ont d'abord dépensée. 37
55. La pesanteur rend aussi les corps susceptibles de reproduire le travail dépensé pour élever ces corps. — Cette reproduction n'a pas lieu quand le travail a pour objet de détruire la force d'agrégation des particules des corps. — Réflexions générales sur la force des ressorts, des animaux et de la chaleur. 39
56. L'inertie des corps est un autre moyen de produire le travail mécanique. 40

IV. — ACTION DES FORCES MOTRICES EMPLOYÉES A VAINCRE L'INERTIE OU A PRODUIRE LE MOUVEMENT.

57. Du mouvement uniformément varié en général. 41
58. Du mouvement uniformément accéléré. — Formules pour calculer les circonstances de ce mouvement. — Cas où le corps a une vitesse déjà acquise quand on commence à compter le temps. 41
59. Lois du mouvement uniformément retardé. 45
60. Mouvement vertical des corps pesants. — Causes qui, à la surface de la terre, modifient ce mouvement. — Influence de l'air sur la chute des corps ; le mouvement dans le vide est le même pour toutes les substances. 46
61. La pesanteur agit dans l'intérieur des corps. — Distinction entre le poids et la pesanteur. 47
62. Circonstances où le mouvement dans l'air est peu altéré. — Expériences de Galilée et d'Atwood. 48
63. Lois de la chute des corps dans le vide. — Vitesse imprimée par la pesanteur au bout de la première seconde. — Formule relative à la chute des corps dans le vide. — Application particulière quand le temps de la chute est donné. — Connaissant la hauteur de chute, trouver la vitesse due à cette hauteur. 48
64. Lois de l'ascension verticale des corps. 50
65. Quantité de travail de la pesanteur pour imprimer une certaine vitesse. 51
66. Force vive des corps. — La quantité d'action consommée a pour mesure la moitié de la force vive perdue ou gagnée. 51

Nos. Pages.

67. Observations sur la force vive. 52
68. Définition de la masse. 53
69. Expression de la force vive au moyen de la masse. 54
70. Dénominations de *masse*, de *quantité de mouvement*. 55
71. Les forces motrices sont proportionnelles au degré de vitesse qu'elles impriment à un même corps, dans un même instant très-petit. 55
72. Mesure de la force motrice ou de la force d'inertie au moyen de la vitesse imprimée dans un temps infiniment court. 56
73. Mesure du degré de vitesse imprimée par une force motrice donnée. 57
74. Mesure de la force motrice ou d'inertie par la vitesse finie qu'elle imprimerait en une seconde, si elle agissait uniformément. 57
75. Moyens d'obtenir les mêmes choses à l'aide de la loi ou de la courbe qui lie les temps aux vitesses. 58
76. La connaissance de la loi que suit la force motrice peut servir à trouver celle qui lie les temps aux vitesses. 59
77. Recherche du travail des forces motrices ou de la force d'inertie des corps. 59
78. La quantité de travail de la force motrice ou de la force d'inertie d'un corps, a pour mesure la moitié de la force vive communiquée. 60
79. La quantité de travail consommée par une force opposée au mouvement d'un corps est la moitié de la force vive détruite. 61
80. L'inertie de la matière sert à changer le travail en force vive et la force vive en travail. 62
81. Les corps parfaitement élastiques restituent complétement la force vive quand ils sont choqués. 63
82. Dans le choc des corps non élastiques, il y a toujours une perte de force vive appréciable. 63
83. Les ressorts et l'inertie ne peuvent pas servir à augmenter la force vive des corps et le travail des moteurs. 63
84. Examen de ce qui se passe dans les mouvements alternatifs ou périodiques. 64
85. La quantité de travail consommée ou restituée par l'inertie est toujours la moitié de la force vive acquise ou détruite. 64
86. Démonstrations des mêmes choses par la figure 22. 65
87. Ces réflexions s'appliquent aussi bien à la pesanteur qu'à l'inertie. — Avantages des routes à pentes douces. 66
88. Nouveaux exemples où l'inertie ne diminue en rien la quantité de travail du moteur. 66
89. Autres exemples du rôle que joue l'inertie des corps dans divers procédés des arts. 66
90. Observations générales sur ces exemples. 67

DEUXIÈME PARTIE.

ÉQUILIBRE DES FORCES ET DYNAMIQUE.

I. — FORCES CONCOURANT EN UN POINT.

Nos.		Pages.
1.	Équilibre d'un corps.	66
2.	Résultante de forces appliquées selon la même direction.	68
3.	Parallélogramme des chemins.	70
4.	Parallélogramme des vitesses.	70
5.	Cas du mouvement curviligne ou du mouvement varié.	71
6.	Méthode de Roberval.	71
7.	Indépendance des vitesses simultanées dans un même corps.	72
8.	Indépendance de l'action des forces simultanées.	73
9.	Parallélogramme des forces.	73
10.	Décomposition d'une force en deux autres.	74
11.	Quantité de travail d'une force sur une résistance qui ne lui est pas immédiatement opposée.	75
12.	Quantité de travail pour faire mouvoir un corps pesant sur une courbe.	76
13.	Le travail élémentaire de la résultante de deux forces est égal au travail des deux composantes, et ce dernier travail est la somme ou la différence des travaux que produisent chacune d'elles selon qu'elles agissent dans le même sens ou dans des sens opposés.	76
14.	Moment de la résultante de deux forces.	77
15.	Deux points d'application de deux forces peuvent être ramenés à un seul.	79
16.	Extension du théorème des moments.	79
17.	Extension du théorème des quantités de travail.	80
18.	Cas où le moment de la résultante est nul.	82

II. — FORCES PARALLÈLES.

19.	Analogie entre deux forces concourantes et deux forces parallèles.	82
20.	Résultante de deux forces parallèles, croissant par rapport à un point.	83
21.	Extension des propriétés des forces parallèles, leurs points d'application étant quelconques.	84
22.	Moment de deux forces parallèles par rapport à une droite.	85
23.	Moment de deux forces parallèles par rapport à un plan.	85
24.	Forces parallèles en nombre quelconque.	85

Nos. Pages.
25. Travail de la résultante de plusieurs forces parallèles. 86
26. Emploi des moments pour trouver la position de la résultante. 86
27. Emploi de la romaine. 87

III. — CENTRE DE GRAVITÉ DES CORPS.

28. Centre des forces parallèles. 87
29. Centre de gravité. 88
30. Détermination pratique du centre de gravité d'un corps. 88
31. Recherche du centre de gravité par le calcul ou par la géométrie. 89
32. Centre de gravité des corps réguliers. 90
33. Centre de gravité des corps symétriques. 90
34. Centre de gravité des corps réguliers non homogènes. 91
35. Centre de gravité des corps coupés par tranches parallèles. 92
36. Parallélogramme; parallélipipède cube. 92
37. Triangle. 92
38. Quadrilatère quelconque. 93
39. Pyramide triangulaire. 93
40. Pyramide à base quelconque. 94
41. Polyèdre quelconque. 94
42. Corps de forme quelconque. 95
43. Utilité du centre de gravité pour la mesure de certains volumes. 95

IV. — MOUVEMENT DE TRANSPORT PARALLÈLE D'UN CORPS OU D'UN SYSTÈME DE CORPS.

44. Force totale de l'inertie d'un corps ou d'un système de corps dans un mouvement de transport parallèle. 97
45. Quantité totale de mouvement d'un corps. 98
46. Mouvement d'un corps lorsque la force motrice est appliquée à son centre de gravité. 98
47. Mouvement d'un corps lorsque la force motrice ne passe plus par le centre de gravité. 99
48. Force vive totale imprimée à un corps mû parallèlement à lui-même. 100
49. Conclusion relative au mouvement de transport. 101

TRAVAIL DE LA PESANTEUR DANS LE MOUVEMENT D'UN CORPS OU D'UN SYSTÈME DE CORPS. — DIVERS ÉQUILIBRES DE CES CORPS.

50. Théorème général sur le travail de la pesanteur. 101
51. Équilibre des corps pesants. 103
52. Exemples des diverses espèces d'équilibre. 104

V. — ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE LIBRE.

Nos.		Pages.
53.	Équilibre d'un corps libre.	106
54.	Équilibre et mouvement des machines.	107
55.	Relation entre le travail des forces sur un corps libre et sa force vive. Exemple sur les trajectoires d'un corps pesant.	108

VI. — MOUVEMENT D'UN CORPS AUTOUR D'UN AXE.

56.	Le travail de forces quelconques faisant tourner un corps autour d'un axe est réduit à celui de leurs composantes dans un plan perpendiculaire à cet axe.	112
57.	Travail des forces qui font tourner un corps autour d'un axe.	112
58.	Équilibre d'un corps autour d'un axe.	114
59.	Extension du principe des forces vives au mouvement de rotation.	114
60.	Méthode pour estimer la force vive totale d'un corps qui tourne autour d'un axe.	115
61.	Détermination du mouvement d'un corps qui tourne et qui est sollicité par une force.	116
62.	Application aux volants.	117
63.	Distance de l'inertie d'un corps qui tourne autour d'un axe.	118
64.	Théorème sur le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque.	119
65.	Moment d'inertie d'un corps par rapport à ses volumes partiels.	122
66.	Moment d'inertie de divers corps par rapport à leurs volumes.	122
67.	Application des moments d'inertie.	124

VII. — FORCE CENTRIFUGE.

68.	Idée de la force centrifuge ; sa mesure pour un corps de petites dimensions qui tourne avec une vitesse constante.	125
69.	Force centrifuge des corps à grandes dimensions.	128
70.	Exemples de la force centrifuge.	130
71.	Variations de la force centrifuge à la surface de la terre. Explication de l'aplatissement de cette dernière.	131
72.	Mouvement d'un corps dans un canal circulaire.	132
73.	Force centrifuge d'un corps qui décrit une courbe quelconque. — Application à la trajectoire de la bombe.	133

VIII. — PENDULE.

74.	Définition du pendule. Idée générale de son mouvement.	138

Nos. Pages.
75. Lois de mouvement du pendule simple. 139
76. Durée de l'oscillation d'un pendule dont l'écart est fort petit. 141
77. Pendule composé. 145
78. Comparaison du pendule composé et du pendule simple. Centre d'oscillation. 147

CENTRE DE PERCUSSION. — CHOC D'UN CORPS QUI TOURNE AUTOUR D'UN AXE.

79. Centre de percussion. 148
80. Choc d'un corps qui a un mouvement de rotation. 151
81. Application au pendule balistique. 153

IX. — MACHINES SIMPLES. — ASSEMBLAGES DE BARRES OU CORDAGES.

82. Équilibre d'une corde ou barre tirée par ses deux extrémités; sa tension. 156
83. Quantité de travail exercée sur une corde. 158
84. Équilibre sur des cordes qui concourent en un même point. 159
85. Équilibre du polygone funiculaire. 160
86. Équilibre d'un polygone supportant un poids. 161
87. Moyen général de trouver les tensions. 161
88. Chaînette; son utilité dans les arts. 162
89. Propriétés générales de la chaînette. 163
90. Chaînettes semblables. 164
91. Construction de la chaînette en se donnant son poids, sa longueur, et le point de concours des tensions. 165
92. Détermination du point de concours de toutes les tensions de la chaînette. 165
93. Plus petite et plus grande tension sur une chaînette verticale. 167
94. Mesure directe de la tension en un point quelconque de la chaînette. 167
95. Tensions extrêmes d'une chaînette dont la flèche est fort petite. 169
96. Application aux ponts établis sur des chaînes tendues d'une rive à l'autre. 170
97. Ponts suspendus au-dessous des chaînes, par des suspensoires équidistantes et verticales. 171

X. — CORPS POSÉS SUR D'AUTRES CORPS OU SUR DES PLANS OU SURFACES.

98. Idée générale de la réaction des corps posés les uns sur les autres. 176
99. Corps reposant par un point sur un plan. 176

Nos.		Pages.
100.	Corps reposant par deux points sur un plan.	177
101.	Corps posés par trois ou par plusieurs points sur un plan.	177
102.	Exemples divers.	178
103.	Définition et équilibre du plan incliné.	183
104.	Mouvement sur le plan incliné.	183
105.	Frottement des corps sur un plan.	185
106.	Mesure du frottement d'une substance quelconque contre un plan. 1er *Tableau*. Frottement des surfaces planes quand elles ont été longtemps en contact. — 2e *Tableau*. Frottement des surfaces planes en mouvement les unes sur les autres.	185
107.	Observations sur les tableaux du frottement de deux surfaces.	189
108.	Frottement du plan.	190
109.	Quantité de travail sur un plan incliné.	193
110.	Mesure de la tension d'une corde, de la part de son propre poids.	195
111.	Centre de gravité d'un arc de cercle.	196
112.	Frottement d'une corde qui glisse sur un rouleau fixe.	197
113.	Équilibre. Théorie du coin.	201
114.	Influence du frottement sur les effets du coin.	203
115.	Forme nécessaire au coin.	204
116.	Presse à coin.	205
117.	Effet du choc dans l'emploi du coin.	208
118.	Formes diverses du coin et son application aux outils.	210

XI. — PIÈCES QUI TOURNENT OU ROULENT LES UNES SUR LES AUTRES.

119.	Idée du frottement produit par le mouvement des pièces qui tournent sur elles-mêmes.	212
120.	Frottement d'un pivot contre sa crapaudine.	213
121.	Frottement d'un tourillon dans un palier ou boîte. — 3e *Tableau*. Frottement des axes dans leurs boîtes.	217
122.	Idée sur les dimensions des tourillons. — Avantage des couteaux.	220
123.	Frottement dit *de seconde espèce*, produit par le roulement de deux surfaces.	221
124.	Emploi du frottement de seconde espèce pour diminuer les autres frottements.	222
125.	Résistance due à la roideur des cordages. — Tableau des poids nécessaires pour plier différentes cordes autour d'un rouleau d'un mètre de diamètre. — Observations.	226

XII. — CALCUL DES ROUES ET DE LEURS RÉSISTANCES.

126.	Roue plane, sollicitée par deux forces situées dans son plan, et à égales distances du centre de rotation.	230

Nos. Pages.
127. Même roue soumise à deux forces situées dans son plan, mais à des distances inégales du centre. 233
128. Équilibre de la poulie fixe. 236
129. Équilibre de la poulie mobile. 239
130. Équilibre des moufles. 240
131. Équilibre des roues en général. 244
132. Roues combinées. 246
133. Résistances dues aux tensions des courroies. 246
134. Résistance des chaînes. 248
135. Résistance des roues à couronne et des roues d'engrenage. 249

XIII. — CALCULS RELATIFS A LA VIS ET A SON ÉCROU.

136. Description succincte de la vis à filets carrés et de son écrou. 251
137. Mode d'action de la vis à filets carrés ; son équilibre sans égard aux frottements. 252
138. Équilibre de la vis à filets carrés en tenant compte des frottements. 253
139. Dimensions à donner à la vis à filets carrés ; influence de son frottement. 255
140. Frottements des épaulements et des pivots des vis. 257
141. Vis triangulaires. 259
142. Vis sans fin. 261

XIV. — NOTIONS SUR LE LEVIER.

143. Diverses espèces de leviers. 263
144. Équilibre du levier. 263
145. Emploi et avantages du levier. 264

TROISIÈME PARTIE.

DES MACHINES ET DES MOTEURS.

I. — INTRODUCTION. — RÉSUMÉ DES PRINCIPES EXPOSÉS DANS LES DEUX PREMIÈRES PARTIES DU COURS.

1. Principes généraux. 267

II. — CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES MACHINES.

N°.		Pages.
2.	Nomenclature générale des pièces d'une machine quelconque.	272
3.	Actions des forces sur les machines ; application du principe des forces vives.	273
4.	Objet des machines, transformation du travail.	274
5.	La modification des facteurs du travail n'est pas arbitraire.	275
6.	Déchet de travail produit par les machines.	275
7.	Illusion dans l'appréciation de l'effet des machines.	276
8.	Mouvement perpétuel.	277
9.	Mouvement perpétuel dû aux piles électriques.	278
10.	Complication de la question de l'établissement des machines.	279
11.	Manière de procéder à l'établissement des machines.	280
12.	Du mouvement des machines à partir du repos.	281
13.	Nature des diverses actions qui se développent sur une machine.	283
14.	Influence de la pesanteur.	283
15.	Influence du moteur et de la résistance utile de l'outil.	284
16.	Influence des résistances nuisibles.	284
17.	Influence de l'inertie.	285
18.	Influence des réactions moléculaires.	285
19.	Inconvénients du mouvement varié.	286
20.	Moyen de rendre le mouvement uniforme.	287
21.	Cas principaux de l'irrégularité du mouvement ; moyen de le corriger.	288
22.	Objet et division de cette troisième partie.	290

III. — DES COMMUNICATEURS DU MOUVEMENT.

23.	Séries des machines simples d'après le mouvement qu'elles reçoivent et transmettent.	290
24.	Transformation du mouvement rectiligne continu en un autre mouvement rectiligne continu.	291
25.	Transformation du mouvement rectiligne continu en mouvement circulaire continu, et *vice versâ*.	296
26.	Transformation du mouvement circulaire continu en un autre mouvement circulaire continu.	299
27.	Autres exemples de transformation du mouvement circulaire continu en circulaire continu.	301
28.	Transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif, et *vice versâ*.	304
29.	Mouvement circulaire continu en mouvement circulaire alternatif.	310
30.	Mouvement circulaire alternatif en rectiligne alternatif.	313

Nos. Pages.

51. Mouvements circulaire ou rectiligne alternatifs en mouvements de même espèce. 317

IV. — DES MODIFICATEURS INSTANTANÉS DU MOUVEMENT.

32. Classification des modificateurs instantanés du mouvement. Définition. 318
35. Embrayage des roues dentées. 320
34. Embrayages au moyen de plateaux avec saillies ou renfoncements. 321
35. Cônes de friction. 322
36. Embrayage au moyen de la bride de friction. 323
37. Manœuvres des manchons d'embrayage. 324
38. Embrayage des tambours à courroie ou poulies à corde. 324
39. Embrayage à axes mobiles. 325
40. Moyens de changer le sens de la rotation d'un arbre. 326
41. Moyens de changer la vitesse du mouvement. 327
42. Moyens de changer le mouvement par intervalles. 328

V. — DES MODÉRATEURS ET DES RÉGULATEURS.

43. Objet des modérateurs et des régulateurs. 331
44. Modérateurs. 331
45. Régulateurs. 334
46. Tambours régulateurs, tambours à spirale. 334
47. Régulateur à force centrifuge. 339
48. Régulateur à ressort en spirale. 347

VI. — DES MANIVELLES SIMPLES.

49. Manière dont varie le travail élémentaire des manivelles simples, dans un premier demi-tour. 348
50. Manière dont varie le travail instantané dans le deuxième demi-tour. 352
51. Manière de régler le poids des équipages de la manivelle. 353
52. Différence d'une manivelle à simple effet et d'une manivelle à double effet. 354

VII. — DES MANIVELLES COMPOSÉES.

53. Effet des manivelles doubles, et leur disposition la plus avantageuse. 355
54. Effets et inconvénients des manivelles triples. 357

VIII. — THÉORIE ET ÉTABLISSEMENT DES VOLANTS.

Nos.		Pages.
55.	Forme ordinaire des volants et expression de leur force vive.	359
56.	Volant pour une manivelle à simple effet.	359
57.	Volant des manivelles à double effet.	368
58.	Idée sur le calcul d'autres volants.	368

IX. — DES ENGRENAGES.

59.	Tracé des engrenages ; conditions.	375
60.	Méthode générale pour le tracé des courbes des dents.	376
61.	Divisions des circonférences primitives.	378
62.	Des courbes génératrices dans les engrenages.	378
63.	Lanterne à fuseaux cylindriques.	379
64.	Pignons.	381
65.	Tracé des cames en général.	382
66.	Tracé des cames dans le cas où l'on veut éviter le choc.	384
67.	Engrenage à développantes.	385
68.	Engrenage des roues d'angle.	387
69.	Exécution des engrenages.	389
70.	Épaisseur des dents.	391

X. — NOTIONS GÉNÉRALES SUR LE CALCUL DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX.

71.	Quatre espèces de résistance des matériaux.	396
72.	Définition des forces de traction, de compression, de flexion et de torsion. — Tableau des coefficients d'élasticité et de résistance pour les divers matériaux employés dans les constructions.	397
73.	Déformation et résistance d'une pièce soumise à une force de traction.	402
74.	Déformation et résistance d'une pièce soumise à une force de compression.	403
75.	Déformation d'une pièce soumise à une force de flexion, et encastrée par un bout.	404
76.	Application aux pièces carrées, rectangulaires, ou circulaires.	407
77.	Résistance à la flexion d'une pièce encastrée par un bout.	408
78.	Solide d'égale résistance.	410
79.	Déformation d'une pièce encastrée soumise à une force de torsion appliquée sur son autre extrémité.	412
80.	Résistance à la torsion.	413
81.	Résistance des pièces chargées debout ou verticalement.	413

Nos. Pages.

82. Influence des appuis sur la résistance des matériaux. 415
83. Influence des évidements ou des renforts ou côtes ajoutées aux pièces. 416

XI. — CONSTRUCTION ET SOLIDITÉ DES PIÈCES DE MACHINES.

84. Tourillons et coussinets. 417
85. Dimensions des tourillons. 419
86. Arbres en bois ou en fonte. Calcul de leurs dimensions. 421
87. Roues. — Tableau des proportions des rais. 423

XII. — ÉQUILIBRE DES FLUIDES.

88. Surfaces de niveau. 426
89. Principe de l'égalité de pression. 427
90. Définition de la pression. Moyens de la multiplier. 429
91. Pression des fluides pesants. 431
92. Examen de la pression des fluides pesants dans des vases irréguliers. 432
93. Application de la pression des fluides pesants. 435
94. Détermination de l'épaisseur des vannes, des batardeaux et des digues. 436
95. Épaisseur des chaudières à vapeur, des tuyaux de conduite, etc. 440
96. Équilibre des corps flottants. 442

XIII. — DES POMPES.

97. Pompe aspirante. 445
98. Pompe aspirante et foulante, et pompe simplement foulante. 450
99. Travail des pompes. 451
100. Presse hydraulique et siphon. 454

XIV. — MOUVEMENT DES FLUIDES CONTENUS DANS DES VASES, CANAUX, RIVIÈRES.

101. Phénomène de l'écoulement de l'eau hors d'un vase. 455
102. Vitesse de l'eau sortant librement par un petit orifice mince. 456
103. Même écoulement sous des pressions quelconques. 458
104. Écoulement des gaz ou de la vapeur dans le cas où la pression intérieure ne surpasse que de peu la pression extérieure. 462
105. Écoulement des gaz quand la pression intérieure est sensiblement plus grande que la pression extérieure. 464

N^os. Pages.

106. Applications numériques à l'écoulement par un orifice très-petit pratiqué dans une paroi mince. 466
107. Dépense hypothétique par une paroi mince, et dépense effective. 469
108. Phénomène de la contraction. 470
109. Multiplicateurs de la dépense à paroi mince. — Tableau des valeurs de α pour les orifices en mince paroi et isolés complétement des faces du réservoir. 471
110. Dépense pour les orifices rectangulaires sans bords supérieurs : épanchoir, déversoir, réservoir. 474
111. Dépense par une paroi épaisse, ou par un tuyau de très-petite longueur. 476
112. Dépense par un canal découvert de très-petite longueur. 477

XV. — ÉCOULEMENT DES FLUIDES PAR DES TUYAUX DE CONDUITE ET CANAUX DÉCOUVERTS.

113. Perte de force vive d'un fluide tombant dans un vase en repos ou qui marche dans la direction du mouvement du fluide. 479
114. Perte de force vive due aux étranglements. 480
115. Perte de force vive dans les tuyaux de petite longueur. 482
116. Dépenses des liquides ou des fluides qui s'écoulent par un tuyau d'une longueur quelconque. 483

XVI. — PRESSION EXERCÉE PAR LES FLUIDES EN MOUVEMENT CONTRE LES PAROIS DES VASES QUI LES CONTIENNENT.

117. Mesure de la pression pour un vase de forme quelconque. 486
118. Mesure de la pression quand le vase est très-grand par rapport à l'orifice. 489
119. Diversité des pressions dans un tuyau. 489
120. Pression dans les tuyaux cylindriques additionnels. 491
121. Pression dans les canaux découverts. 491
122. Observation générale sur les pressions d'un fluide. 492

XVII. — ÉCOULEMENT DE L'EAU PAR LES CANAUX DÉCOUVERTS.

123. Mouvement de l'eau dans les canaux découverts, à pente uniforme et de grande longueur. 492
124. Moyen de mesurer la vitesse moyenne dans un canal. Jaugeage des eaux courantes. 494
125. Mouvement de l'eau dans les canaux découverts de petite longueur. 496
126. Établissement des coursiers dans les machines. 497

XVIII. — RÉCEPTEURS HYDRAULIQUES.

Nos.		Pages.
127.	Hauteur due à la vitesse d'arrivée du fluide sur le récepteur ; vitesse de régime de ce dernier.	499
128.	Effet utile des récepteurs.	500
129.	Relation de l'effet utile avec les forces vives du fluide à l'entrée et à la sortie du récepteur.	500
130.	Valeur de l'effet utile.	501
131.	Causes qui augmentent ou diminuent l'effet utile.	501
132.	Maximum absolu de l'effet utile.	502
133.	Moyens d'obtenir le maximum absolu d'effet utile.	503
134.	Moyens d'approcher du maximum absolu. — Maximum relatif de l'effet utile.	504
135.	Roues verticales à palettes planes, mues par-dessous.	504
136.	Effet utile maximum de ces roues.	505
137.	Diminution de l'effet utile par le jeu du coursier.	507
138.	Effet utile pour une vitesse quelconque de la roue.	507
139.	Rapport de l'effet maximum utile à l'effet absolu de l'eau.	508
140.	Roues verticales à aubes cylindriques, mues par-dessous.	509
141.	1° Vanne et pertuis. — 2° Fond du coursier antérieur. — 3° Fond du coursier sous la roue. — 4° Ressaut en arrière ; canal de fuite. — 5° Largeur du coursier en amont et de l'orifice. — 6° Logement des couronnes dans les joues du coursier. — 7° Tracé des aubes cylindriques. — 8° Nombre et construction des aubes. — 9° Largeur des couronnes.	509
142.	Effet maximum utile des roues à aubes cylindriques.	511
143.	Effet utile pour une vitesse de roue différente de celle qui correspond au maximum.	512
144.	Coefficients pratiques de l'effet utile.	513
145.	Détails de construction.	514
146.	Avantage des roues à aubes cylindriques.	514
147.	Roues à palettes, mues de côté, dans un coursier circulaire.	515
148.	Moyens de rendre l'effet le plus près possible de l'effet absolu.	515
149.	Capacité de la roue.	516
150.	Maximum relatif de l'effet utile.	517
151.	Calcul de l'effet utile pour des vitesses quelconques.	517
152.	Roues à augets, recevant l'eau à une certaine hauteur.	517
153.	Dispositions les plus avantageuses de ces roues ; leur effet utile.	518
154.	Circonstances où l'on doit employer chaque espèce de roue hydraulique.	519
155.	Chaînes à godets.	520
156.	Chaînes à chapelets.	521
157.	Roues à palettes pendantes, mues dans un courant indéfini.	521
158.	Valeur du coefficient de résistance des aubes.	522

Nos. Pages.
159. Vitesse de la roue pour le maximum d'effet. 523
160. Roues à rames, servant à mouvoir les bateaux. 525
161. Travail des roues motrices. 524
162. Valeurs des coefficients K' et K, relatifs à la résistance d'un bateau et des ailes. 527
163. Remarques sur les moyens de diminuer les résistances. 528

XIX. — MOULINS A VENT.

164. Idées sur les divers moulins mus par le vent. 529
165. Moulin à axe horizontal. 530
166. Établissement de ce moulin. 531

XX. — MACHINES ALTERNATIVES MUES PAR L'EAU.

167. Machine à colonne d'eau. 533
168. Idées sur le calcul du travail des machines à colonne d'eau. 535

XXI. — MACHINES A VAPEUR.

169. Description de l'ensemble des parties d'une machine à vapeur. 540
170. Détails des chaudières. 541
171. Usage des ouvertures pratiquées au sommet des chaudières. 542
172. Idées sur les précautions à prendre. 543
173. Volumes de l'eau et de la vapeur dans la chaudière. 544
174. Relations entre la densité, la température, et la tension des gaz. 546
175. Caractères distinctifs de la vapeur d'eau. — Relations entre sa tension et sa température. 548
176. Densité de la vapeur dont la tension et la température sont données. 551
177. Quantité de chaleur absolue développée par les différents combustibles. — Effets des foyers. 552
178. Quantité de chaleur contenue dans un poids donné de vapeur à une certaine température. 553
179. Poids de l'eau froide pour condenser la vapeur. 554
180. Poids du combustible pour former une certaine quantité de vapeur donnée. 555
181. Plus grand travail d'un kilogramme de combustible, et sa comparaison avec le travail obtenu dans la pratique. 556
182. Proportions des chaudières, foyers, grilles, cheminées, etc. 559
183. Quantité de vapeur formée par un kilogramme de combustible dans les chaudières de Watt et de Woolf. 561

Nos. Pages.

184. Dimensions des chaudières et des foyers de Watt et de Woolf par force de cheval. 562
185. Cylindres à vapeur, des corps de pompes. 562
186. Application numérique à l'établissement d'une machine particulière à vapeur. 563
187. Diamètres des conduits de vapeur et des soupapes. 568

XXII. — DES MOTEURS ANIMÉS.

188. Définition du travail mécanique des moteurs animés. 568
189. Conditions pour lesquelles ce travail est le plus avantageux. 569
190. Avantages du mode continu d'action des moteurs animés sur le mode d'action intermittente. 570
191. Valeur du travail mécanique des moteurs animés. 571

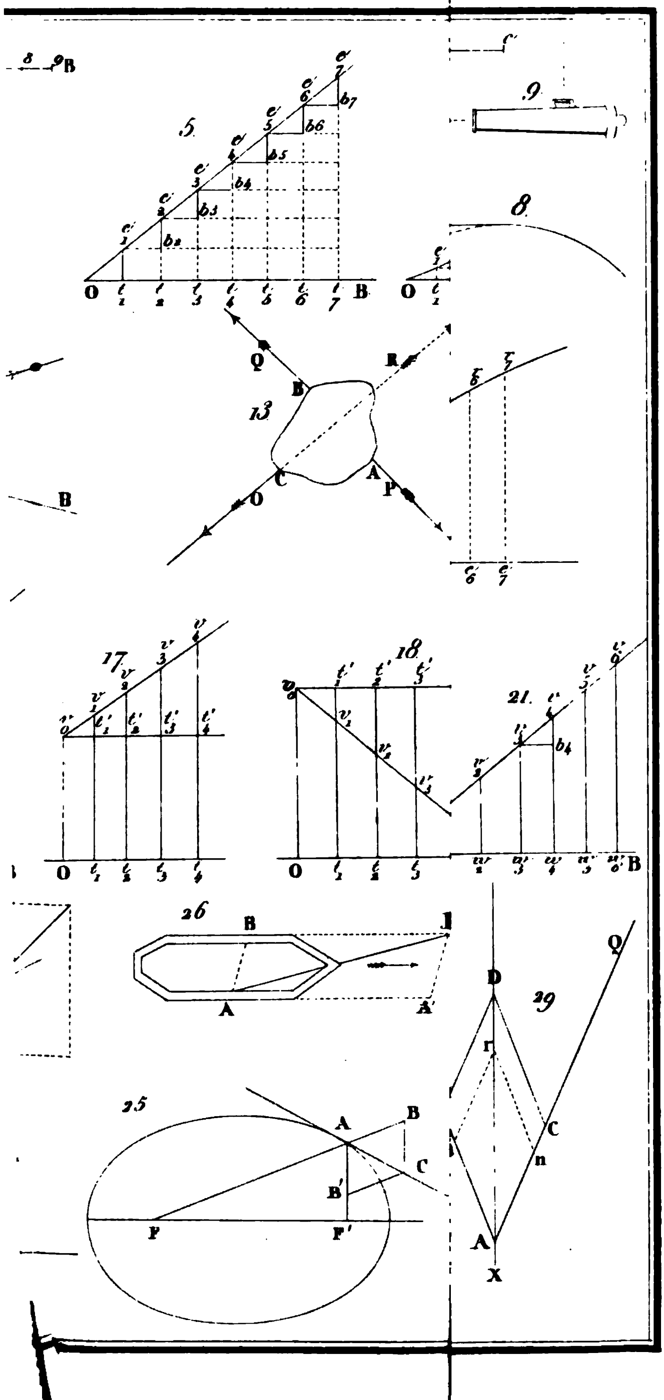
XXIII. — TRANSPORT HORIZONTAL DES FARDEAUX.

192. Différence entre le travail des transports horizontaux et le travail mécanique des moteurs. 574
193. Manière d'estimer le travail du transport horizontal. 574
194. Changements occasionnés dans le travail des transports horizontaux, par la différence des communications. 575

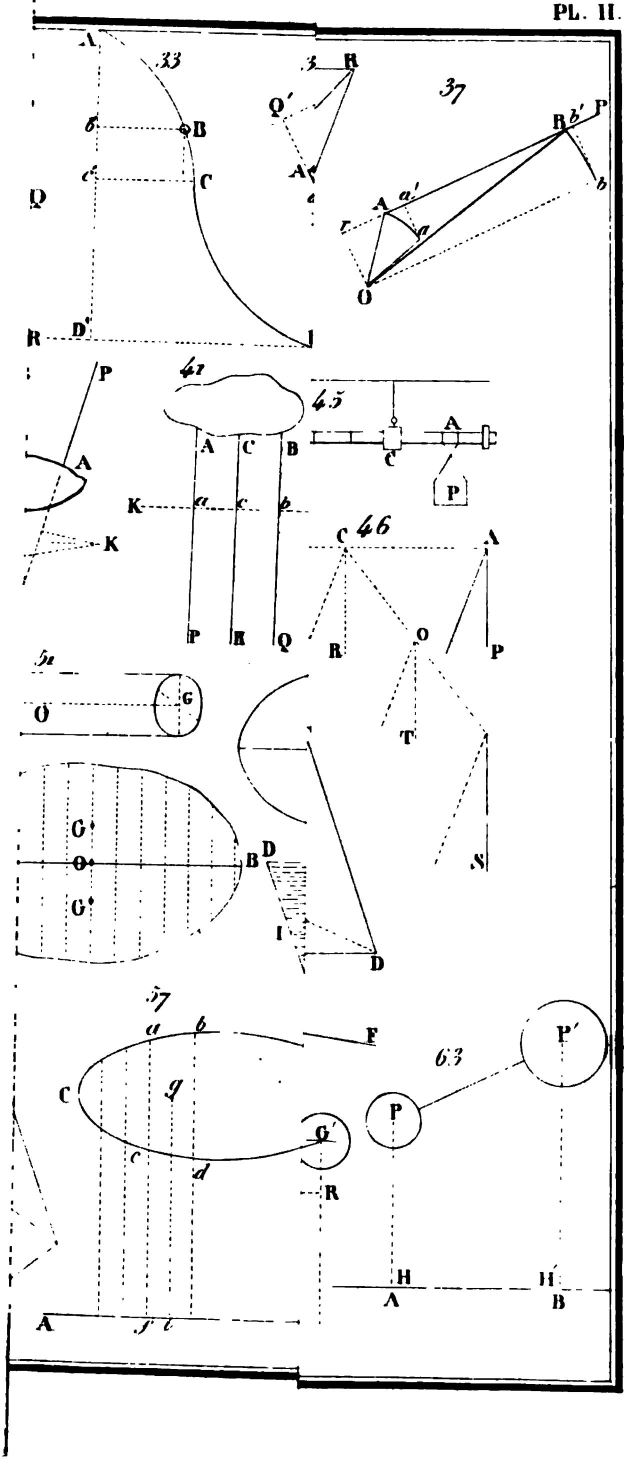
FIN.

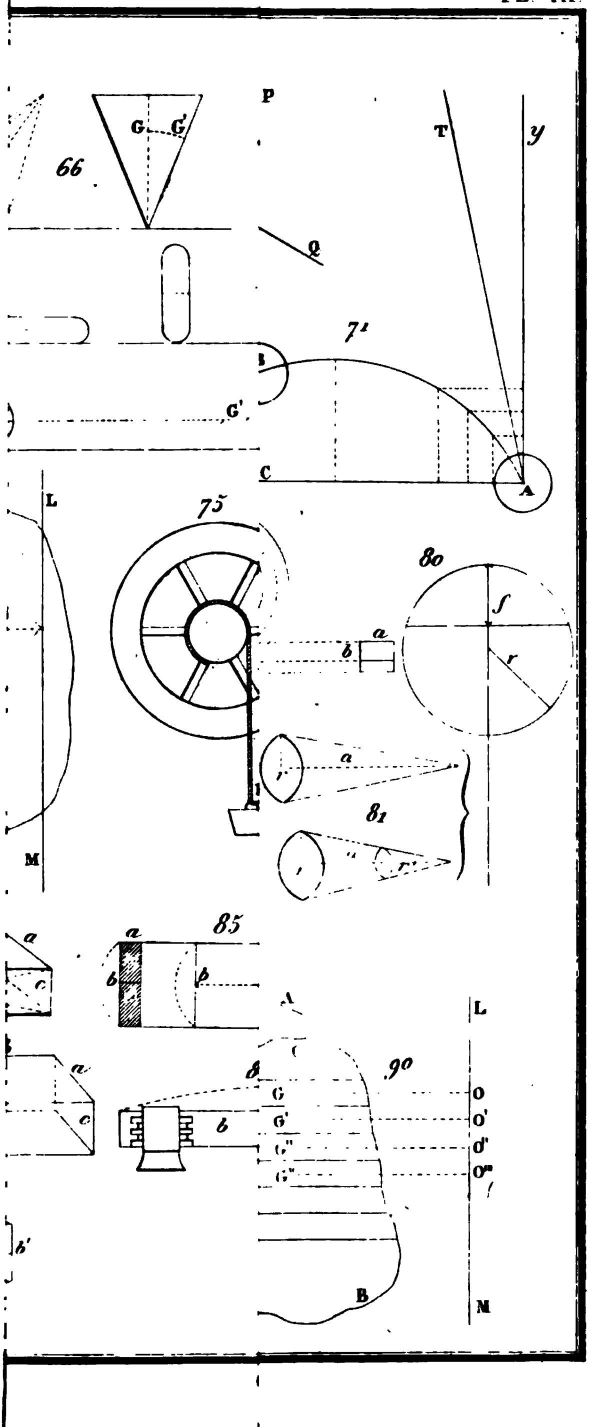
ERRATA.

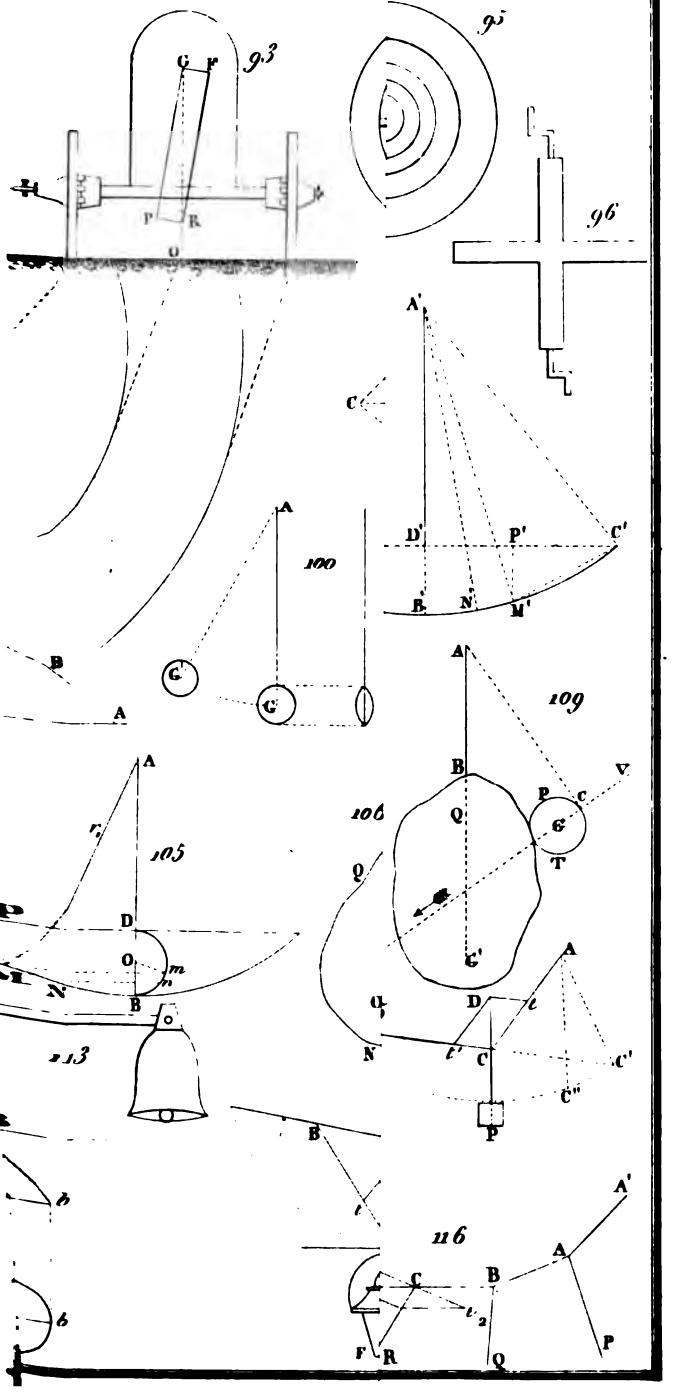
Pages.	lignes en remontant.		
58	18	au lieu de	*exprimée* lisez *déterminée*.
65	25	au lieu de	*fig.* 22 lisez *fig.* 20.
76	27	au lieu de	*fig.* 38 lisez *fig.* 33.
77	20	au lieu de	AP lisez AP'.
»	16	au lieu de	AR lisez AR'.
78	25	au lieu de	Adc lisez Ad.
80	5	au lieu de	$\frac{Aa}{BO}$ lisez $\frac{Aa}{AO}$.
83	18	au lieu de	*croissant* lisez *moments*.
»	14	au lieu de	$à K$ lisez aK.
»	12	au lieu de	Kac lisez Ka.
»	8	au lieu de	$K = ac$ lisez $Kc = ac$.
114	30	au lieu de	*égale à l'unité* lisez *égal à l'arc décrit à l'unité*.
»	29	au lieu de	*leurs perpendiculaires* lisez *leurs composantes perpendiculaires*.
120	14	au lieu de	r_1 lisez r_1^2.
121	15	au lieu de	K^2V^2 lisez $K^2V_1^2$.
123	5	au lieu de	$b' + b'^2$ lisez $b^2 + b'^2$.
»	1	au lieu de	$(b - 3b')$ lisez $(b + 3b')$.
124	6	au lieu de	$\frac{ab}{12}$ lisez $\frac{abc}{12}$.
125	4	au lieu de	*de sections* lisez *actions*.
134	16	au lieu de	$\frac{M \times \frac{V^2}{T}}{}$ lisez $\frac{M \times V^2}{t}$.
	10	au lieu de	Ap lisez AP.
	2	au lieu de	$\frac{M \times V^2}{T^2}$ lisez $\frac{MV^2}{r}$.
180	37	au lieu de	*prisme* lisez *cylindre*.
191	2	au lieu de	dg' lisez dg.
	1	au lieu de	bc lisez ac.
192	29	au lieu de	abc lisez bc.
196	8	au lieu de	$E \times R$ lisez $F \times R$.
215	2	au lieu de	*la pressio* lisez *la pression que*.

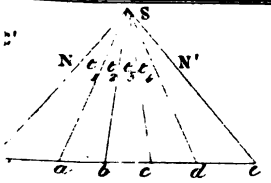

5.
9.
8.
13
17
18.
21.
26
25
29

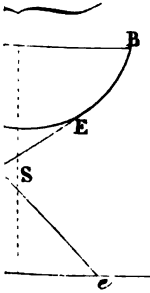
PL. II.



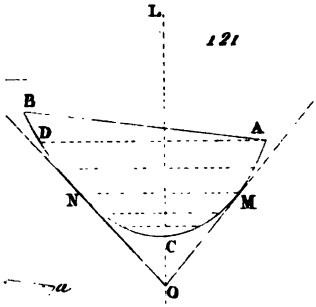

66
G
G'
P
Q
T
y
71
C
A
L
M
75
80
f
a
b
r
81
85
p
c
90
O
O'
B


93
93
96
100
105
106
109
113
116

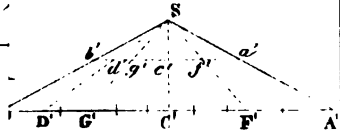




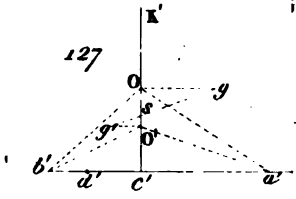
121



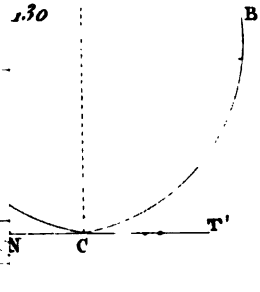
124

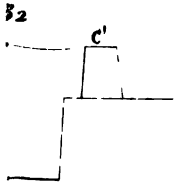


127

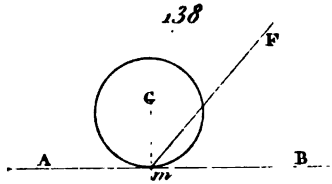


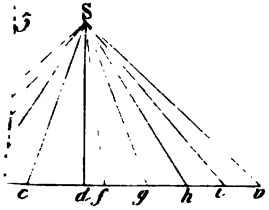
130



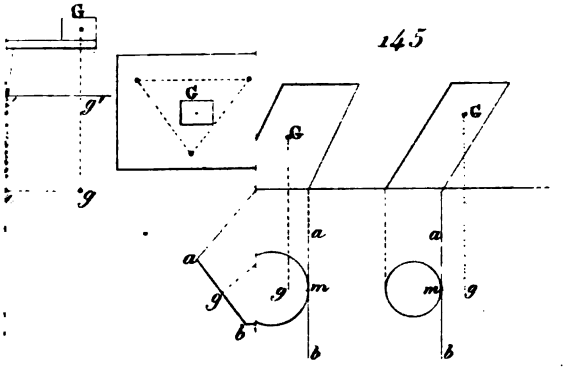


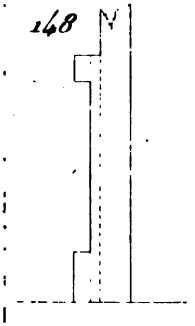
138

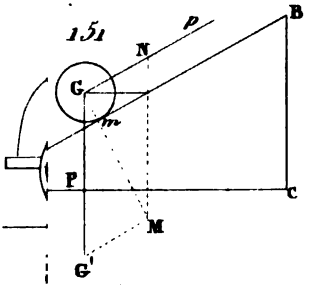


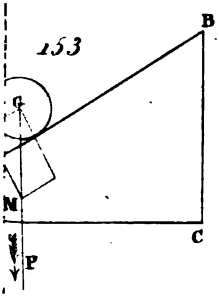


139

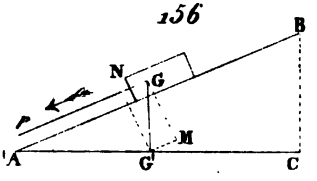

145
G
g
C
a
m
b

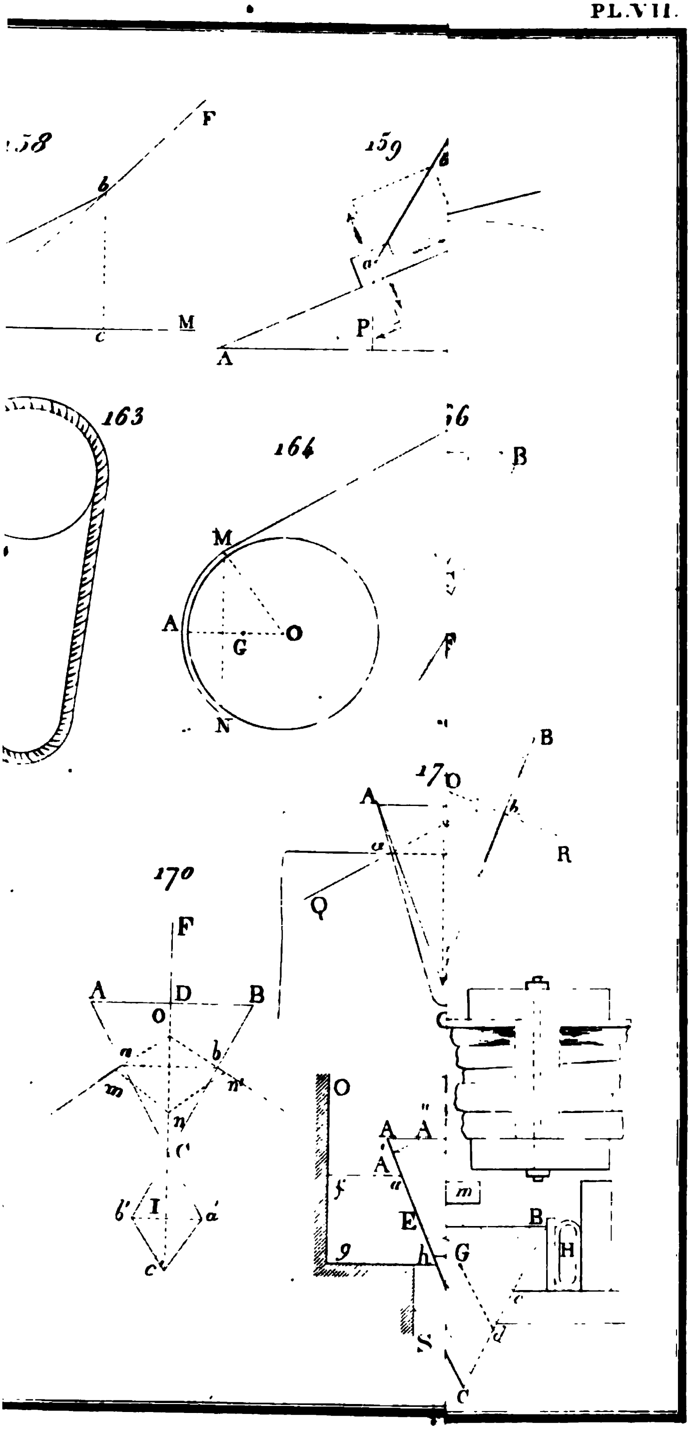

148

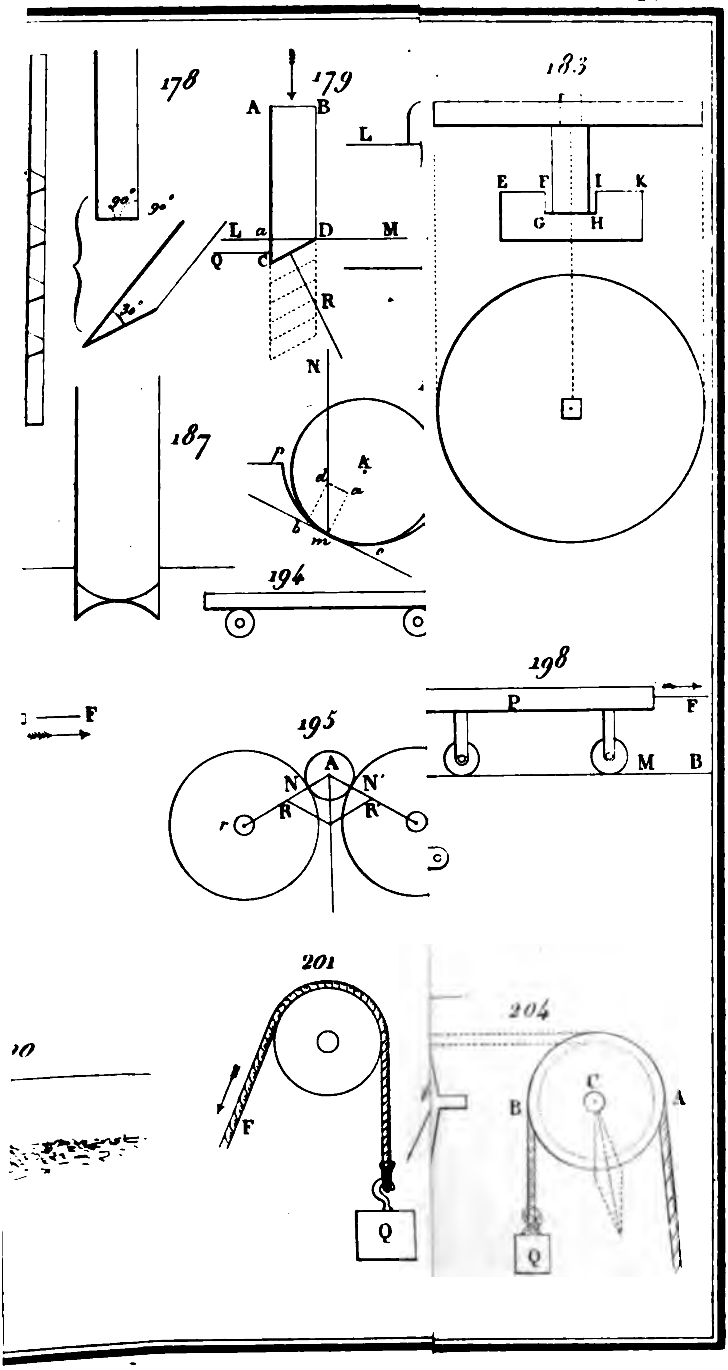

151
N
P
B
G
m
C
M


153
B
C
N
P

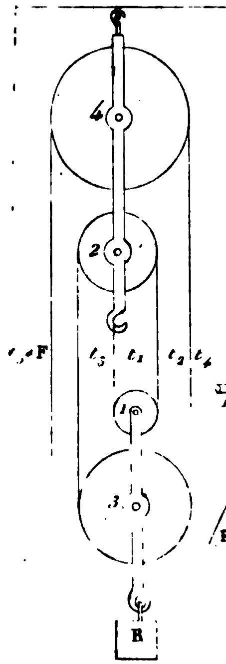
A
B


156
B
N
G
P
M
A
C

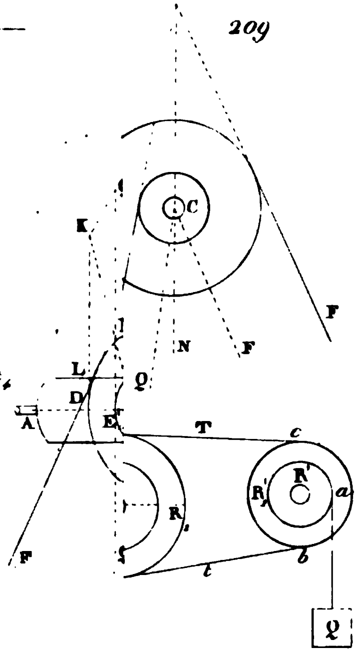

158
159
163
164
166
170
171

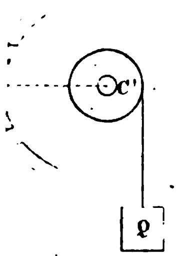

178
179
183
187
194
195
198
201
204
A
B
L
D
M
Q
C
R
a
E
F
I
K
G
H
N
p
d
b
m
P
N'
R'
r
Q

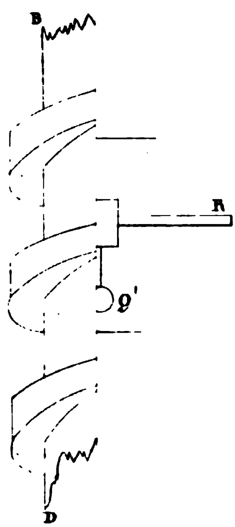
207

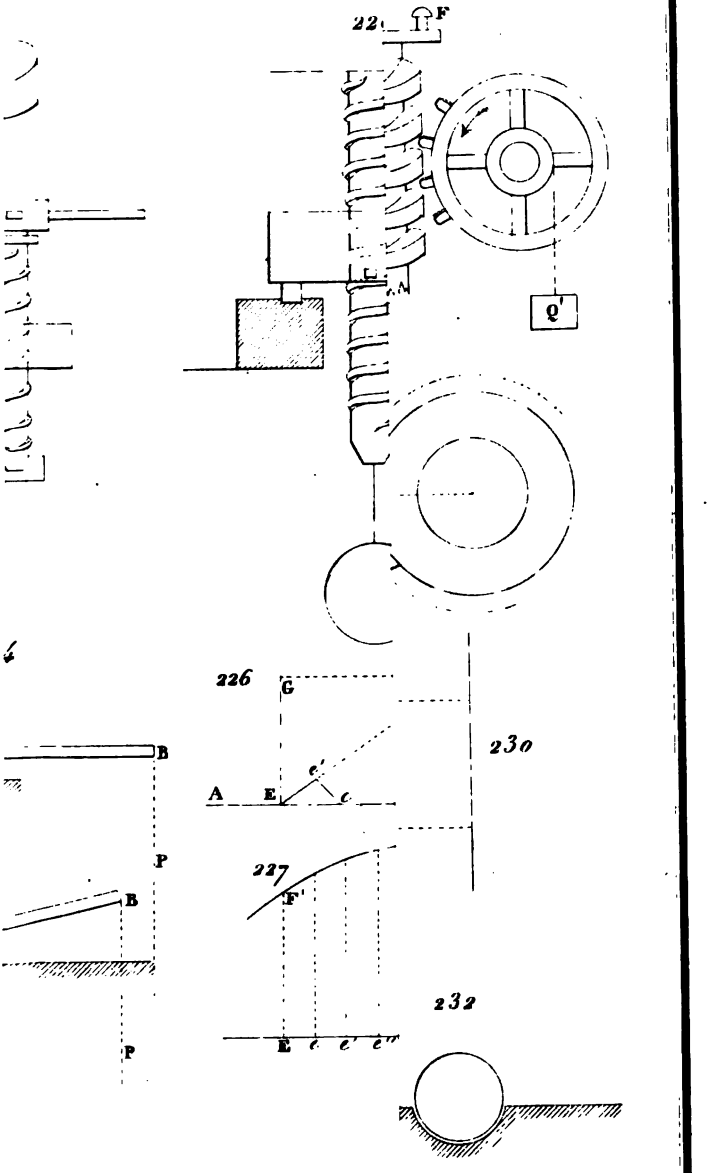


209

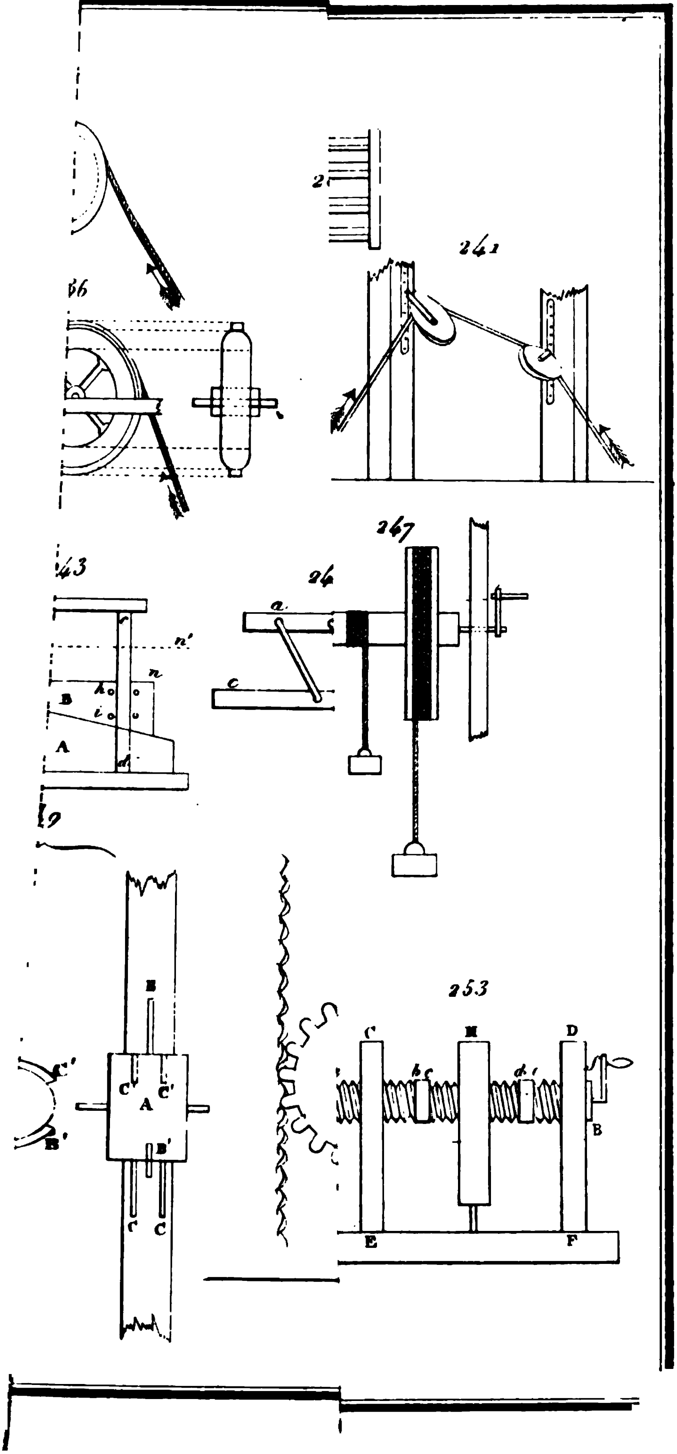


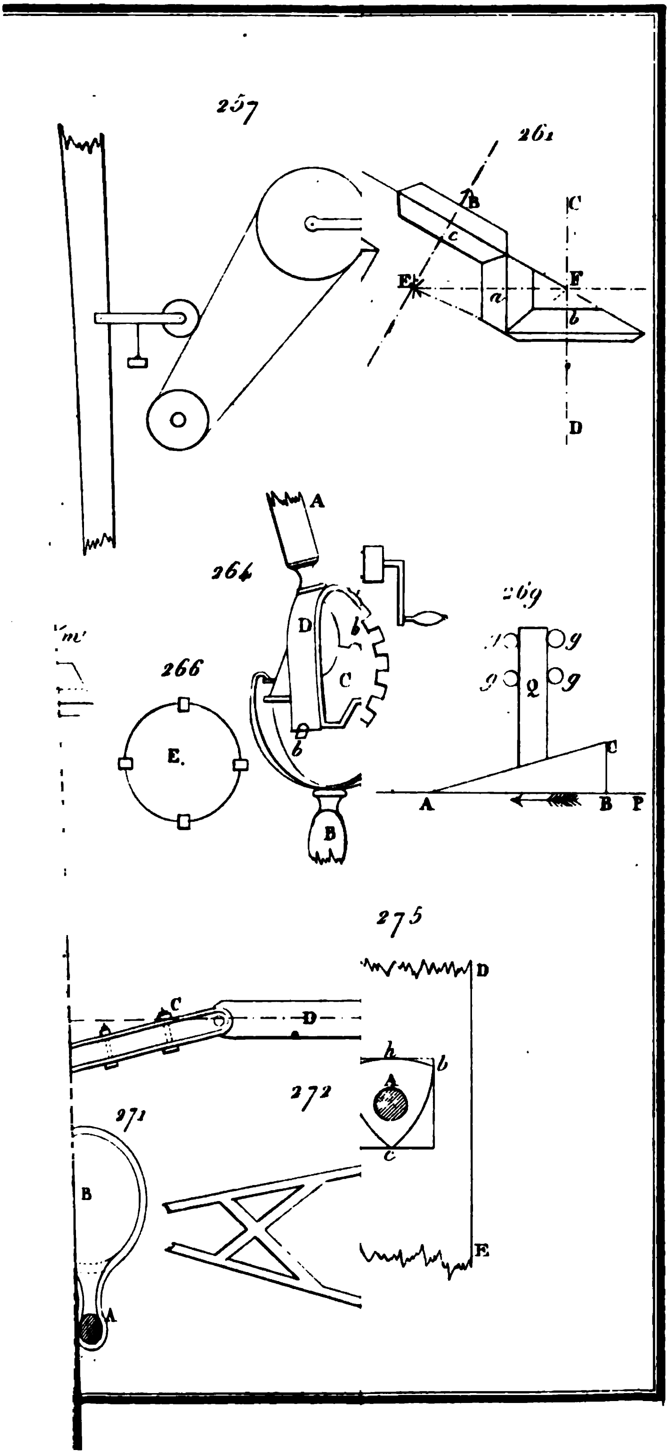


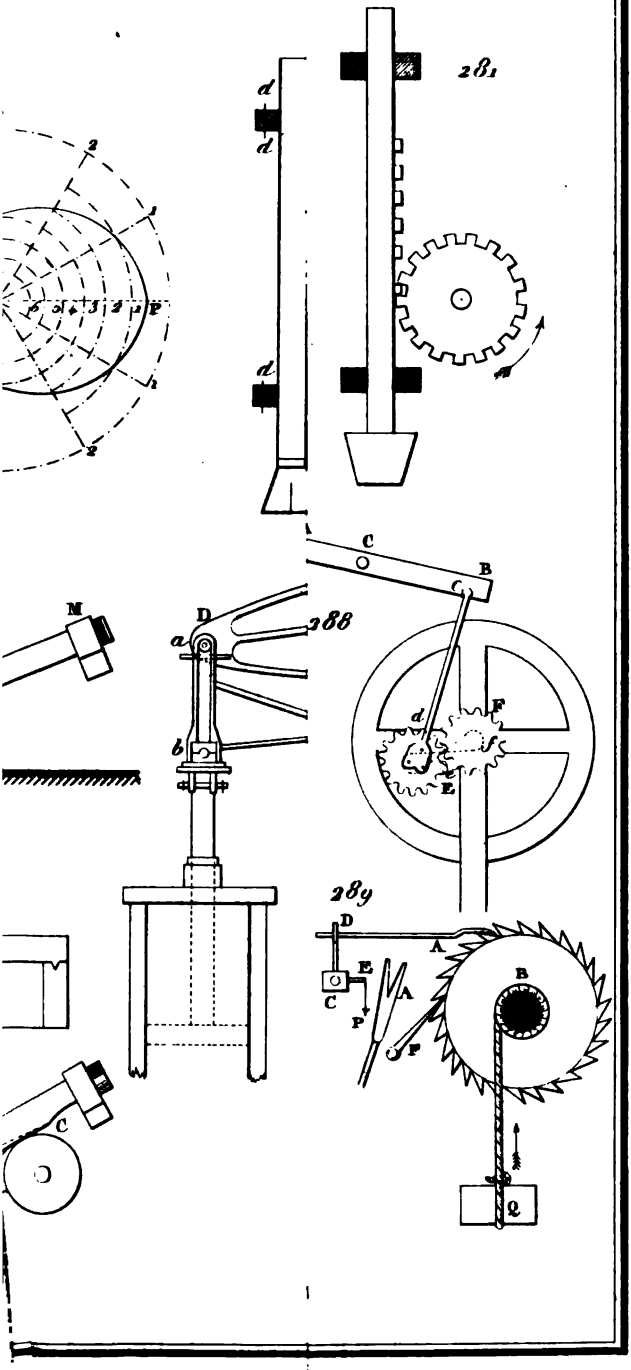


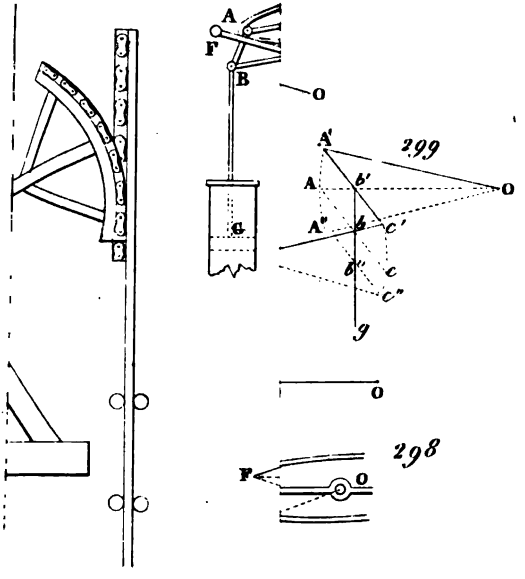

F
Q'
226
G
230
A
E
e'
e
B
P
227
F'
232
E
e
e'
e''

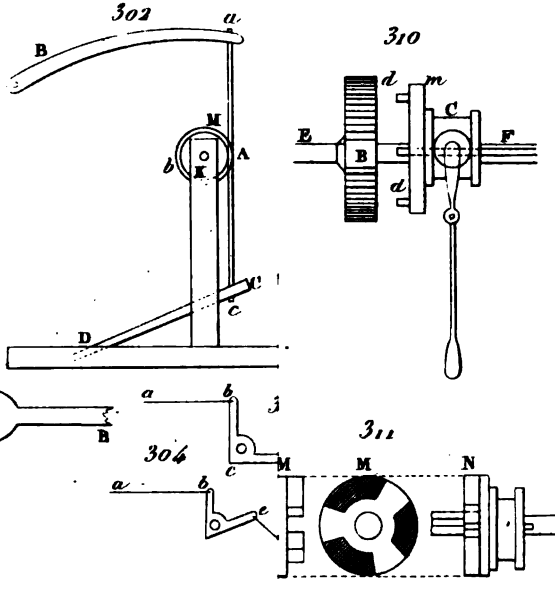
PL. XI.

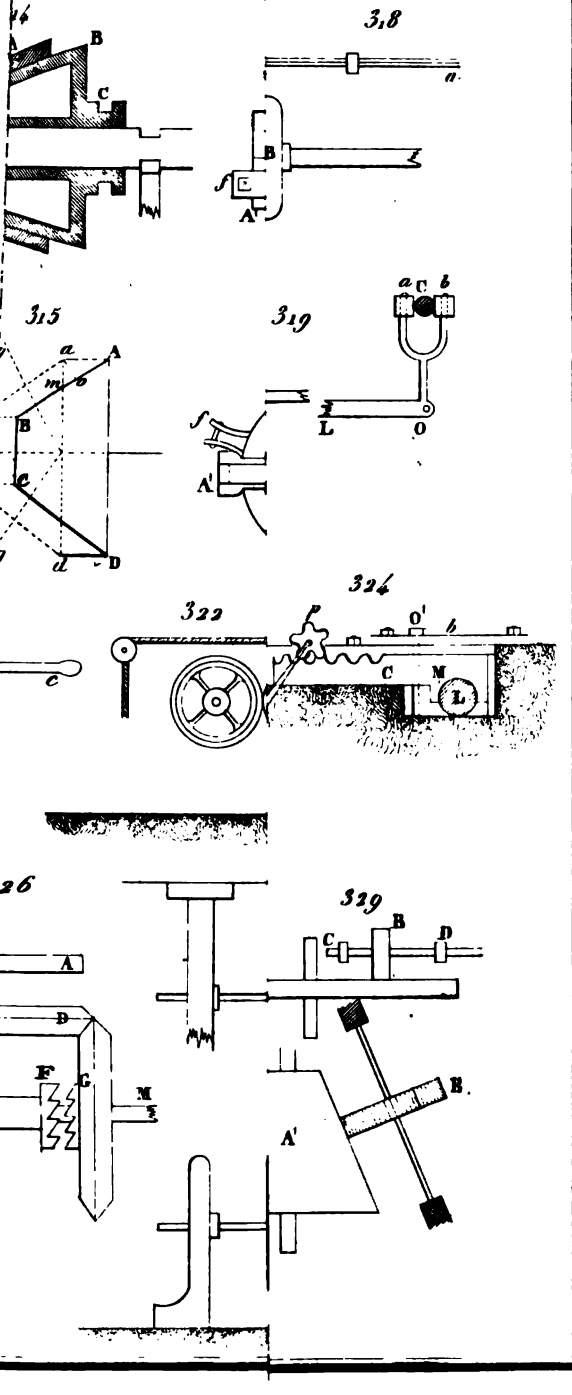


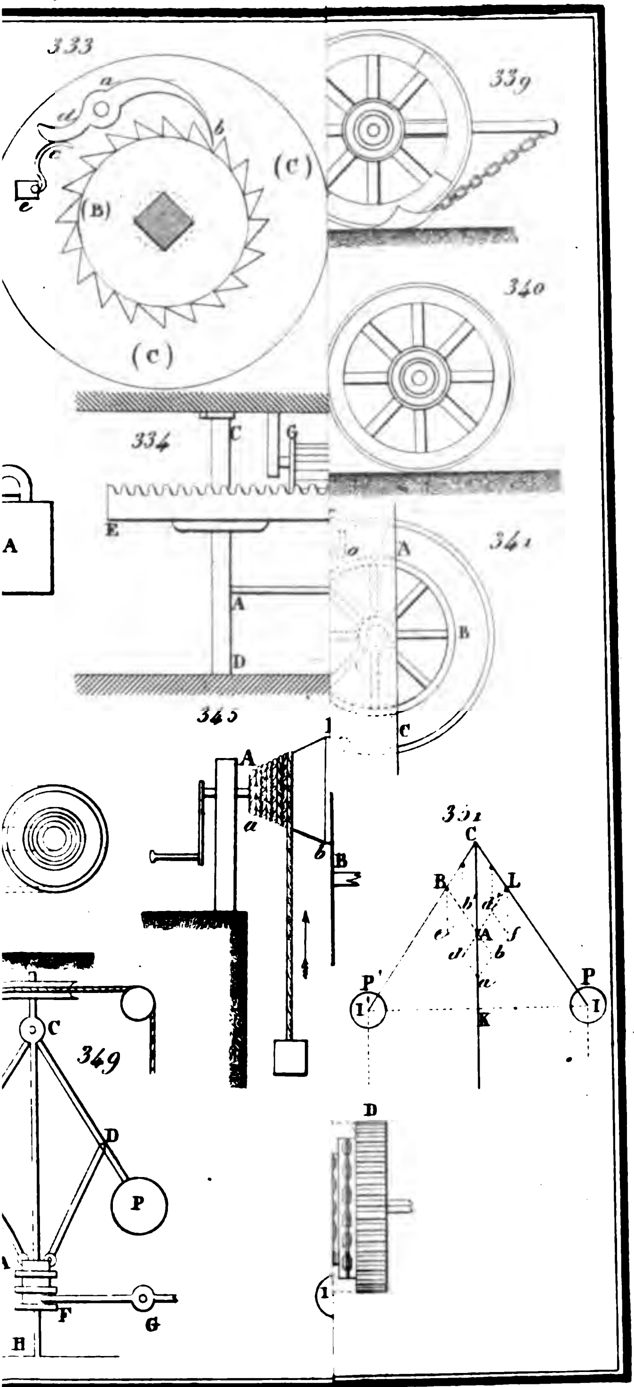

257
261
B
C
c
E
F
a
b
D
A
264
D
b
C
b
B
269
g
g
g
Q
g
C
A
B
P
266
E.
275
D
C
D
h
b
A
272
c
271
B
A
E


d
d
d
281
288
289
C
B
M
D
a
b
F
E
A
P
Q

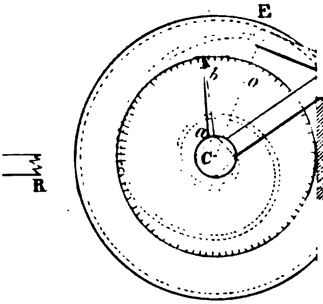

A
F
B
O
299
A'
A
b'
O
A''
b
c'
b''
c
c''
g
O
298
F
O


302
a
B
M
A
b
K
C
D
310
d
m
C
E
B
F
d
a
b
B
304
a
b
c
e
311
M
M
N

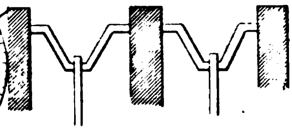

316
318
315
319
324
322
326
329


333
339
340
334
341
345
351
349

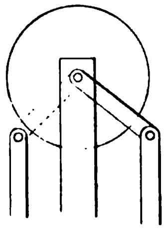
355



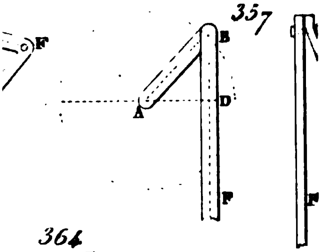
360



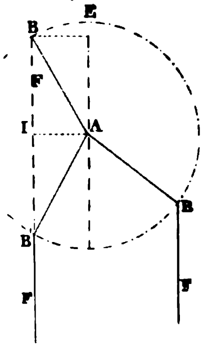
361



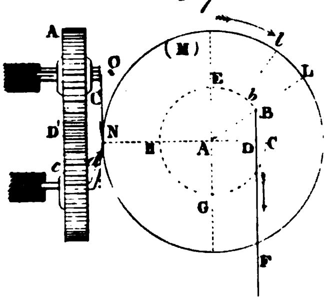
357



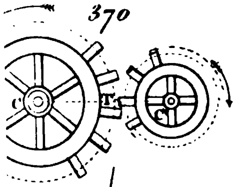
364



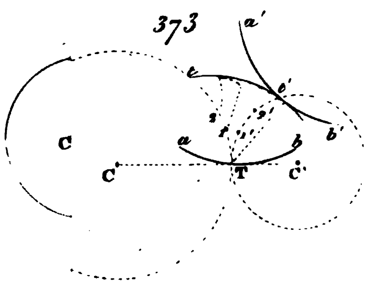
367



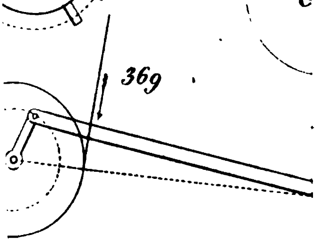
370



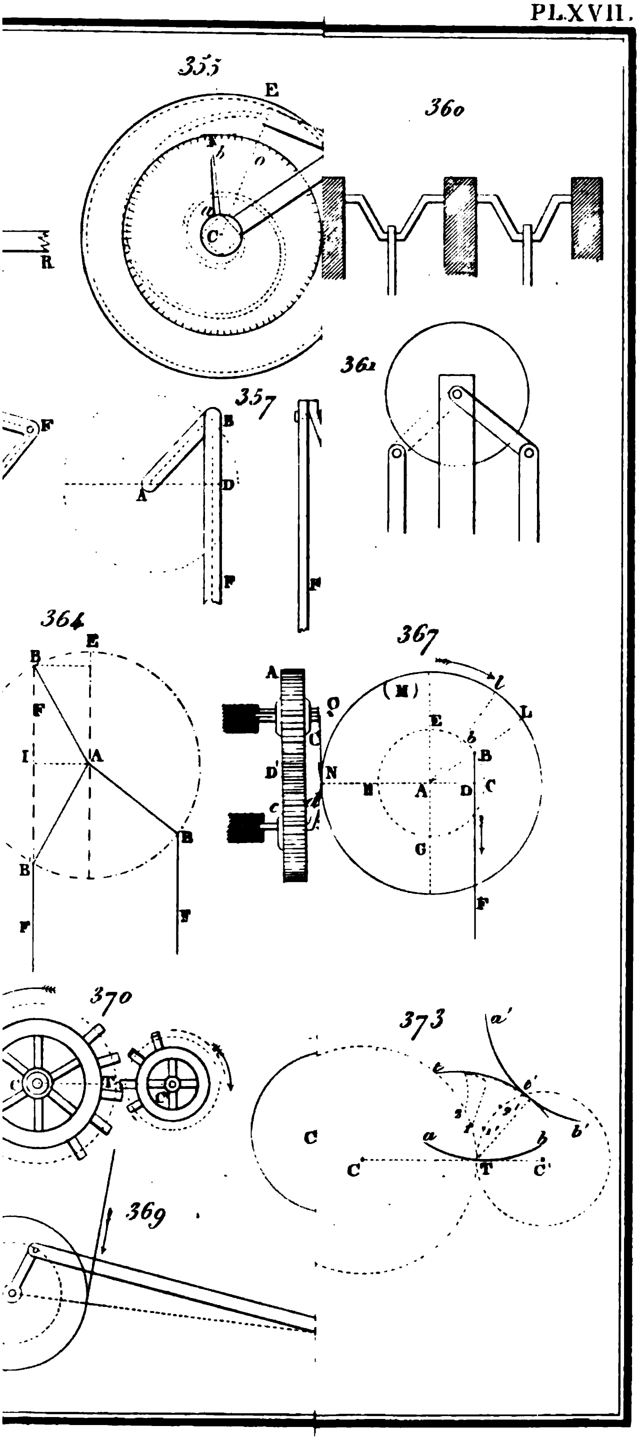
373

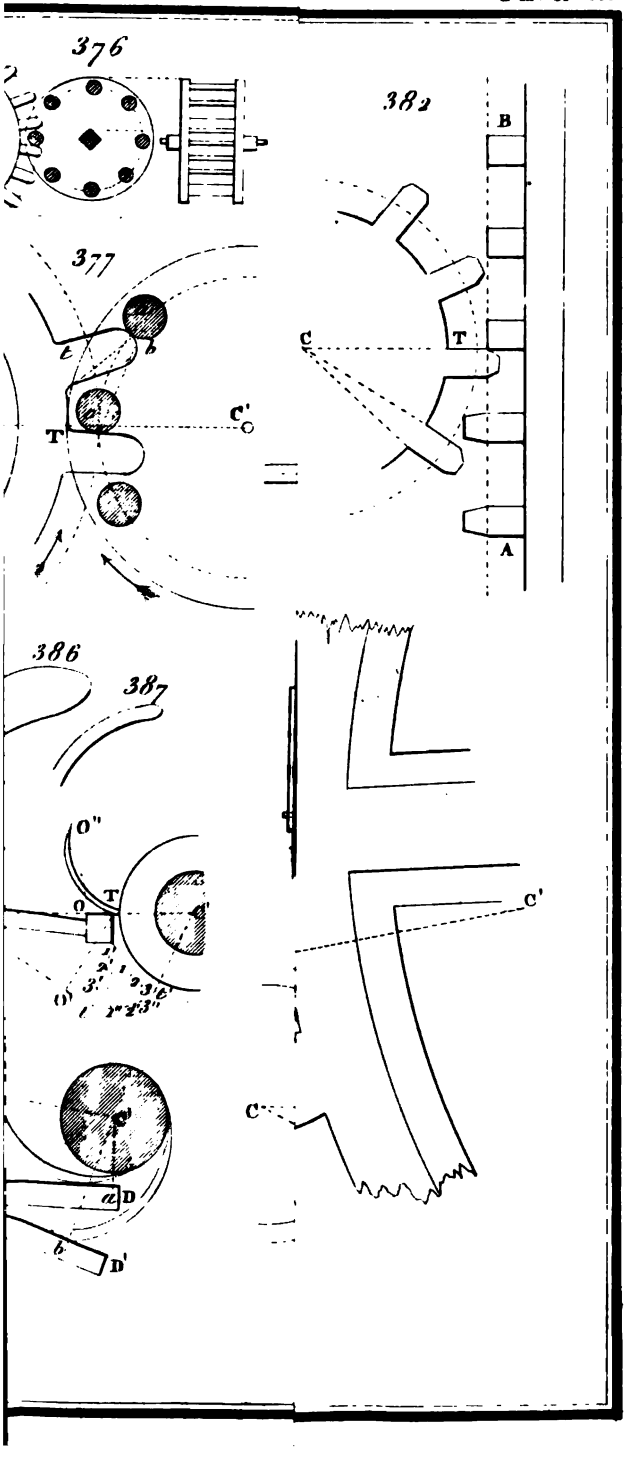


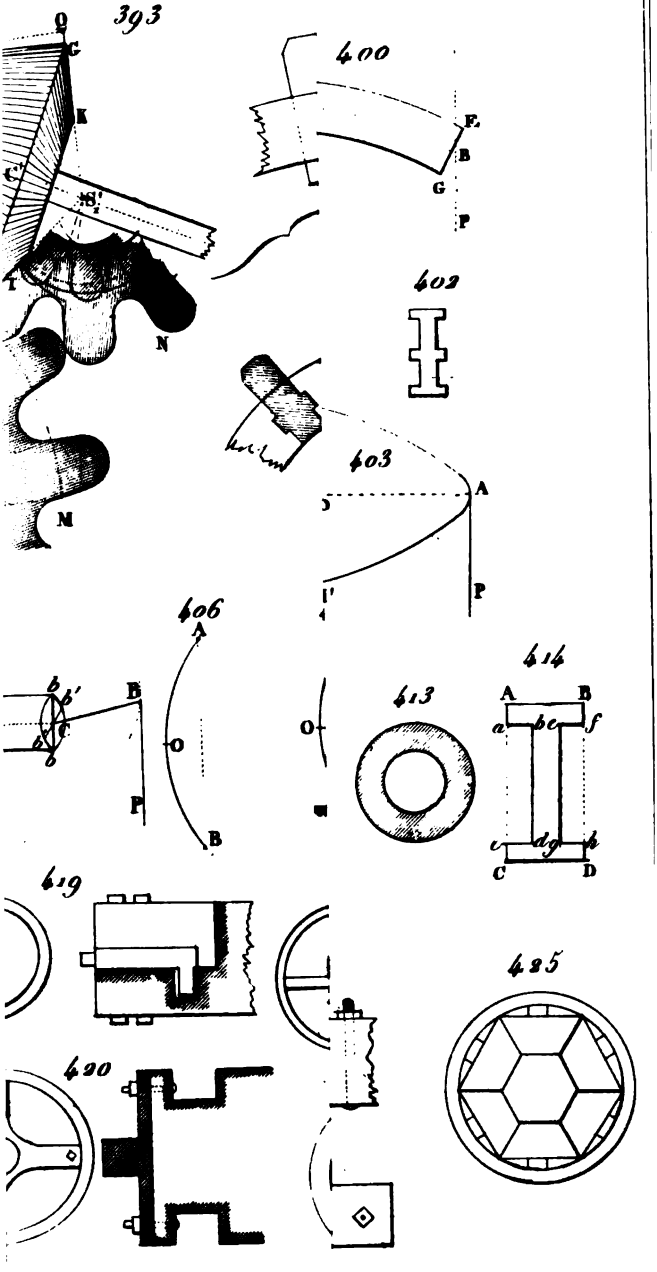
369

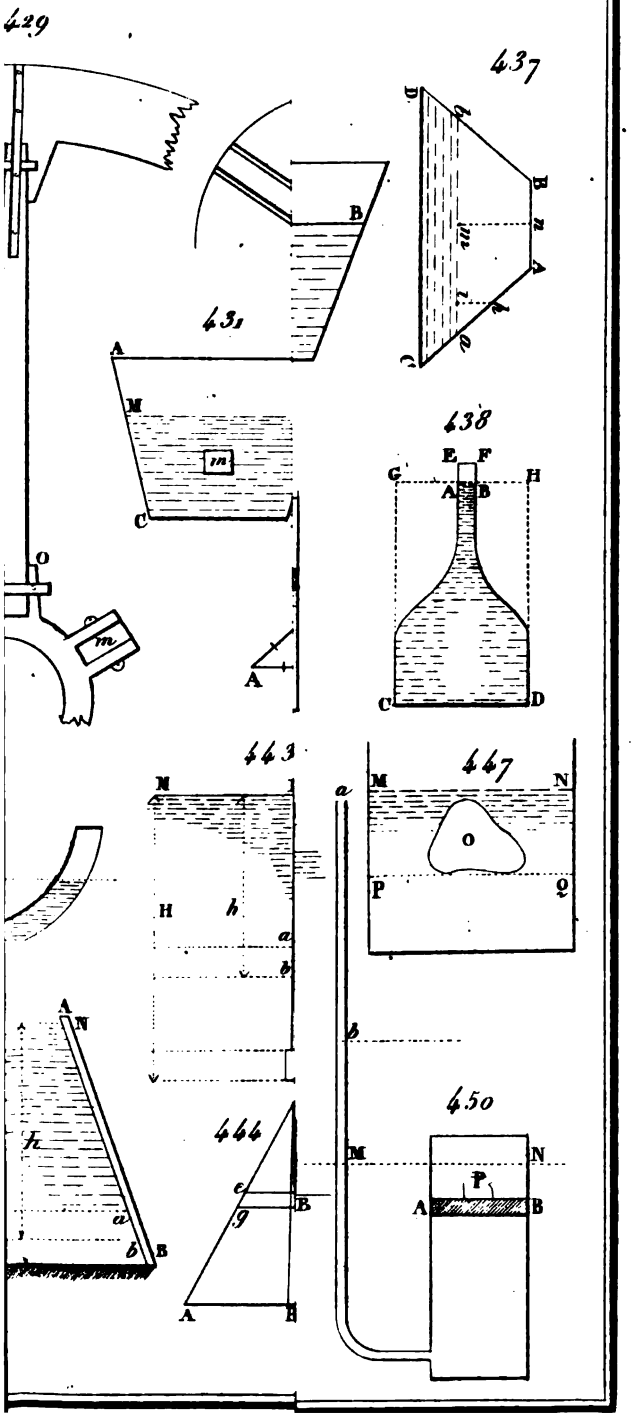


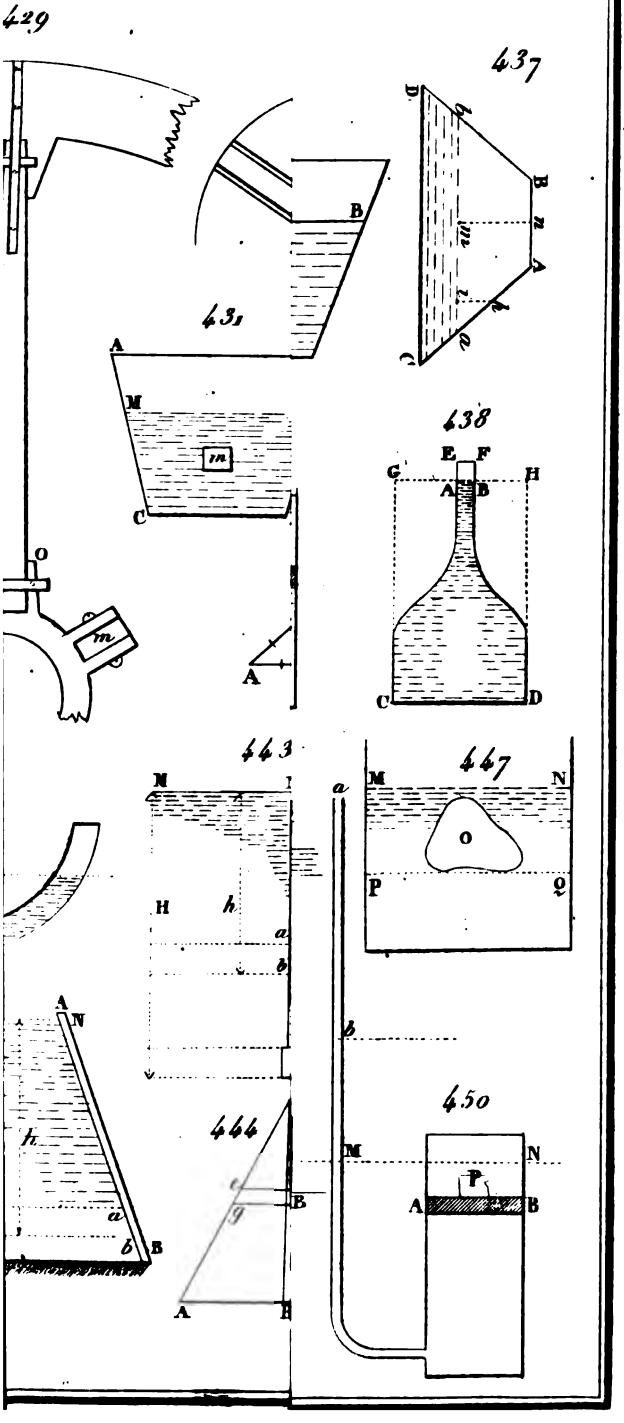
PL.XVII.

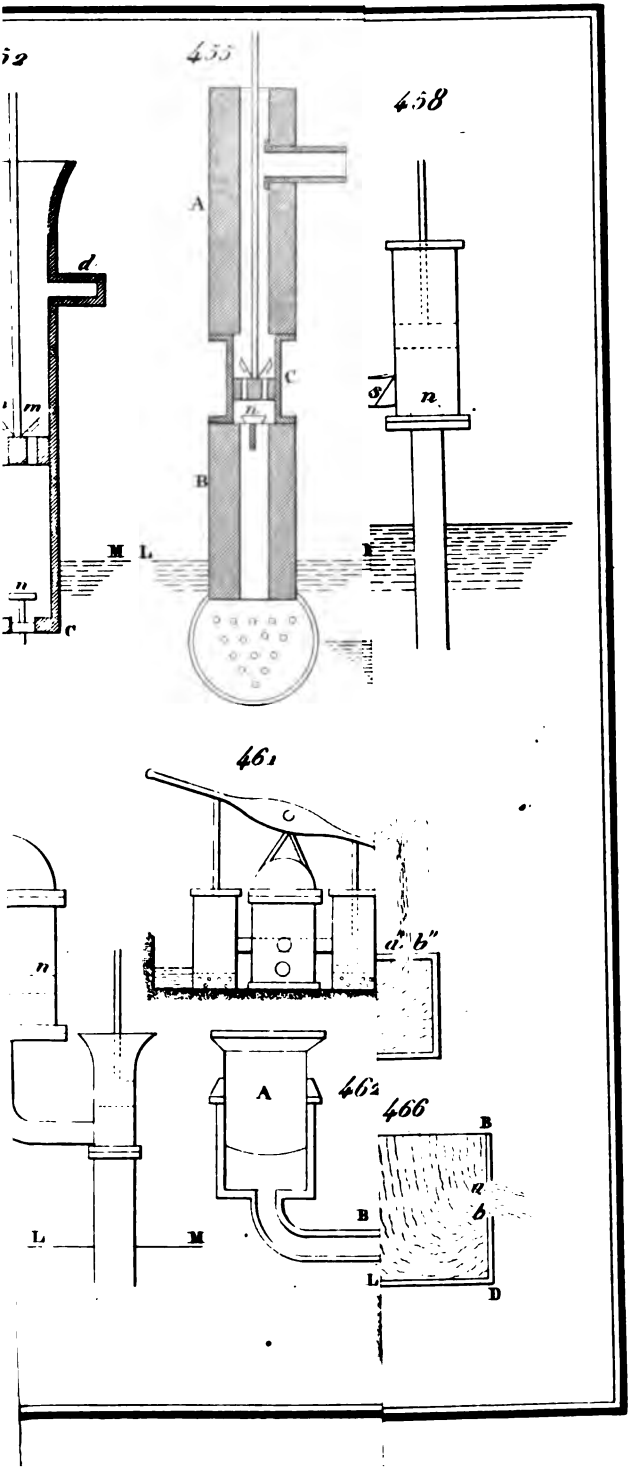

355
E
C
R
360
361
357
B
D
A
F
364
E
B
F
I
A
B
F
367
(M)
L
E
B
N
A
D
C
G
F
370
373
a'
C
C'
T
C'
369

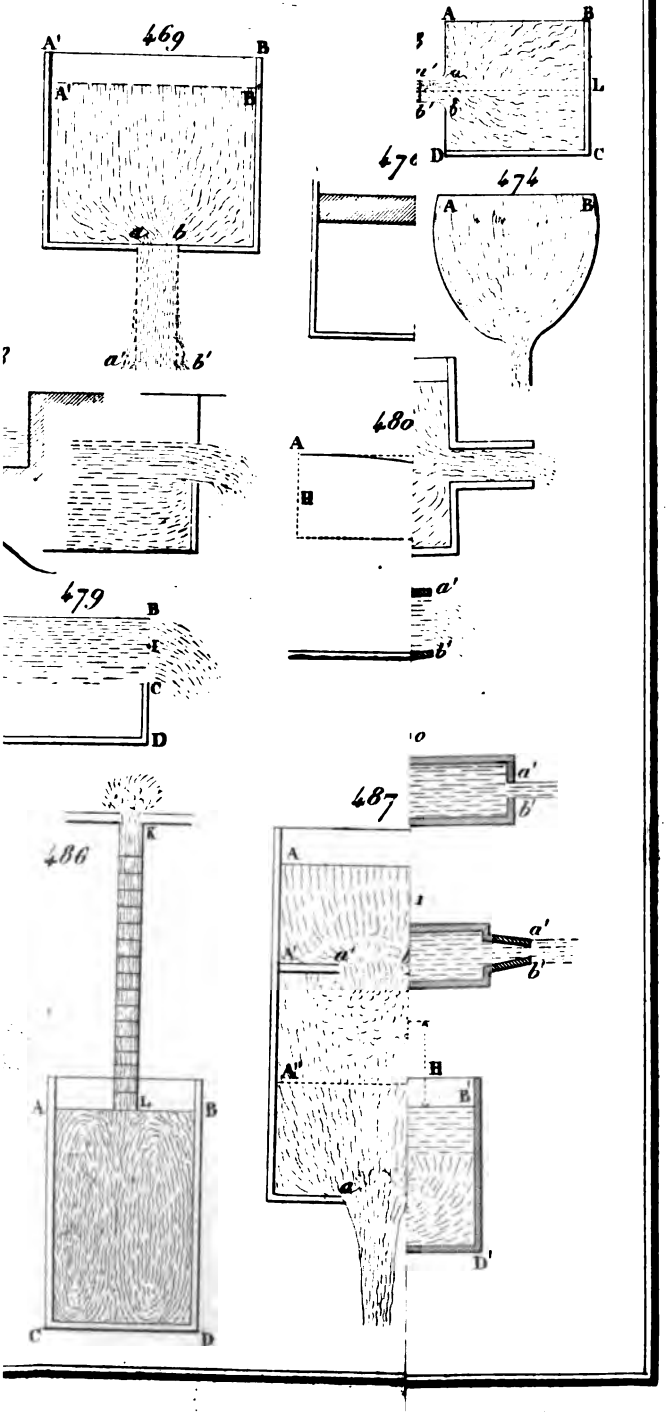

376
382
B
377
C
T
C'
T
A
386
387
O"
O
T
C'
C
a
D
b
D'

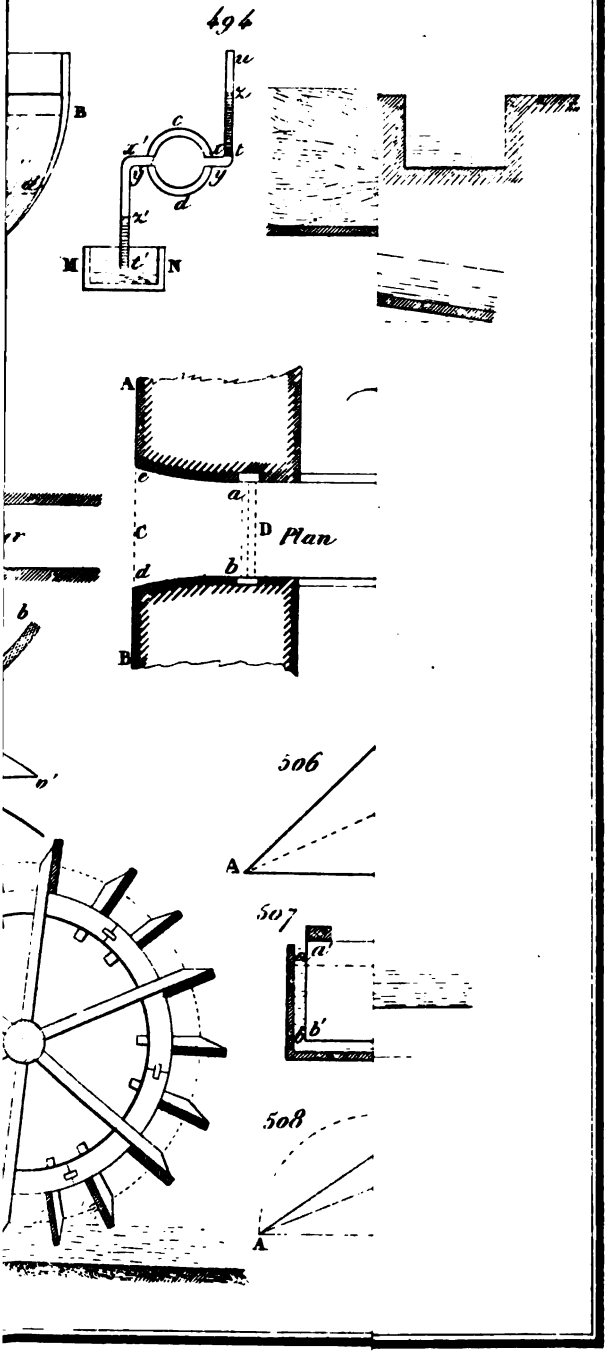

393
Q
C
K
S
T
N
M
400
F
B
G
P
402
403
A
P
406
A
B
O
P
413
414
A
B
C
D
419
420
425

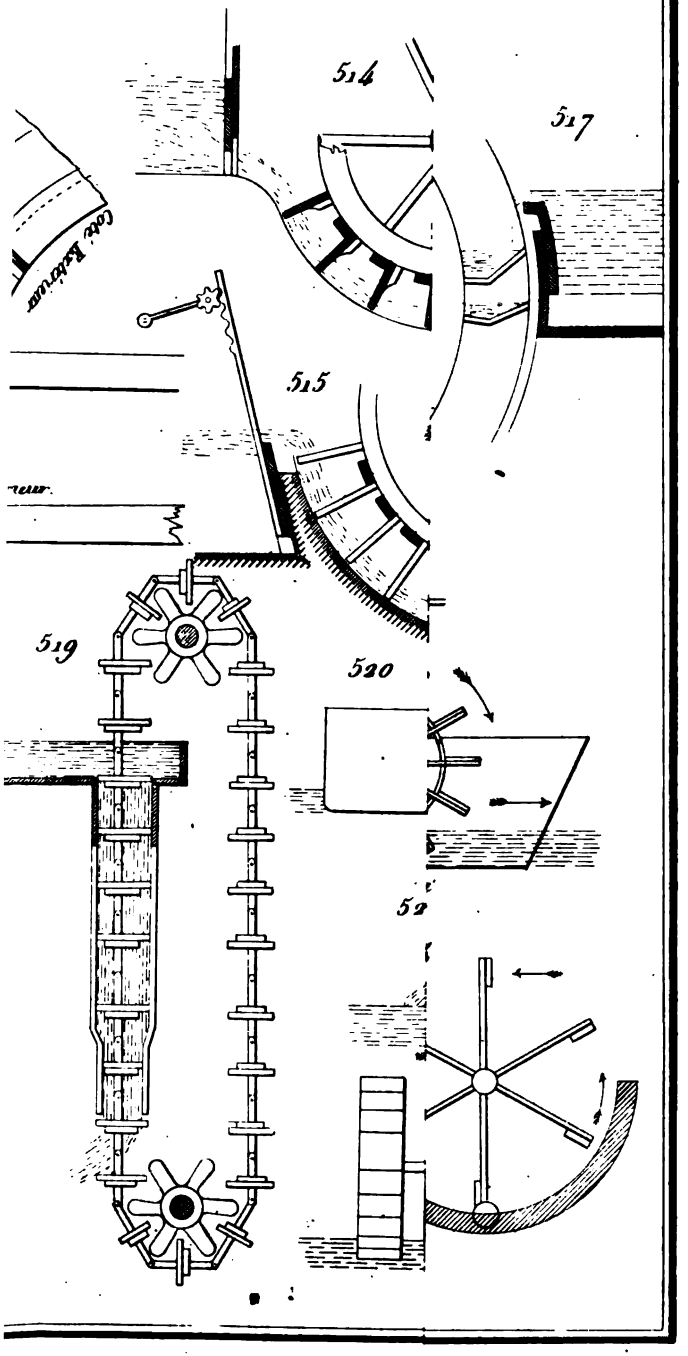

429
437
431
438
443
447
444
450
A
B
C
D
M
N
O
P
Q
E
F
G
H
a
b
c
g
h
m


429
437
D
B
A
C
431
B
A
M
m
C
O
m
A
438
E
F
G
H
A
B
C
D
443
N
H
h
a
b
A
N
h
a
b
B
444
B
A
447
M
N
O
P
Q
a
b
450
M
N
P
A
B

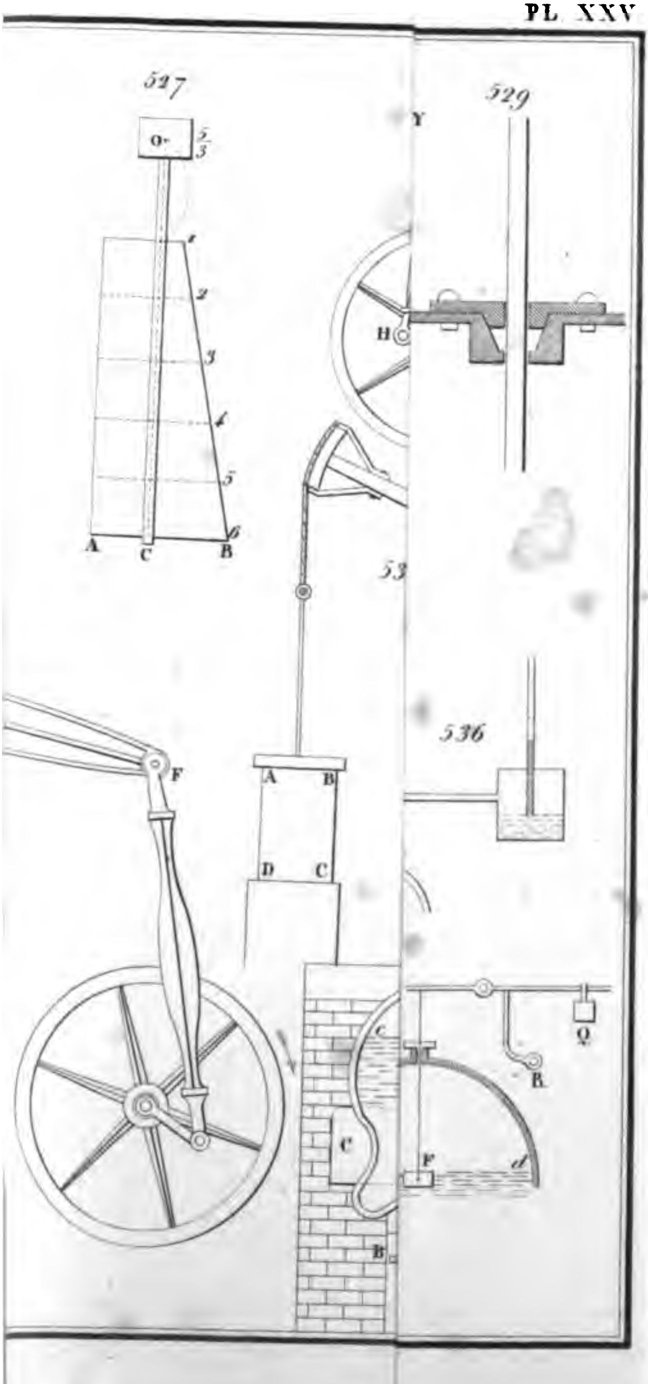

455
458
A
C
n
B
M
L
s
n
d
m
c
461
d" b"
n
A
462
466
B
a
b
L
M
D


469
A'
B
a
b
a'
b'
474
A
B
480
A
B
a'
b'
479
B
C
D
486
A
L
B
C
D
487
A
a'
b'
A'
H
B'
D'


494
B
M
N
A
B
Plan
506
A
507
508
A


514
517
515
519
520
52

PL. XXV



MÉCANIQUE INDUSTRIELLE.

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE

EXPOSANT

LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

POUR DÉTERMINER ET MESURER LES FORCES MOTRICES,

AINSI QUE LE TRAVAIL MÉCANIQUE DES FORCES;

PAR

J. V. PONCELET,

CAPITAINE DU GÉNIE,

MEMBRE DE L'INSTITUT DE FRANCE, ACADÉMIE DES SCIENCES,

PROFESSEUR DE PHYSIQUE MÉCANIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS, ANCIEN PROFESSEUR DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES A L'ÉCOLE SPÉCIALE DE L'ARTILLERIE ET DU GÉNIE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE METZ, ETC.

> Il est, dans la Géométrie et dans la Mécanique, certaines vérités élémentaires, palpables, fécondes, qui sont les premiers et les plus simples rapports des dimensions, des mouvements et des forces. Voilà les vérités dont il importe que chacun se rende un compte raisonné.
>
> DUPIN, DISCOURS SUR LES PROGRÈS DES CONNAISSANCES DE GÉOMÉTRIE ET DE MÉCANIQUE, ETC., 1829, page 3.

Bruxelles.

MELINE, CANS ET COMPAGNIE.

LIBRAIRIE, IMPRIMERIE ET FONDERIE.

1839

A MONSIEUR

LE BARON CHARLES DUPIN,

OFFICIER SUPÉRIEUR DU GÉNIE MARITIME, MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET DE LA CHAMBRE DES DÉPUTÉS, PROFESSEUR DU COURS NORMAL DE GÉOMÉTRIE ET DE MÉCANIQUE APPLIQUÉES AUX ARTS ET MÉTIERS ET AUX BEAUX-ARTS.

MONSIEUR,

En vous dédiant, comme au fondateur et au promoteur de l'éducation industrielle en France, cette publication d'un Cours entrepris à votre invitation et en quelque sorte sous vos auspices, je me rends l'interprète des sentiments de reconnaissance que doivent à vos généreux efforts tous ceux qui désirent sincèrement l'accroissement de notre prospérité nationale, des sentiments que vous a depuis longtemps voués cette portion si intéressante et si éminemment utile des nations civilisées, que vous

avez conviée, sur tous les points de notre belle patrie, à sortir des étroits sentiers de la routine, pour partager les bienfaits d'une instruction positive, préparée par les travaux impérissables des géomètres qui ont illustré les deux derniers siècles et le nôtre.

Je paye, en même temps, aux nobles encouragements, à la constante amitié dont vous n'avez, monsieur, cessé de m'honorer depuis mon début dans la carrière pénible des sciences, un tribut bien cher à mon cœur, et que je me félicite d'avoir une occasion aussi propice de vous adresser publiquement.

Puissiez-vous, monsieur, trouver que cet hommage des efforts que j'ai faits, de mon côté, pour contribuer à faciliter, aux jeunes industrieux, l'entrée de la Mécanique, n'est point indigne de leur être offert comme le développement d'une de vos pensées, et comme un exercice utile sur l'objet des leçons que vous leur avez, le premier, professées avec un véritable succès.

PONCELET

AVANT-PROPOS.

Le plan de cet ouvrage différant, pour la forme et pour le fond des idées, de celui qui a été jusqu'à présent suivi dans les Traités publiés sur la même matière, il y aurait, de ma part, une sorte d'amour-propre et de présomption à ne pas faire connaître les motifs qui, malgré toute l'estime que m'inspirent les excellents travaux de mes devanciers, m'ont déterminé à m'écarter aussi notablement d'une méthode d'enseignement consacrée, en quelque sorte, par l'usage, et dont les avantages incontestés sont le fruit d'une longue expérience.

Chargé, depuis 1825, de professer, à l'école spéciale de l'artillerie et du génie, le Cours de Mécanique appliquée aux machines, j'ai dû approfondir plus particulièrement les théories qui dominent cette branche importante de nos connaissances, et qui en rendent l'étude et les applications le plus facilement accessibles ; je me suis ainsi familiarisé avec une manière de voir qui diffère, à quelques égards, des idées généralement admises dans l'enseignement de la Mécanique élémentaire, et qui se rapproche davantage de la méthode qu'ont adoptée le petit nombre des géomètres qui ont cultivé spécialement la science des machines. Je veux parler du *principe général des forces vives* et des notions qui s'y rattachent, principe qu'il ne faut pas confondre avec celui de la *conservation des forces vives* dû à Huyghens, lequel n'a lieu que sous certaines restrictions particulières, tandis que le premier subsiste, sans conditions quelconques, quand on ne néglige aucune des actions qui peuvent naître, soit de la réaction réciproque des corps du système, soit de la nature de leurs liasons ou de leurs mouvements, soit enfin des forces ou causes étrangères qui feraient changer, à chaque instant, les conditions de cette liaison.

Mais le principe des forces vives n'est lui-même qu'un corollaire

très-immédiat *du principe général de la transmission de l'action ou du travail mécanique des forces,* lequel revient, quant au fond, au *principe de d'Alembert* et à celui des *vitesses virtuelles,* dès qu'on envisage la force d'inertie comme une simple pression, et le *moment virtuel* comme l'expression de la *quantité d'action* ou de *travail instantané* de chaque force, par rapport au mouvement virtuel infiniment petit, qu'on suppose imprimé, au système, d'une manière indépendante et sous la seule condition qu'il puisse le prendre sans que l'action réciproque des différents corps et des véritables forces, relative à l'état réel de repos ou de mouvement, soit aucunement troublée. En effet, le principe de la transmission du travail, appliqué ensuite à ce mouvement réel, et en tenant compte, comme on vient de le dire, de toutes les forces intérieures et extérieures qui peuvent l'empêcher ou le favoriser, conduit immédiatement, par la sommation facile et tout à fait élémentaire des quantités de travail dues, en particulier, aux forces d'inertie, à l'énoncé le plus général du principe des forces vives ou de *l'égalité de la somme des forces vives et du double de la somme algébrique des quantités totales de travail développées, par les différentes forces, entre les positions ou instants extrêmes pour lesquels on considère le mouvement des corps.*

Envisagé sous ce point de vue, le principe de la transmission du travail comprend implicitement toutes les lois de l'action réciproque des forces, sous un énoncé qui en facilite infiniment les applications à la Mécanique industrielle, qu'on pourrait nommer la *Science du travail des forces,* et qui, dès les premiers pas des jeunes élèves dans l'étude, se présente à eux comme un axiome en quelque sorte évident par lui-même, et dont la démonstration leur semble superflue dès qu'ils ont bien saisi ce qu'on entend par *travail mécanique, quantité d'action,* et qu'il leur est clairement démontré que c'est ce travail qui, réduit en unités d'une certaine espèce, est, dans les arts, l'expression vraie de l'activité des forces.

Quoi de plus évident, par exemple, et de plus facile à saisir, au premier aperçu, que ces énoncés : « Le travail de la résultante de

« plusieurs forces égale la somme des travaux partiels que produi-
« sent, ou que pourraient produire, les forces composantes; le tra-
« vail d'une ou de plusieurs puissances qui mettent en mouvement
« et font fonctionner une machine égale la somme des travaux
« particuliers que développent les résistances, de toute espèce,
« opposées à ce mouvement, etc. ? »

Et quand, ensuite, on voit ces propositions se vérifier constamment et rigoureusement dans toutes les applications, quand on les voit s'accorder sans cesse avec les données certaines de l'expérience, et avec le résultat d'autres principes non moins immédiats, non moins irrécusables, l'esprit ne peut se refuser à une conviction entière, à une conviction telle qu'il ne craint plus de s'abandonner aux conséquences variées qui découlent, avec une simplicité admirable, de ces mêmes axiomes dont il a saisi le véritable sens, et apprécié toute la fécondité et la justesse.

Je n'ai pas besoin d'ailleurs d'insister sur l'utilité du principe des forces vives, dans les questions variées de la Mécanique pratique; cette utilité est bien constatée par les heureux résultats qui ont été obtenus, à diverses époques, de son application à la théorie de l'écoulement des fluides, à celle des différentes roues hydrauliques, et, en général, à toutes les théories concernant le jeu et les effets divers des machines. Mais il convient de rappeler ici que c'est plus particulièrement aux travaux de Daniel Bernouilli, de Borda, de Carnot, de Navier, ainsi qu'à ceux de mes anciens camarades à l'École polytechnique, MM. Petit, Roussel-Galle, de Coriolis, Burdin et Bélanger, qu'on doit cette importante application, et les développements les plus clairs, les notions les plus positives sur le principe des forces vives, pris pour base de la science des moteurs et des machines.

En citant ces travaux comme se rattachant plus spécialement à l'ordre des idées qui forment le caractère essentiel de cet ouvrage, je n'oublie aucunement la part qu'ont eue, aux progrès de la Mécanique pratique, les Parent, les de Parcieux, les Smeaton, les du Buat,

les Bossut, les Coulomb, les Monge, les Prony, les Girard, les Arago, les Ampère, les Dupin, les Mongolfier, les d'Aubuisson, les Eytelwein, les Hachette, les Christian et tant d'autres savants distingués qui, par leurs recherches expérimentales, leurs écrits ou leurs leçons, ont puissamment contribué à éclairer, à étendre ou à propager les applications utiles et les saines doctrines de la Mécanique.

Appelé, comme je l'ai déjà dit, à créer, en 1825, le Cours de machines de l'École d'application de l'artillerie et du génie, j'adoptai, sans hésitation, le principe des forces vives et de la transmission du travail; et, mettant à profit tout ce qui avait été jusque-là écrit sur les applications de ce principe, notamment par MM. Navier, Burdin et de Coriolis, je tentai de donner une théorie générale des lois du mouvement des machines, un peu plus complète et plus rigoureuse que celles que l'on connaissait jusqu'alors. Ce sont les bases de cette même théorie, ce sont les notions que je me suis formées, depuis longtemps, sur l'action et le travail mécanique des forces, que j'ai essayé de mettre à la portée des intelligences les plus ordinaires, dans le cours gratuit que la Société académique de Metz m'a, depuis la fin de 1827, chargé de professer aux ouvriers et artistes de cette ville.

J'apprécie parfaitement toute la difficulté d'une tâche que j'ai entreprise dans l'unique désir de répandre parmi la classe industrieuse, et de lui rendre pour ainsi dire familières, des doctrines d'une utilité incontestable, des doctrines qu'elle ne peut ignorer sans préjudice, et qui, jusqu'ici, étaient presque exclusivement le partage du petit nombre des ingénieurs. Mais, ayant pour me guider les écrits des géomètres que je viens de citer, et ne perdant jamais de vue, dans l'exposition des vérités fondamentales de la science, la clarté et la rigueur de démonstration dont nos maîtres en Mécanique nous ont offert de si beaux modèles dans leurs Traités élémentaires, j'ai la confiance de ne m'être point égaré, et d'être compris par tout lecteur qui possède la connaissance des propositions les plus simples de la géométrie.

Les notions fondamentales dont il s'agit composent la matière des dix premières leçons de mon Cours, elles sont accompagnées d'applications nombreuses qui me paraissent propres à en faire ressortir le but et l'utilité. Les unes et les autres doivent être considérées comme une introduction indispensable à l'étude des principes plus généraux de la Mécanique, et de leurs applications spéciales aux différentes questions de la pratique. Je ne leur donnai point d'autre destination, dès la première année du Cours, lorsque je me proposai de professer la Mécanique suivant le plan exposé dans le texte des leçons normales du Conservatoire des arts et métiers ; et j'ai tout lieu de croire que le célèbre auteur de ces leçons approuvera les motifs qui m'ont fait adopter une telle marche, en faveur des résultats avantageux qu'il est possible d'en recueillir.

M. Dupin, lui-même, l'a dit dans un des passages de son beau *Discours sur le progrès des connaissances de Géométrie et de Mécanique dans la classe industrieuse*, passage d'une vérité et d'une justesse frappantes, et que nous avons adopté, sans hésitation, pour servir d'épigraphe à cet ouvrage ; M. Dupin l'a dit : « Il est, dans la Géo-« métrie et dans la Mécanique, certaines vérités élémentaires, pal-« pables, fécondes, qui sont les premiers et les plus simples rap-« ports des dimensions, des mouvements et des forces. Voilà les « vérités dont il importe que chacun se rende un compte rai-« sonné, etc. » Plus loin il a ajouté : « Pour obtenir de grands et « prompts résultats dans le développement de l'industrie d'un peu-« ple, je l'ai dit, je le redis encore, il faut répandre, avec largesse, « et ces vérités élémentaires et ces méthodes fondamentales qui « réunissent à la fois la simplicité, la rigueur et la facilité. »

N'est-ce pas, en effet, sur les premières notions, sur les notions si abstraites de la force, du temps et du mouvement, qu'il faut d'abord insister ? Ne sont-ce pas les propriétés physiques les plus simples des corps, les déductions les plus élémentaires relatives au changement d'état qu'ils subissent par l'action des forces, et les lois

de leurs résistances diverses qu'il faut d'abord bien faire connaître? Et la Mécanique rationnelle est-elle autre chose qu'une science d'abstractions avant l'instant où on essaye de l'introduire, en quelque sorte, dans le monde physique et matériel tel que nous le présentent les ateliers des arts industriels? Enfin n'avoue-t-on pas, tous les jours, qu'un espace immense sépare la Mécanique, telle qu'on l'enseigne dans nos écoles, de ses applications mêmes les plus usuelles et les plus simples? Là c'est la compressibilité ou la flexibilité naturelles des corps; ici c'est leur inertie, ce sont les résistances, de toute espèce, qu'ils opposent au mouvement et à l'action des forces, qui viennent, si non démentir complétement, du moins modifier tellement les déductions théoriques, que les résultats diffèrent souvent du simple au quadruple ou au quintuple. Et que deviendraient nos jeunes industrieux si, abandonnant, faute de temps, l'étude de la Mécanique à l'instant où ils ont un peu appris de *statique* ou de *dynamique*, ils allaient reporter, dans leurs ateliers, les idées incomplètes et parfois fausses qu'ils auraient acquises sur l'équilibre absolu et le mouvement idéal des corps parfaitement durs ou parfaitement élastiques, sur les machines simples, qui ne sont, en effet, que des machines géométriques, la forme extérieure étant la seule chose qui leur reste?

A la vérité, les artistes sont peu enclins à prendre les abstractions pour des réalités, ils ne s'en dégoûtent même que trop facilement dès le début; et, en supposant qu'ils se soient laissé séduire pendant un temps, le danger ne serait pas grand pour des hommes qui, journellement, étudient, par le tact et par une longue pratique, les véritables qualités physiques et mécaniques de la matière. Toujours est-il qu'ils auraient perdu un temps précieux, et que les demi-connaissances qu'ils pourraient avoir acquises, loin de leur être profitables, ne feraient que leur inspirer une sorte d'éloignement et de mépris pour les vérités positives de la science.

On conçoit bien, d'après cette manière de voir, que je veux, pour nos jeunes élèves, une instruction solide, appuyée de données

positives et de chiffres exacts, nourrie de principes d'une application immédiate dans les arts, une instruction telle enfin qu'elle puisse porter des fruits dès les premiers pas de l'élève dans l'étude, et à quelque époque que la nécessité ou son peu de persévérance lui fasse quitter l'enseignement de la Mécanique. Et cette opinion, que je me permets de jeter en avant, à l'instant même où tant d'habiles professeurs, pour répondre à l'appel de M. Dupin, tentent d'ouvrir les voies les plus courtes et les plus faciles à l'enseignement de la classe industrieuse, cette opinion, dis-je, ne pourra être considérée comme une injuste agression envers les doctrines jusque-là reçues, mais bien comme une justification des moyens que j'ai cru utile de mettre en usage pour atteindre le but désiré. Elle servira aussi, j'espère, à me mettre à l'abri des critiques qui pourraient désapprouver que j'aie fait précéder la Mécanique de notions élémentaires sur la physique des corps, et que j'aie composé un volume entier sur le développement de principes en apparence très-simples, lorsque ces principes occupent à peine quelques pages dans les Traités ordinaires; de ce qu'enfin j'aie accordé tant d'espace à des applications qu'on a coutume de rejeter dans les recueils spéciaux, et qui semblent trop complexes pour servir de simples exercices numériques.

Loin de craindre, en effet, d'en avoir trop dit sur les applications, je regrette, au contraire, que le temps m'ait manqué pour donner tous les développements nécessaires à celles qui concernent l'action des moteurs animés ou inanimés, les divers frottements ou résistances nuisibles des corps, et la force de réaction qu'ils opposent directement à la traction, à la compression, à la rupture, etc. Ces applications eussent, en quelque sorte, complété le tableau et l'étude des différentes forces que présentent les phénomènes de la Mécanique industrielle; elles eussent servi à donner aux élèves une connaissance substantielle de ces causes de mouvement, dont la nature intime échappe à notre intelligence quoiqu'elle se manifeste à nous par des effets matériels si variés, si

pective des moniteurs, etc.; voilà, en peu de mots, ce qui constitue la méthode de M. Bardin. Elle est pénible sans doute pour le professeur, mais, en revanche, elle porte d'excellents fruits, et, je me plais à le redire, on lui doit, en majeure partie, le bien qu'a pu produire, dans la ville de Metz, l'enseignement de la Mécanique.

Il n'est aucun lecteur qui, en parcourant cet ouvrage, ne s'aperçoive, de suite, que j'ai dirigé tous mes efforts vers les moyens de ramener les lois abstraites de la Mécanique dans le domaine de la Géométrie, et d'en rendre ainsi l'accès facile à quiconque joint, à la connaissance des propriétés des figures semblables, celle du tracé des lignes assujetties à des lois déterminées ou données par des tables: or, M. Bardin, sentant bien l'importance de cette manière d'envisager l'étude de la Mécanique, avait eu le soin d'exercer particulièrement ses élèves aux tracés dont il s'agit. Que ne devions-nous donc pas attendre de sa coopération, si une maladie cruelle n'était venue malheureusement interrompre ses travaux, et ajourner ses succès! Déjà il était convenu, entre nous, que la partie descriptive des leçons de Mécanique serait immédiatement suivie de l'exécution et du tracé effectifs de chacun des détails qui constituent les éléments des machines et des outils; déjà M. Bardin et moi nous nous étions occupés des moyens de choisir et de réunir ceux de ces éléments que la théorie et l'expérience indiquent comme les plus parfaits; mais la nécessité veut que cet utile projet soit remis à une époque plus favorable; car je n'ai ni le temps ni la santé nécessaires pour remplir seul une pareille tâche, et personne, plus que M. Bardin, n'est capable de le faire avec succès.

Je n'oublierai pas, non plus, que je dois le dessin des planches jointes à cet ouvrage, à l'obligeance de M. Bardin, neveu, jeune élève sortant de l'École des mines, qui a suivi nos Cours industriels de cet hiver, et dont les talents acquis et la persévérance ont déjà obtenu une juste récompense. Je le prie de recevoir ici mes publics remercîments.

COURS

DE

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE.

PRÉLIMINAIRES.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LA CONSTITUTION ET LES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES CORPS.

ÉTATS PRINCIPAUX DES CORPS.

1. Les corps se présentent sous trois *états* principaux qui en comprennent une foule d'autres intermédiaires.

Corps à l'état solide, ou *solides* : tels sont les pierres, les bois, certains métaux, etc., qui résistent plus ou moins à la pression.

Cet état ne présente rien d'absolu : certains corps solides sont *durs, cassants, fragiles*, tels que le verre, l'acier trempé, le marbre, etc. ; d'autres sont *mous*, *ductiles*, tels que le beurre, l'argile ou terre glaise, le plomb, l'or, le cuivre, le fer (principalement à chaud). On dit aussi des métaux ductiles qu'ils sont *malléables*.

La *ductilité* ou la *malléabilité* de certains métaux est de la plus haute importance pour les arts industriels ; elle réside essentiellement dans la qualité qu'ont ces corps de pouvoir changer de forme d'une infinité de manières sans se rompre ni se diviser : nous verrons bientôt des exemples de la grande ductilité de l'argent, de l'or et du platine.

2. *Corps à l'état liquide*, ou *liquides ;* tels sont l'eau, le vin, les

liqueurs en général, le métal appelé *mercure* ou *vif-argent*, etc.; lesquels se distinguent des corps solides par l'extrême mobilité de leurs parties. Cette mobilité s'observe à divers degrés dans les liquides : elle est très-grande dans les éthers, l'alcool ou l'esprit-de-vin rectifié; elle l'est moins dans l'eau, le vin; elle l'est encore moins dans l'huile, les sirops, les graisses et les métaux fondus qui coulent difficilement, qui *filent* en tombant dans l'air au lieu de se diviser comme l'eau. On distingue cet état particulier des liquides en disant qu'ils sont *visqueux*, ou qu'ils ont de la *viscosité*. Enfin, un corps liquide peut se trouver dans un état très-voisin de celui des corps solides mous; c'est celui des *pâtes* en général ou des *corps pâteux*.

3. *Corps à l'état gazeux*, nommés *gaz* et *vapeurs* : cette classe comprend *l'air* qui nous environne de toutes parts, dans lequel nous vivons, et tous les corps analogues qu'on nomme pour cette raison *aériformes*, corps qu'il ne faut pas confondre avec les *vapeurs condensées ou brouillards*; ceux-ci étant simplement formés de bulles, de gouttelettes de liquide très-petites et suspendues dans l'air.

On nomme spécialement *vapeurs*, les gaz qu'on obtient des liquides, lorsqu'on les chauffe dans des vases clos de toutes parts; elles sont presque toutes invisibles comme l'air : telle est, par exemple, la vapeur d'eau qui se forme dans l'intérieur des chaudières des machines à feu.

L'*oxygène* ou *air vital*, qui entretient essentiellement la combustion des corps et la respiration des animaux; l'*azote*, dont le mélange avec l'oxygène constitue l'air ordinaire et sert à modérer les effets de celui-là, mais qui, employé seul, ne peut entretenir ni la combustion ni la respiration; l'*hydrogène* ou *air inflammable*, qui, à l'aide d'une certaine chaleur, se combine avec l'oxygène de l'air, et produit la flamme qui éclaire nos habitations; l'*acide carbonique*, résultant de la combustion du charbon pur (carbone) ou de l'union de ce dernier avec l'oxygène, et dont la présence se fait sentir dans les chambres closes où brûle du charbon, dans les lieux où fermentent les raisins, le vin, etc., sont autant de gaz.

L'existence, la matérialité de l'air, des gaz et des vapeurs, est prouvée par toutes sortes de faits : enfermés dans des enveloppes flexibles et imperméables, ou qui ne se laissent pas traverser, par exemple dans une vessie, ils résistent à la pression comme les corps

solides ordinaires. — Un verre renversé étant plongé dans l'eau, l'air qu'il contient ne cède point sa place au liquide, mais celui-ci remonte et remplit le verre dès l'instant où l'on pratique, à sa partie supérieure, une ouverture qui permette à l'air de s'échapper. Les vents, les ouragans qui ne sont que de l'air en mouvement, renversent des arbres et des maisons comme le feraient des torrents d'eau ; l'air d'ailleurs s'oppose, aussi bien que cette dernière, au mouvement des corps solides, et c'est ce qu'on nomme sa *résistance*. Enfin, on sait encore que le vent est employé comme moteur des machines de l'industrie, et qu'il en est de même de la vapeur d'eau, quoique dans des circonstances bien différentes.

4. *Atmosphère*. Nous avons insisté principalement sur l'air, parce que c'est le gaz le plus universellement répandu sur notre globe, qu'il l'enveloppe tout entier bien au delà des plus hautes montagnes ; que tous les corps y sont plongés, et qu'il joue un rôle essentiel dans tous les phénomènes naturels et dans ceux de la Mécanique industrielle. Remarquons d'ailleurs que cette masse d'air immense dans laquelle nous vivons et sommes plongés, se nomme *atmosphère ;* ce qui a fait donner à l'air lui-même le nom *d'air atmosphérique*, pour le distinguer des autres gaz qu'on nomme quelquefois aussi des *airs*.

5. *Fluidité, changements d'état des corps*. Les liquides, les gaz et les vapeurs, se nomment en général des *fluides*, d'un mot latin qui signifie *couler ;* les corps, comme nous l'avons dit, sont plus ou moins fluides, ils ne possèdent pas tous au même degré la *fluidité*.

Un grand nombre de corps connus peuvent, au moyen de la chaleur et sans subir aucune altération *intime* ou intérieure, prendre successivement l'état solide, liquide et gazeux : telle est l'eau, qui est solide à l'état de glace et de neige, liquide dans son état le plus ordinaire, gazeuse ou à l'état de vapeur quand on la chauffe dans des vases clos. On nomme *fusion, liquéfaction*, le passage de l'état solide à l'état liquide ; *vaporisation, volatilisation*, le passage de l'état solide ou liquide à l'état de vapeur ; enfin, *condensation*, le retour de ce dernier état aux précédents, et *solidification, congélation*, celui de l'état liquide à l'état solide. Certains corps ne sont susceptibles que de prendre deux de ces trois états, du moins par les moyens jusqu'ici connus ; il en est d'autres qui ne se présentent constam-

vent aller au delà encore; mais s'ensuit-il que les parties des corps soient divisibles indéfiniment? Les phénomènes de la chimie semblent prouver le contraire.

Dans la multitude presque infinie des combinaisons et des transformations possibles des corps, la matière sort intacte et avec toutes ses qualités primitives quand on l'a isolée convenablement. S'il n'en était pas ainsi, tout finirait par changer de nature et d'aspect sur notre globe, tout s'y anéantirait sans retour, et les lois immuables qu'on y observe depuis tant de siècles, cesseraient bientôt d'y régner.

Les dernières parties de la matière, qui ne sont divisibles ni altérables en aucune manière, se nomment *atomes*, et l'on appelle *molécule*, *particule*, l'ensemble de plusieurs atomes unis entre eux et formant un groupe.

POROSITÉ DES CORPS.

10. *Pores, volume réel, volume apparent.* On nomme en général *pores* les intervalles compris entre les atomes, les particules et les divers groupes de particules qui composent les corps. Les premiers sont tout à fait imperceptibles; quant aux derniers, on peut, dans bien des cas, s'assurer de leur existence. — L'éponge offre l'exemple de pores de diverses grandeurs.

L'espace occupé par la matière propre d'un corps est ce qu'on nomme son *volume réel*.

L'espace limité par l'enveloppe extérieure d'un corps est son *volume apparent*.

La différence du volume apparent au volume réel est le volume des pores. Ainsi, plus le volume apparent diminue, plus il se rapproche du volume réel; c'est ce qui a lieu, par exemple, dans l'éponge, qu'on peut comprimer jusqu'à un dixième, un vingtième de son volume primitif.

11. *Tissus, corps organiques.* La porosité est manifeste dans une infinité de corps qui se laissent pénétrer par les fluides : tous les tissus, les étoffes, les cuirs, les bois sont dans ce cas, et c'est sur cette propriété qu'est fondé l'emploi des *filtres*. — Les bois augmentent de poids et gonflent par l'humidité, ils se retirent sur eux-mêmes et diminuent de poids par la sécheresse, ainsi qu'on le voit

dans les planchers, portes et lambris de nos habitations; c'est pour éviter ces effets, autant que pour préserver les bois de la destruction, qu'on les recouvre de vernis ou de goudrons. — En insérant des coins de bois bien sec, dans une rainure pratiquée autour des blocs de pierres à extraire pour en former les meules de moulins, et en les humectant ensuite, ils produisent par leur gonflement des efforts qui suffisent pour détacher ces blocs des massifs qui les renferment. — Les cordes mouillées augmentent également en diamètre et diminuent en longueur; de là un moyen non moins puissant, employé par les anciens pour soulever d'énormes fardeaux.

Pierres. Certaines pierres, telles que le grès ou pierre de sable, servent de filtres comme les tissus; toutes augmentent de poids quand on les expose à l'humidité; sorties fraichement des carrières elles sont humides, ce qui rend possible la taille même des plus dures, ainsi qu'il arrive, entre autres, pour la pierre à fusil.

Métaux. Les métaux eux-mêmes se laissent pénétrer par les fluides; c'est ce que prouve l'expérience qui a été faite à Florence, par les académiciens de *la Crusca*, sur une boule d'or, mince, remplie d'eau, et qui, soumise à une forte pression, laissait suinter le liquide par tous ses pores; expérience répétée depuis pour d'autres métaux.

12. *Preuve générale de la porosité.* Cependant il n'en est pas ainsi de tous les corps; le verre, en particulier, paraît être absolument imperméable aux liquides et aux gaz, et c'est ce qui le rend précieux dans une foule de circonstances; mais, comme il sera bientôt prouvé que tous les corps indistinctement, soit solides, soit fluides, diminuent de volume par la compression et le refroidissement, il demeure établi que tous aussi ont des pores entre leurs atomes et molécules.

DE LA COMPRESSIBILITÉ DES CORPS.

13. *Définition.* La compressibilité des corps est la propriété qu'ils ont tous d'être *réduits*, quand on les comprime, à un moindre *volume apparent*.

Tissus. Les tissus naturels et ceux des arts, tels que l'éponge, le cuir, les bois, les étoffes, qui sont très-poreux, sont aussi les plus compressibles des corps solides; cette propriété sert à en extraire les liquides qu'ils contiennent. Les étoffes mouillées, le papier sorti

fraîchement de la cuve de fabrication, la betterave réduite en pulpes, abandonnent, sous l'action de la presse, les liquides renfermés dans leurs pores.

Pierres. On sait que les pierres empilées dans les colonnes et les murailles de nos édifices, s'affaissent, se tassent ou se compriment et s'écrasent même sous une charge considérable ; c'est ce que prouve en particulier l'accident survenu aux piliers qui supportent la coupole du Panthéon ou église Sainte-Geneviève, de Paris.

Métaux. Quand on les frappe à coups de marteau, de mouton, de balancier, ils *s'écrouissent,* ils deviennent plus compacts, leur volume est réduit ; c'est ce qui arrive en particulier dans le battage des monnaies.

Liquides. Ils sont en général beaucoup moins compressibles que les corps solides. — L'eau renfermée dans un canon de bronze de 8 pouces d'épaisseur (8 cent.), et comprimée fortement au moyen d'un *piston,* fait éclater la pièce avant que son volume ait diminué de $\frac{1}{20}$. Cette diminution de volume est seulement de $\frac{46}{1000000}$ pour chaque augmentation de pression de $1^{kil},033$ par *centimètre carré* de la surface de la *base* du piston, et il faut une pression de 1033 kilogr. ou 1000 fois aussi forte, pour que la pièce éclate *.

14. *Principe de l'égalité de pression des fluides.* Un principe très-important, découvert par Pascal, est celui de la répartition uniforme ou de l'*égalité* de la *pression* exercée par les liquides, en tous sens et *perpendiculairement* aux parois des vases qui les contiennent : ainsi, par exemple, dans l'expérience ci-dessus, la pression du liquide sur chaque centimètre carré de la *base* du piston, a lieu aussi sur chaque centimètre carré de la surface du fond et des parois cylindriques de la pièce ; ce principe qui sert de fondement à la construction des presses hydrauliques, s'étend d'ailleurs aux fluides aériformes dont il va être question. Il se démontre en pratiquant une ouverture dans une partie quelconque des parois, et la remplissant par un piston ; ce dernier est refoulé avec un effort qui est à celui de l'autre piston, dans le rapport de sa surface en

* Nous verrons plus loin comment la pression peut se mesurer à l'aide des poids ; il ne s'agit ici que d'énoncer des faits, des données de l'expérience. Voyez d'ailleurs les numéros suivants.

contact avec le liquide, à celle de la surface pareille du premier piston.

Par exemple, si la surface de la base du premier piston est de 5 centimètres carrés, et la pression qu'il supporte 66 kilog., tandis que la surface de base de l'autre piston est de 125 centimètres carrés, la pression exercée perpendiculairement à cette dernière sera de $\frac{125 \times 66}{5} = 1650$ kilog.

15. *Gaz.* Ils sont les plus compressibles de tous les corps. — Quand on refoule de l'air, au moyen d'un piston, dans un tube cylindrique fermé par un bout (pl. I, fig. 1), par exemple, dans le corps de pompe d'une seringue ou du *briquet à air*, dit *pneumatique*, il peut être réduit, par le seul effort de la main, au dixième, au vingtième de son volume primitif; ce volume diminue même à mesure qu'on augmente de plus en plus l'effort ou la pression; mais il ne peut se réduire à rien en aucune manière, attendu l'inaltérabilité, l'*impénétrabilité* des molécules de l'air ou des gaz; il y a donc une limite nécessaire à la compression. Quand on diminue ou qu'on cesse tout à fait la pression, le piston revient progressivement vers sa position primitive; et si, le tube étant prolongé convenablement au-dessus du piston, on éloigne ce dernier progressivement du fond, l'air se répand ou s'étend au-dessous, en occupant un espace de plus en plus considérable, sans qu'il paraisse y avoir de limite à cette augmentation de volume, qu'on appelle *expansion* des gaz, parce qu'en effet ils tendent continuellement à se répandre en tous sens, et à presser également (14) les parois des vases qui les contiennent.

16. *Loi de la compression des gaz.* Supposons que, dans l'exemple ci-dessus, la pression exercée par l'air *sous le piston* et par centimètre carré de sa surface, soit de 1 kilogramme quand cet air occupe un certain volume; si ce volume est réduit à moitié par le refoulement du piston, la pression de l'air intérieur sera double ou de 2 kilog.; elle sera triple ou de 3 kilog. si le volume est réduit au tiers, etc. Si ensuite on ramène, par degrés, le piston vers sa position primitive, la pression de l'air diminuera dans le même rapport que le volume augmentera, et reprendra précisément les mêmes valeurs pour les mêmes positions du piston : cette pression se répartissant également dans tous les sens, ou étant la même

pour chaque centimètre carré de surface pressée (14), on peut dire que *les volumes occupés successivement par une même quantité d'air sont réciproquement proportionnels à leur force de pression ou de ressort.*

Cette loi, découverte par Mariotte à l'aide d'expériences que nous ne pouvons ici faire connaître, s'étend à tous les gaz.

ÉLASTICITÉ DES CORPS.

17. *Définition.* L'*élasticité* est la propriété que possèdent les corps de reprendre leur état primitif quand une cause quelconque les en a fait changer; c'est en cela que consiste proprement la qualité de ce qu'on nomme *ressort.* — Les ressorts sont d'une grande utilité dans les arts; ils servent à suspendre les voitures, à faire mouvoir les montres et pendules, à diminuer les effets nuisibles des chocs, etc.; c'est par leur élasticité, leur *ressort,* que le foin, les découpures de papier, prémunissent les marchandises emballées contre l'effet des secousses.

On distingue l'élasticité de *forme* et l'élasticité de *volume.* — Le ressort d'acier qui plie, qui change de forme sans changer sensiblement de volume, est un exemple de la première; la deuxième est manifeste dans l'air, dont le volume apparent diminue par la compression, et redevient exactement ce qu'il était dès qu'elle cesse.

18. *Fluides.* L'élasticité de volume des liquides est parfaite. — L'eau, qui se divise et se déplace si facilement quand elle est libre, n'a point sensiblement d'élasticité de forme; si on la fait diminuer de volume dans un espace clos et suffisamment résistant, et qu'ensuite on l'abandonne à elle-même, elle reprend exactement son volume primitif, et jouit ainsi à un très-haut degré de l'élasticité de volume.

L'air et les gaz en général sont parfaitement élastiques, et reviennent tout à fait à leur premier état, quelle que soit la pression à laquelle ils aient été soumis; c'est pourquoi on les nomme quelquefois *fluides élastiques.*

19. *Solides; oscillations, vibrations.* Les corps solides ne se comportent pas de la même manière; il y a une limite de pression au

delà de laquelle ils sont plus ou moins déformés ! le meilleur ressort d'acier se brise quand on le plie au delà d'un certain terme. — Les corps sont d'autant plus élastiques qu'ils peuvent revenir d'une déformation plus grande; sous ce point de vue donc une lame d'acier est plus élastique qu'une lame de verre, et une lame de verre est plus élastique qu'une lame de plomb; cependant, sous une faible pression, la lame de plomb reprend exactement sa figure primitive, et, dans ce sens, on pourrait dire qu'elle est parfaitement élastique. Il en est de même de toutes les substances; l'élasticité n'est donc en réalité qu'une propriété *relative*.

Quand les corps solides ont la forme de cube ou de sphères, leur élasticité, moins apparente que quand ils sont en lames, n'en existe pas moins. — Une boule d'ivoire, enduite d'huile, et tombant d'une certaine hauteur sur une table de marbre ou de fonte, y laisse une tache plus ou moins large qui prouve qu'elle s'est aplatie; elle rejaillit ensuite en s'élevant plus ou moins haut par l'effet du débandement de son ressort. — Une boule d'ivoire est plus élastique qu'une boule de plomb, parce qu'elle rejaillit à une plus grande hauteur et qu'elle reprend sa première forme, ce que ne fait pas cette dernière. — Une bande d'acier circulaire, comprimée dans un sens et abandonnée ensuite à elle-même, s'élargit bientôt en sens contraire, et fait une suite d'*oscillations* autour de sa forme primitive. Il en est de même de la bille d'ivoire et de tous les corps élastiques qui ont été choqués ou dérangés de leur position naturelle, et abandonnés ensuite à eux-mêmes; ils font une suite d'oscillations de plus en plus faibles, avant de revenir à cette position.

Lorsque les oscillations deviennent tellement rapides qu'on ne peut plus les discerner d'une manière distincte, et qu'elles se convertissent en une sorte de frémissement, on les nomme *vibrations* : ce sont ces vibrations qui, transmises d'abord à l'air, puis par l'air à nos oreilles, y produisent la sensation des différents *sons*.

20. *Limite d'élasticité des solides.* Les corps solides étant susceptibles de perdre leur élasticité, et cette perte ne pouvant provenir que d'un dérangement, d'une altération moléculaires, il importe, dans les arts, de ne point les soumettre à des efforts de *traction* ou de *tension* qui dépassent certaines limites.

L'expérience apprend que, sous un effort surpassant 6 à 7 kilog. par millimètre carré de section transversale, une barre de fer, tirée

dans le sens de sa longueur, commence à perdre son élasticité, et qu'elle se sépare ou se rompt sous une pression de 35 à 40 kilog. Il en est de même de tous les corps ; ils perdent leur élasticité sous un effort bien moindre que celui qui occasionne leur rupture : le fer, la fonte de fer, les bois de chêne et de sapin, qui se rompent seulement sous des tractions de 35, de 13, de 9 kilog. environ par millimètre carré de leur section transversale, perdent leur élasticité sous des efforts de 6, de 3, de 2 kilog. environ. Par exemple, un barreau de fer d'un centimètre ou de 10 millim. de côté, ayant par conséquent 100 millim. carrés de section, pourra perdre son élasticité, si on le tire avec un effort longitudinal qui excède 600 kilog., quoiqu'il ne se rompe réellement que sous un effort 5 à 6 fois plus grand.

DILATABILITÉ DES CORPS.

21. La *dilatabilité* est la propriété qu'ont les corps d'augmenter de volume ou de se *dilater* quand on les chauffe, d'en diminuer ou de se *contracter* quand on les refroidit, de reprendre leur volume primitif quand on les ramène au même degré de chaleur.

Gaz. Ils sont de tous les corps ceux qui se dilatent le plus par la chaleur. On prouve la dilatabilité de l'air au moyen du *thermoscope* de Rumfort, qui consiste (pl. I, fig. 2) dans deux boules de verre, closes, remplies de ce fluide et communiquant entre elles par un tube horizontal dont le milieu est occupé par une goutte d'esprit-de-vin coloré. La chaleur de la main suffit pour dilater l'air de la boule dont on l'approche, ce qui refoule la bulle d'esprit-de-vin dans l'autre boule. En éloignant la main, le volume de l'air diminue, et la bulle revient à sa place primitive.

22. *Liquides ; thermomètres.* L'eau et les liquides en général sont aussi dilatables par la chaleur ; c'est ce que démontre le *thermomètre*, instrument connu de tout le monde, et qui consiste (Pl. I, fig. 3) en un tube de verre, terminé vers le bas par une boule, fermé par le haut et rempli en partie d'un liquide qui est ordinairement du mercure parce que ce métal jouit de plusieurs qualités essentielles que n'ont pas les autres liquides. Le verre étant très-peu dilatable et les liquides l'étant beaucoup, on conçoit que la moindre chaleur doit faire monter le niveau supérieur de ces derniers le long du tube, comme le moindre refroidissement doit le faire des-

cendre. — On gradue l'*échelle* du thermomètre en observant successivement la hauteur du liquide quand on plonge l'instrument dans l'eau bouillante et dans la glace fondante, deux degrés de chaleur qui sont constants et faciles à reproduire ; l'espace compris entre ces deux positions du liquide est ordinairement divisé en 100 parties égales, dont chacune indique les *degrés* intermédiaires de la chaleur ; c'est pourquoi on nomme ces thermomètres, *thermomètres centigrades*. Certains thermomètres sont divisés seulement en 80 parties égales, ce sont ceux dits de Réaumur ; dans les uns et dans les autres, la division est prolongée au-dessous du point qui répond à la chaleur de la glace fondante, et qu'on nomme le *zéro* de l'échelle ; cette division représente les *degrés de froid* dans le langage ordinaire, et l'on nomme *température* d'un corps le nombre des degrés du thermomètre, qui répondent à sa chaleur.

23. *Solides ; pyromètres.* Les corps solides se dilatent beaucoup moins que les liquides et les gaz ; leur dilatation est cependant rendue sensible lorsqu'on augmente suffisamment l'une de leurs dimensions. Une barre de métal ajustée d'abord entre deux talons (pl. I, fig. 4), n'y peut plus entrer quand on l'a chauffée à un certain degré. — On construit sur ce principe des instruments qui servent à mesurer la chaleur de nos foyers les plus ardents, de même que les thermomètres servent à mesurer les températures ordinaires : on les nomme *pyromètres*.

24. *Notions sur le calorique.* Dans ces phénomènes, le *calorique* ou la chaleur se comporte, à l'égard des corps absolument comme les liquides qui, en se logeant dans leurs interstices ou pores, les font gonfler (11). — En comprimant ou diminuant le volume des corps par un moyen mécanique quelconque, on en soutire une certaine quantité de chaleur qui devient très-sensible quand la compression a été suffisamment brusque et forte. — C'est ainsi qu'en frappant ou frottant violemment le fer, il finit par s'échauffer, et qu'en comprimant brusquement l'air dans un *briquet pneumatique*, il s'en dégage assez de chaleur pour enflammer de l'amadou. — Lorsque la compression se fait lentement, la chaleur ou le calorique s'écoule, se dégage d'une manière insensible. — Réciproquement, on observe que, quand un corps augmente de volume par une cause quelconque, il se refroidit, il enlève de la chaleur aux corps environnants :

ainsi, dans l'expérience rapportée n° 15, l'air se refroidit ou baisse de température quand on soulève le piston, et il refroidit aussi le tube qui le renferme.

25. *Application de la dilatabilité aux arts.* La propriété qu'ont en particulier les métaux de changer de volume par la chaleur et par la traction ou la compression a été mise à profit dans les arts. — C'est ainsi que M. Molard est parvenu, au moyen de *tirants* de fer chauffés, puis ensuite refroidis, à rapprocher et à remettre, dans leur aplomb, les murs du Conservatoire des arts et métiers de Paris; que l'on a consolidé la coupole de St-Pierre de Rome, d'un cercle de fer; c'est encore ainsi qu'on unit entre elles les jantes des roues de voiture, et qu'on *frette* une foule de corps, en les enveloppant avec force de bandes de fer placées à chaud. On conçoit, en effet, que, le métal venant à se refroidir et tendant à rentrer sur lui-même, fait effort contre les obstacles qu'on lui a présentés, de la même manière (17) que s'il avait été réellement allongé par une forte traction.

En se rappelant la dilatabilité des métaux, on évitera une foule de fautes dans les constructions. — On évitera, par exemple, de sceller à leurs extrémités des barres d'une certaine longueur, et dont le raccourcissement ou l'allongement serait nuisible; on laissera à toutes les pièces le jeu et la liberté nécessaires : ces précautions sont particulièrement indispensables dans l'établissement des lisses en fer des grands ponts, dans celui des tuyaux de conduite en fonte des fontaines, etc.

26. *Résultats d'expériences.* De 0 à 100° centigrades, l'allongement d'une barre de 1 mètre est, pour

	mèt.
L'acier, de	0,00124
Le fer, de	0,00122
Le cuivre rouge, de	0,00172
Le cuivre jaune, de.	0,00188
Le verre, de	0,00087

L'allongement est à peu près constant d'un degré à l'autre, pour l'intervalle de 0 à 100° du thermomètre; mais il n'en est pas tout à fait ainsi au delà.

D'après les belles expériences de M. Gay-Lussac, la dilatation ou l'augmentation du volume de l'air et de tous les gaz, pour chaque degré du *thermomètre centigrade*, est de $0{,}00375 = \frac{1}{267}$ de leur volume à zéro, la pression restant constante ou la même (14 et 15) : ainsi, par exemple, le volume d'un gaz à zéro étant 1^{me}, à 60° centigrades, il sera $1^{me} + \frac{60}{267} = 1^{me},225$, si la pression ou la tension n'a pas changé.

IDÉE DE LA CONSTITUTION INTIME DES CORPS.

27. Il résulte de tout ce qui précède que les corps se composent d'atomes inaltérables, indivisibles et dont la petitesse est telle qu'ils échappent tout à fait à nos sens ; que ces atomes sont séparés les uns des autres par des intervalles plus ou moins grands et qui sont susceptibles de varier dans différentes circonstances ; qu'enfin ces mêmes atomes résistent aussi bien aux causes extérieures qui tendent à les rapprocher qu'à celles qui tendent à les désunir, ce qui porte à supposer entre ceux qui sont voisins, des actions réciproques nommées par les physiciens *attraction* et *répulsion*. — Sans ces actions, les corps ressembleraient à des monceaux de poussière qui n'ont aucune consistance.

28. *Attractions, répulsion moléculaires, etc.* Les effets de l'attraction moléculaire se nomment, selon les cas, *affinité, adhésion, adhérence, cohésion, cohérence ;* ils se manifestent dans une infinité de circonstances, tant pour les liquides que pour les solides. Quant à la répulsion, elle est évidente dans les gaz dont les molécules se repoussent constamment et tendent à s'échapper en tous les sens : on s'accorde à supposer que le calorique *latent* ou la chaleur naturellement enfermée dans les corps, est la cause de la répulsion moléculaire, et que, sans cette chaleur, ils seraient tous à l'état solide.

29. *Attractions à distance.* L'attraction et la répulsion dont il s'agit n'ont lieu qu'entre les molécules voisines d'un même corps, ou au contact immédiat de deux corps différents ; il existe d'autres genres d'actions qui s'exercent de corps à corps et à des distances quelconques : telles sont l'*attraction* ou *pesanteur universelle* qu'on nomme aussi *gravité, gravitation*, les attractions et répulsions magnétiques, électriques, etc. La pesanteur considérée dans les corps

qui sont attirés par notre globe, est la seule qui puisse nous intéresser ici, parce qu'elle joue un rôle essentiel dans tous les phénomènes de la Mécanique industrielle.

DE LA PESANTEUR ET DE SES EFFETS.

30. Tous les corps tendent à tomber ou tombent sur la terre, quand ils cessent d'être soutenus, en suivant une direction qui, pour chaque lieu, est celle de la *verticale* indiquée par le *fil à plomb;* cette direction, comme on le sait par expérience et comme nous le démontrerons directement plus tard, est perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles, qui se nomme *niveau;* prolongée suffisamment vers le bas, elle va passer par le centre du globe terrestre : c'est là un des effets sensibles de l'attraction de ce globe sur les corps placés à sa surface. Mais si, au lieu d'être abandonné à lui-même, un corps est soutenu par un obstacle, par un fil, je suppose, il pèse sur l'obstacle, sur le fil ; et ce second effet, ce *résultat* de l'attraction terrestre, est ce qu'on nomme le *poids* du corps : les poids d'ailleurs se comparent entre eux et se mesurent au moyen d'instruments dont l'usage est généralement connu, et dont nous apprécierons les qualités essentielles quand nous aurons acquis les notions de Mécanique nécessaires.

31. *Unité de poids.* Le poids qui a été pris pour unité de mesure, en France, se nomme *gramme;* 10 grammes, 100 grammes, 1000 grammes font un *décagramme*, un *hectogramme*, un *kilogramme;* 100 kilogrammes font un *quintal métrique*, et 1000 kilogrammes forment ce qu'on appelle un *tonneau*, dans la marine.

Le *gramme*, le *kilogramme*, le *quintal* et le *tonneau* sont les poids dont on se sert le plus fréquemment pour peser les corps. — On a aussi divisé, dans ces derniers temps, le kilogramme en 2 livres, la livre en 16 onces, etc.; mais il ne faut pas confondre cette livre métrique et légale avec l'ancienne qui est plus faible d'environ $\frac{1}{50}$, le kilogramme valant 2,0429 livres anciennes, ou l'ancienne livre ne valant que 0,4895.

Poids étalons. Les poids qui servent *d'étalons* ou de modèles de mesure en France, sont généralement en cuivre pour les petits poids, et en fonte de fer pour les grands ; mais, comme ces étalons peuvent à la longue se perdre ou s'altérer malgré toute leur solidité,

on a, pour retrouver au besoin l'unité de poids avec l'unité de longueur, un moyen très-précis que nous ferons bientôt connaître.

22. ***Poids absolus et relatifs.*** Le poids d'une quantité donnée de matière est une chose absolue, invariable, là où l'action de la pesanteur reste la même ; on a beau changer de mille manières la forme extérieure d'un corps, le diviser en parties, le chauffer, le comprimer, son poids ou le poids total de ses parties ne change pas. — Il n'en est pas ainsi, comme on l'a vu, du ***volume apparent*** d'un corps ; ce volume diminue par la compression ou le refroidissement, il augmente par la traction et l'échauffement ; d'où il résulte que la quantité et le poids de la matière de ce corps, contenus dans un certain volume, dans un mètre cube, par exemple, sont plus grands dans le premier cas, et moindres dans le second ; à plus forte raison, le poids d'un même volume de diverses substances peut-il différer pour toutes ces substances.

23. ***Densité.*** Le poids d'un corps, sous l'unité de volume apparent, est ce qu'on nomme sa ***densité.*** — L'or est plus ***dense*** que le fer, parce qu'un pied cube, ou un mètre cube d'or pèse plus qu'un pied cube ou un mètre cube de fer. Le cuivre à froid, le cuivre battu ou écroui est plus dense que le cuivre à chaud, le cuivre fondu ou coulé. On dit d'un corps que sa densité est ***uniforme, constante*** ou qu'il est ***homogène,*** quand la densité ou le poids de chacun des volumes égaux et très-petits dont il se compose, est le même pour tous.

24. ***Densité de l'eau, fixation de l'unité de poids.*** Par des expériences très-soignées, les physiciens ont reconnu que la densité de l'eau pure ou distillée est la plus grande possible ou à son ***maximum,*** à une température (22) d'environ 4° au-dessus du 0 du thermomètre centigrade. C'est ce ***maximum*** de densité qui a servi pour établir, d'une manière invariable, l'unité de poids en France, au moyen de l'unité de mesure : on a pris pour ***kilogramme*** le ***poids d'un litre d'eau*** ramenée à cet état ; ainsi le ***gramme*** équivaut au poids d'un ***centimètre cube*** de cette eau, le ***quintal métrique*** à celui d'un ***hectolitre,*** et le ***tonneau*** ou 1000 ***kilogrammes*** à celui d'un ***mètre cube.*** — Dans les applications de la Mécanique industrielle aux arts, nous pourrons, sans inconvénient, supposer que la densité de l'eau ordi-

naire et non mélangée, est de 1000 kilogrammes pour un mètre cube, quelle que soit la température de l'air.

35. La *pesanteur spécifique* ou mieux le *poids spécifique* d'une substance solide ou liquide, est sa densité *comparée* à celle de l'eau, prise pour unité, c'est-à-dire le rapport de sa densité à celle de cette dernière. Ainsi la densité de l'eau étant 1, le poids spécifique de l'or coulé est de 19,258 ; parce qu'un pied cube ou un mètre cube d'or pèse 19,258 fois autant qu'un pied cube ou un mètre cube d'eau. Sachant que la densité ou le poids du mètre cube d'eau est de 1000 kil., et ayant le poids spécifique d'une autre substance, on calculera, par les règles de la Géométrie, le poids d'un volume quelconque de cette même substance. — Exemple : un lingot d'or, fondu ou coulé, de 5 cent. de largeur, 4 cent. de longueur et 2 cent. d'épaisseur, ou de 40 centimètres cubes, pèse 40 fois $19,258 \times 1^{gram} = 770^{gram},32$ ou $0^{kil},7703$, puisque le poids du centimètre cube d'eau pure est de 1^{gram} ou $0^{kil},001$: tel est l'usage de la table suivante :

Table des poids spécifiques des principaux corps solides et liquides à 0° de température, donnant le poids du mètre cube de chaque substance, quand on multiplie les nombres par 1000^{kil}, *densité de l'eau.*

SOLIDES.

Platine. laminé.	22,6690	Chaux carbonatée cristallisée.	2,7172
Platine. purifié.	19,5000	Cristal de roche pur.	2,6530
Or. forgé.	19,3617	Verre blanc de St.-Gobain	2,4892
Or. coulé.	19,2581	Houille compacte.	1,5292
Plomb coulé	11,3523	Bois de hêtre.	0,8530
Argent coulé.	10,4743	Frêne	0,7450
Cuivre en fil	8,8785	Bois d'orme	0,6600
Cuivre rouge coulé	8,7880	Sapin jaune	0,6570
Acier non écroui.	7,8163	Glace	0,9300
Fer en barre.	7,7880	Tilleul.	0,6040
Étain coulé.	7,2914	Peuplier ordinaire	0,3830
Fer fondu.	7,2070	Liége.	0,2400
Zinc coulé.	6,8610		

LIQUIDES.

Mercure.	13,5980	Eau distillée.	1,0000
Acide sulfurique (*huile de vitriol*).	1,8409	Vin de Bourgogne..	0,9915
Eau de la mer	1,0263	Huile d'olive..	0,9153
Lait.	1,0300	Alcool absolu.	0,7920
		Éther sulfurique.	0,7155

Remarque. La dilatation des corps solides et des liquides étant généralement très-faible pour de légers changements de température, on pourra, sans inconvénient, se servir de cette table dans les circonstances ordinaires de la pratique.

Voici maintenant les densités de quelques autres substances qui n'ont pu être déterminées d'une manière aussi précise; le *mètre cube* étant l'unité de volume :

SUBSTANCE.	POIDS. kil.	SUBSTANCE.	POIDS. kil.
Pierre à plâtre ordinaire . . .	2168	Terre argileuse.	1660
Gypse ou Plâtre fin	2264	Terre glaise	1900
Pierre meulière.	2484	Maçonnerie de moellons ordinaires, depuis 1700 kil. jusqu'à	2300
Marbre noir et blanc de Namur .	2717	Chêne le plus pesant, le cœur. .	1170
Briques { les plus cuites . . .	2200	Chêne le plus léger, sec . . .	850
Briques { les moins cuites . . .	1500	Huile de lin.	940
Tuiles ordinaires.	2000	Huile de navette	913
Sable pur.	1900	Alcool ordinaire ou Esprit-de-vin.	837
Sable terreux.	1700		
Terre végétale	1400		

DU POIDS, DE LA DENSITÉ, DE LA PRESSION DE L'AIR ET DES GAZ.

36. *Poids des gaz.* Le poids des corps solides est un fait facile à constater par tout le monde ; mais il n'en est pas de même de celui de l'air et des autres gaz. — A l'aide d'une pompe à deux pistons, nommée *machine pneumatique,* on parvient à soutirer l'air qui est contenu dans un ballon ou boule creuse de verre, qu'on bouche ensuite au moyen d'un robinet; c'est ce qu'on appelle *faire le vide.* En pesant successivement ce ballon lorsqu'il est plein et lorsqu'il est vide, on trouve que son poids est plus grand dans le premier cas que dans le second ; cet excès est le poids de l'air contenu : en remplaçant pareillement l'air par d'autres gaz ou par un fluide quelconque, on obtient le poids d'un même volume de ces fluides, ou leurs densités relatives, pour les circonstances où on les considère.

C'est ainsi qu'on trouve que le mètre cube d'air atmosphérique, pris dans son état le plus ordinaire, pèse environ $1^{kil},29$, car le poids ou la densité de l'air varie un peu suivant les saisons, et selon qu'il est plus ou moins comprimé sur lui-même : si, par exemple, on in-

troduisait avec force, au moyen d'une *pompe dite foulante*, ou d'un soufflet ordinaire, une nouvelle quantité d'air dans le ballon, il est évident que son poids augmenterait aussi bien que son ressort, c'est-à-dire, sa tension ou sa pression (14 et 16); car cela reviendrait à réduire, par la compression, le volume de l'air introduit, à un volume beaucoup moindre que celui qu'il occupait primitivement dans l'atmosphère.

En général, il résulte du principe de Mariotte (16), *que la densité ou le poids d'un même volume de gaz, sous différentes tensions ou pressions, est exactement proportionnel à ces pressions, la température restant constante* (26).

37. *Pression atmosphérique.* Puisque l'air est pesant comme les liquides, on conçoit que l'atmosphère (4) pèse sur la terre, et la presse de tout son poids, de même que fait un liquide, renfermé dans un vase, sur le fond de ce vase. L'air pèse aussi sur lui-même, et chaque couche de niveau de l'atmosphère supporte le poids de toutes celles qui sont placées immédiatement au-dessus, et elle presse à son tour celles qui sont au-dessous; cette pression est tout à fait analogue à la pression qu'éprouve l'air comprimé sur lui-même dans l'intérieur d'un corps de pompe, fermé par un piston (15 et 16); d'où l'on peut inférer qu'elle s'exerce aussi bien sur les côtés qu'au-dessus et au-dessous : c'est là ce qu'on nomme la *pression atmosphérique*, pression qui diminue, comme on voit, à mesure qu'on s'élève au-dessus de la surface de la terre.

Voici comment on peut la constater directement au moyen de l'appareil déjà décrit n° 15 : chassez complétement l'air contenu dans l'intérieur du briquet ou corps de pompe, en poussant le piston jusqu'au fond, après avoir pratiqué à ce fond une ouverture pour laisser échapper l'air; bouchez ensuite cette ouverture hermétiquement, puis retirez le piston; vous formerez le *vide* au-dessous, et la pression de l'air, qui agit à son extérieur, s'opposera au mouvement avec un effort qui dépendra de l'étendue de la surface pressée du piston, et qui sera très-grande, par exemple, pour un piston circulaire de 10^{cent} de diamètre (de 80^{kil} au moins); débouchant ensuite l'orifice, l'air rentrera dans le vide avec sifflement, et sa pression sous le piston détruira celle de l'air extérieur; de sorte qu'on n'aura plus à surmonter que le poids de ce piston et son frottement contre le cylindre, quand on essayera de l'éloigner du fond;

soustrayant l'un et l'autre de l'effort total exercé dans le premier cas, on aura la pression exercée par l'air extérieur sur la surface entière du piston, et par suite, sur chaque unité de cette surface. On trouverait ainsi que la pression atmosphérique, au niveau de la mer, est *moyennement* de $1^{kil},033$ sur chaque centimètre carré ou de 1033^{kil} par mètre carré, et l'on obtiendrait le même résultat de quelque façon qu'on inclinât le cylindre par rapport à l'horizon, pourvu qu'on le plaçât au même lieu. Cette pression moyenne est celle qu'on prend ordinairement pour terme de comparaison, et on la nomme, pour abréger, simplement *atmosphère*. — Ainsi, l'on dit 1 atmosphère, 2 atmosphères de pression, au lieu de $1^{kil},033$, $2^{kil},066$ de pression par *centimètre carré de surface*.

38. *Mesure de la pression de l'air et des gaz ; baromètre.* Le *baromètre*, instrument généralement connu de nos jours, offre un moyen plus commode de mesurer la pression atmosphérique, il consiste (pl. I, fig. 6), en un tube de verre vertical *ac*, fermé par le haut, et dont l'extrémité inférieure *ef*, ouverte, plonge dans une cuvette ABCD contenant du mercure. La pression est indiquée par le poids de la colonne *acdb* de ce fluide, soutenue dans le tube, au-dessus du niveau AB de la cuvette, par la pression que l'air exerce extérieurement sur la surface de ce niveau; mais il faut pour cela que le haut du tube, non occupé par le mercure, soit absolument privé d'air ou *vide*, ce qu'on obtient, lors de la fabrication, en remplissant complétement le tube de mercure, par le bout ouvert placé en haut, puis le renversant après l'avoir bouché, et le débouchant ensuite quand son orifice est suffisamment plongé dans le liquide de la cuvette pour qu'il ne puisse communiquer avec l'atmosphère; on voit alors le mercure, qui remplissait totalement ce tube, descendre à la hauteur qui répond à la pression de l'air extérieur *. Ce n'est

* La raison de ce principe est fondée, comme nous le verrons plus tard, sur ce que, aucune pression n'existant sur le haut de la colonne, et la surface de niveau AB étant pressée par l'air comme par un piston, cette dernière pression est transmise (14) intégralement, par le mercure, sur la surface de la section *ab* du tube, correspondante à ce niveau, section qui supporte elle-même tout le poids de la colonne *ac*. Si l'on ouvrait, en effet, le haut du tube, l'air en y pénétrant, forcerait la colonne à s'abaisser jusqu'au niveau de la cuvette, et la pression qu'occasionnait le poids de cette colonne, serait remplacée par celle de l'atmosphère sur la base *ab*; et, comme tout reste le même quant au surplus du fluide contenu dans la cuvette, il faut bien qu'en effet le poids de la colonne de mercure ou la pression qu'elle exerce sur la surface de *ab*, soit égale à la pression de l'atmosphère sur cette même surface.

pas ici le lieu d'entrer dans des détails sur la construction du baromètre ; il nous suffit de savoir que la hauteur de la colonne de mercure qui répond à la pression atmosphérique moyenne de $1^{kil},033$ par centimètre carré de surface, est de 76 centim. ou 760 millim. (28 ^{po}), parce qu'une telle colonne, ayant 1 centim. carré de base, pèse réellement (35) $1^{kil},033$; de sorte que, la pression étant généralement proportionnelle à la hauteur de la colonne qui lui répond, on trouvera aisément cette pression, dans chaque cas, par les indications du baromètre. Si l'on employait de l'eau, au lieu du mercure, pour former le baromètre, la colonne d'eau qui mesurerait la pression de $1^{kil},033$ serait $10^{met},33$ (environ 32 pieds anciens), parce que le poids d'une colonne d'eau de cette hauteur et de 1 cent. carré de base, pèse (34) effectivement 1033 grammes ou $1^{kil},033$.

39. *Manomètre.* On remarquera que le baromètre peut aussi bien servir à mesurer la tension ou pression des gaz, contenus de toutes parts dans des vases, que la pression atmosphérique elle-même ; il suffit pour cela de le placer dans l'intérieur de ces vases, ou d'y placer seulement sa cuvette en faisant attention de bien boucher l'ouverture par laquelle passe le tube (pl. I, fig. 6). On pourrait aussi se contenter de fermer hermétiquement le dessus de la cuvette (pl. I, fig. 7), et de mettre son intérieur A, en communication avec la capacité D, qui contient le gaz, par un bout de tuyau BC, etc. Ces appareils, qu'on varie de bien des manières, se nomment en général *manomètres.*

40. *Densité ; poids spécifique des gaz.* Sachant ainsi mesurer la pression des gaz, et leur température étant donnée dans chaque cas par le thermomètre, on pourra, à l'aide de la loi de Mariotte (16 et 37) et de celle de M. Gay-Lussac (26), déterminer, par un calcul facile et dont on aura des exemples plus tard, leur poids et leur densité quand on connaîtra ce poids et cette densité dans des circonstances déterminées, par exemple à 0° de température, et sous la pression barométrique de 76^{c} de mercure, qu'on prend ordinairement pour point de départ ou terme de comparaison : tel est l'usage de la table suivante.

Table des densités et des poids spécifiques des principaux gaz, la densité de l'air étant prise pour unité.

Noms des fluides élastiques.	Poids spécifique.	Poids du mètre cube, à 0° et 760mil. de pression. kil.
Air atmosphérique	1,0000	1,2991
Acide carbonique	1,5245	1,9805
Oxygène	1,1026	1,4323
Azote	0,9757	1,2675
Hydrogène	0,0688	0,0894
Vapeur d'eau	0,6235	0,8100

Remarque. Les gaz se dilatant également pour les mêmes élévations de température (26), et se comprimant de quantités proportionnelles (16) pour des augmentations de pression égales, conservent les mêmes rapports de densités à toute pression et à toute température : ainsi, par exemple, la densité de l'hydrogène, qui est environ les 0,069 ou $\frac{1}{15}$ de celle de l'air à 0° et à 76c de pression, en sera toujours le quinzième à 100° et sous une pression 10 fois plus forte, c'est-à-dire de 10 atmosphères (37 et 38).

41. *Effets de la pression de l'air sur les corps.* On voit, par ce qui précède, que tous les corps plongés dans l'air atmosphérique, sont pressés par lui de toutes parts et en chaque point de leur surface immédiatement en contact ; or, il résulte de là plusieurs effets dont quelques-uns sont importants à connaître : 1° le corps est comprimé, refoulé sur lui-même, ce qui contribue à lui donner la forme *stable* ou solide qu'il doit principalement à l'adhésion, à la cohésion de ses molécules (27) ; 2° son volume est un peu plus faible (13) et sa densité un peu plus forte (33), que si la pression n'existait pas, ou qu'il fût placé dans un espace entièrement vide ; 3° la pesanteur n'est pas la seule cause qui le fasse mouvoir quand il est libre, ou qui le fasse presser sur les autres corps quand il est soutenu par eux ; en un mot, son poids pourrait bien n'être pas le même dans le vide que dans l'air, etc.

Relativement aux deux premiers effets, on observera qu'ils sont très-peu sensibles pour les corps solides et résistants, tels que les bois, les pierres, les métaux, aussi bien que pour les liquides contenus de toutes parts dans des vases, ou simplement en contact avec

l'air par leur surface de niveau ; car ces corps peuvent supporter une pression qui soit le double, ou le triple de la pression atmosphérique (13), sans changer de volume d'une manière appréciable.

Quant au troisième effet, on s'assure par l'expérience et, comme nous le verrons, par les principes de la Mécanique, qu'il se réduit uniquement à diminuer le poids, qu'aurait le corps dans le vide, de tout celui du volume d'air que ce corps remplace ou déplace *; diminution à peine appréciable pour les liquides et les solides dont la densité (35) surpasse généralement 500 fois celle de l'air atmosphérique, mais qui l'est à coup sûr beaucoup pour les fluides élastiques dont le poids, sous l'unité de volume, est très-comparable ou même moindre (40) que celui de cet air. Il en résulte, en effet, que certains gaz ou des corps creux remplis de ces gaz, au lieu de tomber ou de peser, s'élèvent ou font effort pour s'élever; tout comme cela a lieu pour les corps plongés dans l'eau, lorsque leur densité est moindre que celle de cette eau, et comme on en a un exemple immédiat dans les aérostats ou ballons en taffetas verni, qui, enflés par le gaz hydrogène, s'élèvent jusque dans les nues, en vertu de la pression de l'air extérieur sur leur enveloppe.

Nous devons d'ailleurs faire remarquer que les poids et les densités des liquides, des gaz et des corps solides, qui se trouvent indiqués dans les tables précédentes, sont les densités et les poids absolus tels qu'on les obtiendrait en pesant ces corps dans le vide; ce qui résulte de la méthode même par laquelle on les a obtenus, méthode exposée dans tous les Traités de physique.

* Nous pouvons, dès à présent, faire sentir la vérité de ce fait par un raisonnement fort simple, et qui s'applique à un corps plongé dans un fluide quelconque, par exemple dans l'eau. D'abord, puisque la pression du fluide diminue à mesure qu'on s'élève dans son intérieur (37), et qu'elle est la même pour tous les points d'une même couche de niveau, on conçoit que le corps doit être plus pressé par le bas que par le haut, et qu'il l'est à peu près également par les côtés; mais c'est ce qu'on aperçoit plus rigoureusement en observant 1° que le corps tient la place d'une certaine masse de fluide, qui, étant terminé au même contour, à la même surface extérieure, serait, si elle existait, pressée de toutes parts par le fluide environnant, précisément comme l'est ce corps; 2° que cette masse faisant partie intégrante de la masse totale du fluide, serait en repos malgré ces pressions et l'action de la pesanteur sur ses parties ; 3° que par conséquent l'effet de ces pressions extérieures se réduit à soutenir son poids ; 4° qu'enfin ces pressions étant les mêmes pour le corps, ont aussi uniquement pour effet de *diminuer le poids, qu'il aurait dans le vide, du poids du volume de fluide qu'il déplace*, ou de le pousser verticalement, de bas en haut, avec un effort égal à ce dernier poids.

42. *Conclusion.* Telles sont donc les circonstances principales où il faudra avoir égard aux effets de la pression de l'air ; pour toutes les autres, nous pourrons supposer que les choses se passent dans l'air comme dans le vide, ou comme si l'air n'existait pas. Nous en dirons tout autant des effets des tractions ou des pressions quelconques, de la chaleur, de l'humidité, etc., lorsqu'ils se réduiront à changer la forme, le volume ou la densité des corps, d'une manière peu sensible ou qui aurait peu d'influence sur les résultats pratiques; mais nous n'oublierons pas d'en tenir compte et d'en apprécier les effets quand cela sera nécessaire ; et nous le pourrons d'après les documents qui précèdent, et les documents plus étendus ou plus précis que nous recueillerons en traitant chaque question spéciale. Enfin, non-seulement il nous arrivera quelquefois de ne pas tenir compte de certaines propriétés physiques des corps, peu influentes; mais nous pourrons même, par instants, les dépouiller tout à fait de leur poids ou de telle autre qualité essentielle de la matière, afin d'isoler et d'étudier séparément les effets dus à chacune d'elles, et d'être d'autant mieux en état d'en apprécier ensuite ou d'en calculer les effets combinés.

Au surplus, nous n'avons point encore fait l'énumération complète des propriétés physiques de la matière, ni des effets qui se produisent sur les corps dans différentes circonstances et par différentes causes. Nous n'avons rien dit, par exemple, de l'*inertie* des corps, ni de la *résistance* qu'ils éprouvent à se mouvoir dans les fluides, à glisser, à rouler, à se plier sur d'autres corps, ou à s'en séparer dans certains cas, résistances qu'on nomme *roideur*, *frottement*, *adhérence*, et qu'il importe surtout de considérer dans le calcul des machines ; mais l'étude de ces propriétés, de ces effets, reviendra plus tard ; il nous suffit pour le moment de les avoir indiqués, afin qu'on ne soit pas tenté de faire de fausses applications des principes de la Mécanique aux arts industriels, et c'est aussi, en partie, le but que nous avons cherché à remplir dans ce qui précède.

NOTIONS FONDAMENTALES SUR LE MOUVEMENT, LES FORCES ET LES EFFETS DES FORCES.

DE L'ESPACE ET DU TEMPS.

43. *L'espace* est l'étendue indéfinie, sans bornes, qui contient tous les corps, et dont chacun occupe une partie plus ou moins considérable qu'on nomme son *volume*, son *étendue* et quelquefois sa *capacité*.

On nomme souvent aussi *espace*, le volume, l'aire superficielle d'un corps, ou la distance, l'intervalle compris entre deux corps; mais alors on considère ces étendues comme occupant une certaine portion de l'espace, ce qui ne présente point d'équivoque.

44. *Temps, mesure du temps.* On conçoit un temps plus long ou plus court qu'un temps donné; le temps est donc une *grandeur*; il est donc susceptible d'être *mesuré* comme les lignes, les aires et les volumes. — Pour mesurer un temps quelconque, il ne s'agit que d'obtenir des temps égaux, et qui se succèdent sans discontinuité. En tombant d'une certaine hauteur sur un plan de niveau, un même corps emploie toujours le même temps; il en est de même pour des corps égaux tombant de la même hauteur. Supposez qu'aussitôt que le corps est arrivé sur le plan, un autre corps, égal, soit lâché du même point, et successivement un troisième, un quatrième, etc., vous aurez une suite de *temps égaux*, et leur somme sera le temps total. En représentant par 1, ou prenant pour unité l'un des *temps élémentaires*, vous pourrez exprimer un temps quelconque au moyen d'un nombre; en y joignant le nom du temps élémentaire, vous aurez l'expression complète du temps.

La *clepsydre* des anciens, nommée ordinairement *sablier*, offre un moyen plus commode d'obtenir des temps égaux ou d'égale *durée*, par l'écoulement de l'eau ou de sable fin qui se vide successivement d'un vase dans un autre (*voy.* pl. I, fig. 8). — Les pendules, les horloges et les montres, aujourd'hui en usage, sont des instruments encore plus commodes et surtout plus précis.

45. *Division, représentation géométrique du temps.* La fraction la plus petite du temps que donnent les pendules et les montres ordi-

naires, est la *seconde* : 60 secondes qu'on écrit ainsi 60″, font une *minute* ou 1′; 60′ font une *heure* ou 1ʰ; 24ʰ font 1 jour; enfin *l'année* complète, ou le temps compris entre deux retours successifs du soleil et de la terre aux mêmes positions relatives, est de 365ʲ 5ʰ 48′ 50″ environ ou 31 556 930″. — M. Breguet est parvenu à faire des montres qui ne varient pas d'une demi-seconde dans une année; certaines montres, appelées *chronomètres*, donnent jusqu'aux dixièmes de seconde.

Ainsi nous pouvons compter le nombre d'heures, de minutes, de secondes, etc., écoulées entre deux instants quelconques, avec autant de précision et de facilité que nous comptons le nombre de mètres, de décimètres, etc., contenus dans une longueur ou distance.—Nous pouvons même représenter les temps par des lignes en portant, sur une droite et à partir d'un même point, autant de distances égales qu'il y a d'unités de temps dans chacun d'eux. Voyez pl. I, fig. 9, l'exemple d'une échelle AB dont les parties égales représenteraient des secondes.

REPOS, MOUVEMENT, VITESSE, INERTIE.

46. Un corps est en *repos* quand il reste au même lieu de l'espace; il n'est peut-être dans l'univers aucun corps qui soit absolument en repos; et, comme tout démontre que notre globe tourne sans cesse sur lui-même et autour du soleil, rien n'y possède un repos *absolu*.—Le repos n'est donc que *relatif;* un corps est en repos, pour nous, quand il conserve la même position par rapport à ceux que nous regardons comme fixes. Un corps qui reste à la même place, dans un bateau, est en repos par rapport à ce bateau, quoiqu'il soit réellement en mouvement par rapport aux rives.

Un corps est en *mouvement* quand il occupe successivement diverses positions dans l'espace; le mouvement n'est que relatif comme le repos. Un corps est en mouvement, pour nous, quand il change de place par rapport à ceux que nous considérons comme fixes.

Le mouvement est essentiellement *continu*, c'est-à-dire qu'un corps ne peut arriver d'une position à une autre sans avoir passé par une série de positions intermédiaires; ainsi le mouvement d'un point décrit une *ligne* nécessairement *continue*. Quand on parle du chemin décrit par un corps; on entend essentiellement celui d'un certain point lié à ce corps, et dont la position indique celle

du corps : par exemple, pour une boule sphérique, pour un cube, pour un cylindre, ce sera le centre de figure, etc.

47. *Distinction des mouvements, vitesse.* Le mouvement d'un point est dit *rectiligne* ou *curviligne*, selon que le chemin qu'il décrit est une droite ou une courbe. Quand le mouvement est curviligne, on peut le considérer comme ayant lieu sur un polygone rectiligne dont les côtés, extrêmement petits, se confondraient sensiblement avec la courbe. Les côtés successivement parcourus et prolongés indéfiniment, qui sont réellement des *tangentes* à la courbe, indiquent les *directions* correspondantes du mouvement.

Concevons que le temps total, employé par un point à parvenir d'une position à une autre, soit divisé en un grand nombre de parties égales et extrêmement petites, par exemple, en millièmes de secondes. Cela posé, si les portions de chemin, successivement décrites dans ces diverses parties du temps, sont égales entre elles, le mouvement sera *régulier* ou *uniforme*. S'il en est autrement, le mouvement sera *varié*. Il sera *accéléré* si les petits chemins successivement décrits sont de plus en plus grands, *retardé* si, au contraire, ces chemins sont de plus en plus courts. — L'aiguille des minutes d'une horloge, le cours régulier des eaux, etc., offrent l'exemple de mouvements sensiblement uniformes, parce que des espaces égaux sont décrits à chaque instant dans des temps égaux; le mouvement de *rotation* de la terre autour de son axe, qui s'opère en un jour, est aussi dans ce cas. — Un corps qui tombe verticalement offre l'exemple du mouvement accéléré; un corps qui s'élève aussi verticalement, celui du mouvement retardé. Dans le premier cas, le corps part avec un mouvement nul; dans le second, son mouvement finit par s'éteindre.

Dans tous ces cas, la *rapidité* ou la *lenteur* du mouvement est indiquée, pour chacun des instants égaux et très-petits, par la longueur, plus ou moins grande, de l'espace ou du chemin décrit pendant cet instant : cette longueur mesure l'*intensité* de la *vitesse* à ce même instant. — Ainsi la *vitesse* est *constante* dans le mouvement uniforme, elle est *accélérée* ou *retardée* dans le mouvement accéléré ou retardé.

48. *Mouvement, vitesse uniformes.* Dans ce mouvement, le plus simple de tous, les petits espaces, parcourus dans les instants suc-

cessifs, étant égaux, il est clair que le chemin décrit dans un temps quelconque, se composera d'autant de parties égales d'espace qu'il y a de parties égales dans ce temps. — Ainsi, dans le mouvement uniforme, des *espaces égaux* sont décrits dans des *temps égaux* quelle que soit leur petitesse ou leur grandeur ; les espaces *croissent comme les temps*, dans le *rapport des temps*, ou sont *proportionnels aux temps* employés à les décrire ; enfin le rapport de chaque espace au temps employé à le décrire reste *constant*. Toutes ces expressions désignent la même chose d'après les définitions et propriétés connues des proportions. — E étant le nombre des unités de chemin parcourues pendant le nombre d'unités de temps T, e celui des unités de chemin parcourues pendant le temps t ; on a, selon ce qui précède,

$$E : e :: T : t, \quad \text{ou} \quad E : T :: e : t, \quad \text{ou} \quad \frac{E}{T} = \frac{e}{t}.$$

Puisque, dans le mouvement uniforme, les espaces sont proportionnels aux temps employés à les décrire, la vitesse peut être indiquée par la longueur de l'espace décrit durant un temps quelconque, ou pour la simplicité, pendant *l'unité de temps*. Ainsi l'on dit : la vitesse de tel corps est de 2^m par seconde, ou de 60 fois $2^m = 120^m$ par minute, ou de $0^m,2$ par dixième de seconde, etc.; ce qui revient au même, puisqu'ici le rapport de l'espace au temps ne change pas. — Quand on sait qu'un mobile a décrit uniformément un certain espace dans un certain nombre d'unités de temps, de *secondes* par exemple, on trouve la vitesse ou le chemin dans l'unité de temps, en partageant l'espace en autant de parties égales qu'il y a d'unités de temps, ou en *divisant* l'espace par le temps. — Exemple : l'espace décrit uniformément pendant 1′ et 5″ ou 65″ étant de 260^m, la vitesse par seconde, ou l'espace décrit pendant 1″, est de $\frac{260^m}{65} = 4^m$. Réciproquement, si l'on *multiplie* la vitesse par un certain nombre d'unités de temps, le produit donnera l'espace décrit uniformément pendant ce temps.

49. *Mouvement périodique constant.* Il arrive quelquefois, dans la pratique, que la vitesse n'est pas rigoureusement constante ou la même à chaque instant, quoique les espaces décrits au bout de certains temps égaux, soient égaux. Tels sont en particulier tous les

mouvements *oscillatoires*, *alternatifs* ou de *va-et-vient*, dont les diverses *périodes* ou *retours* s'exécutent régulièrement et dans le même temps, bien que la vitesse varie continuellement dans l'intervalle de chaque période. Tel est encore le mouvement d'une voiture, d'un piéton qui décrivent constamment le même chemin dans chaque heure, chaque quart d'heure, et dont néanmoins le mouvement, tantôt accéléré, tantôt retardé, varie à chaque instant. Tel est enfin le mouvement de la terre autour du soleil, qui, tantôt plus lent et tantôt plus rapide, redevient cependant le même au bout de chaque année ou période.

De semblables mouvements sont dits *périodiques*, et on les remplace, pour la simplicité, par des mouvements entièrement uniformes qui s'accompliraient dans le même temps. La *vitesse constante* qui résulte de cette considération est une *vitesse moyenne;* il ne faut pas la confondre avec la *vitesse effective* qui est variable à chaque instant : c'est ainsi que les astronomes ont substitué au mouvement *réel* ou *vrai* de la terre, qui n'est que périodique, un mouvement moyen, uniforme, bien moins compliqué, et qui s'accomplit, comme l'autre, dans le cours d'une année; de là aussi la distinction du *jour vrai*, du *temps vrai* et du *jour moyen*, du *temps moyen*, dont les premiers sont donnés par les *cadrans solaires* et les autres par les bonnes horloges.

50. *Représentation géométrique des lois du mouvement.* Supposons que nous ayons une *table à deux colonnes* ou espèce de *Barème*, qui, pour un certain mouvement, donne les espaces ou chemins décrits au bout de chaque temps écoulé; prenons une certaine longueur (1 millimètre, 1 cent., etc.), pour représenter l'unité de temps, la *seconde* par exemple, et une autre longueur (1 centimètre, 1 décim., etc.) pour représenter l'unité de chemin, le *mètre* par exemple. Cela posé, traçons une droite indéfinie OB (pl. 1, fig. 10), et portons sur cette droite (45), à partir d'un même point O, une distance O*d* représentant l'un des temps indiqués à la table; sur la perpendiculaire en *d*, à la droite OB, portons une distance *d'd* représentant, d'après la table, le chemin décrit au bout du temps O*d*; faisons de même pour les autres temps et les chemins correspondants, on obtiendra une suite de points *d'*, *b'*, *c'*, ... qui, réunis deux à deux par des droites, donneront le polygone *d'b'c'* .... Ce polygone finira par se confondre avec une courbe véritable, si l'on multiplie convenablement les points, ou si l'on prend, dans la table,

des temps suffisamment rapprochés les uns des autres. Il est clair aussi qu'au moyen du tracé de la courbe, on pourra obtenir, comme par la table, le chemin décrit pour chaque temps donné; de sorte que cette courbe en tiendra lieu pour représenter la *loi*, la *relation* entre les temps et les chemins, quel que soit le mouvement.

51. *Remarque générale.* Nous rappellerons que les lignes O*a*, O*b*..., se nomment, en général les *abscisses* de la courbe, O l'*origine* et OB l'*axe* de ces abscisses; que pareillement les perpendiculaires *a'a*, *b'b*, *c'c*..., sont nommées les *ordonnées* de la courbe, et l'ensemble de ces ordonnées et abscisses, qui se correspondent respectivement, les *coordonnées* de cette même courbe; qu'enfin, l'intervalle *cd* entre deux ordonnées consécutives telles que *c'c*, *d'd*, ou la différence de leurs abscisses, se nomme quelquefois l'*accroissement* de ces abscisses, comme la différence *d'd''* entre ces mêmes ordonnées consécutives, se nomme aussi leur *accroissement* ou leur *décroissement*, selon que ces ordonnées vont en augmentant ou en diminuant, à mesure qu'elles s'éloignent de l'origine. — Quand les points consécutifs *a'*, *b'*, *c'*..., sont tellement rapprochés entre eux, que les droites *a'b'*, *b'c'*..., qui les unissent deux à deux, peuvent être censées se confondre avec les arcs correspondants de la courbe, on dit que ce sont des *éléments* de cette courbe; et, en général, les parties extrêmement petites d'une grandeur se nomment ses parties *élémentaires*, ses *éléments*.

52. *Représentation du mouvement uniforme.* Dans ce mouvement, les espaces *croissent comme les temps* (48); ainsi les ordonnées *a'a*, *b'b*, *c'c*.... (pl. I, fig. 11), y sont proportionnelles aux abscisses O*a*, O*b*, O*c*..., et partant telles que la ligne *a'b'c'*..., qui donne la loi du mouvement, est une *droite* (*voy.*, en Géométrie, la *théorie des lignes proportionnelles*). — Supposez qu'on partage l'*axe* OB des *abscisses* ou des *temps*, en un grand nombre de parties égales très-petites; puis qu'après avoir élevé les ordonnées correspondantes, on mène, par l'extrémité de chaque ordonnée, des parallèles à l'axe des abscisses, on formera une suite de petits triangles égaux et rectangles, tels que *c'd'd''* par exemple, semblables aux triangles O*aa'*, O*dd'*..., et dont les côtés seront proportionnels à ceux de ces derniers. Observant donc que les hauteurs *d'd''*.... de ces petits triangles mesurent les espaces décrits pendant les *temps élémentaires* correspondants *c'd''*, ou *cd*, on pourra répéter, au moyen de la figure,

tout ce qui a été dit ci-dessus sur les lois du mouvement uniforme. Ainsi la vitesse, c'est-à-dire (47) l'espace décrit dans chacun des instants égaux *ab*, *bc*, *cd*..., est constante, et peut être donnée par l'espace quelconque *e'e*, par exemple, qui serait décrit dans un certain temps O*e*, pris pour unité.

53. *Représentation des mouvements variés.* Dans ces mouvements, les espaces n'étant plus proportionnels aux temps, la ligne *a'b'c'*... (pl. I, fig. 12) n'est plus une droite : les petits espaces *b'b''*, *c'c''*..., décrits dans les temps élémentaires *ab*, *bc*.... sont inégaux; par conséquent la vitesse (47) varie à chaque instant. Pour le cas de la figure, le mouvement et la vitesse sont *accélérés*, parce que les espaces *b'b''*, *c'c''*..., décrits dans des instants égaux, vont sans cesse en croissant. Supposons qu'à l'instant qui répond au point *c'*, le mouvement cesse d'être accéléré, et se continue uniformément avec la vitesse qui a lieu en cet instant, le reste du mouvement, au lieu d'être représenté par une courbe, le sera par la droite indéfinie *c'm*, prolongement de *c'd'*; et, puisqu'à l'instant que l'on considère, le mobile parcourait l'espace *d'd''* dans le temps élémentaire *c'd'* ou *cd*, on voit qu'en vertu du mouvement censé devenu uniforme, il parcourrait, dans l'unité de temps, un espace qu'on obtiendra en cherchant l'ordonnée *mn* qui, pour la droite *c'm*, correspond à l'abscisse *c'n* qui représente cette unité de temps.

L'espace *mn*, d'après ce que nous avons vu (48 et 52), n'est autre chose que la vitesse de ce mouvement uniforme; or, si nous supposons que l'élément de temps *cd* est assez petit pour que la corde *c'd'* puisse être censée confondue avec la courbe, la droite indéfinie *c'd'm* deviendra précisément la tangente en *c'* à cette courbe : cette tangente se construira, dans certains cas, *géométriquement*, c'est-à-dire rigoureusement, et, dans d'autres, à *vue* ou par des *méthodes de tâtonnement*; or son inclinaison sur la parallèle *c'n* à l'axe des abscisses, donnera, comme nous venons de le dire, la *vitesse* ou le chemin *mn* qui serait décrit, dans l'unité de temps *c'n*, *si le mouvement devenait tout à coup uniforme*. On voit par là aussi que, si l'on connaissait exactement, en nombre et pour chaque instant très-petit *cd* ou *c'd''*, l'espace correspondant *d'd''*, on aurait la vitesse dont il s'agit au moyen de la proportion $c'd'' : d'd'' :: c'n$ ou $1 : mn$; d'où l'on tirerait pour cette vitesse, $mn = \frac{d'd''}{c'd''} \times 1 = \frac{d'd''}{cd}$.

Si, au lieu d'être accéléré, comme on vient de le supposer, le mouvement était *retardé*, la loi qui lie les temps aux espaces serait représentée par une courbe $a'c'f'$ (pl. 1, fig. 13), tournant sa *concavité* vers l'axe OB des temps; du reste, les raisonnements et les opérations pour trouver la vitesse, seraient absolument les mêmes. Si le mouvement, d'abord retardé, s'accélérait ensuite, la loi du mouvement serait évidemment représentée par une courbe telle que l'exprime la figure 13, dont la première partie $a'f$ tournerait sa concavité du côté de l'axe OB, et la seconde $f'k'$ du côté contraire; c'est-à-dire que cette courbe aurait une *inflexion* en f', au point qui correspond au changement du mouvement.

Enfin on voit que le mouvement *périodique constant*, tel qu'il a été défini ci-dessus (49), sera représenté par une courbe sinueuse ABC..... (pl. 1, fig. 14), dont les *ondulations* se font régulièrement autour d'une droite $a'b'c'd'$..., qui en représente le mouvement uniforme *moyen*.

54. *Observation*. Il est sans doute inutile de remarquer que les courbes précédentes, donnant uniquement la *loi* qui lie les *espaces* aux *temps*, ne doivent pas être confondues avec les lignes ou chemins mêmes parcourus par les mobiles : dans ces dernières lignes, les tangentes en chaque point donnent simplement (47) la *direction* du mouvement ou de la vitesse pour l'instant correspondant; et, selon ce qui précède (53), c'est le petit espace ou l'élément de chemin décrit sur la courbe du mobile, à cet instant, qui, étant divisé par le temps élémentaire employé à le décrire, donne pour quotient ce que nous avons nommé la *vitesse*.

55. Inertie de la matière. La matière est *inanimée* ou *inerte*, elle ne peut se donner du mouvement par elle-même, ni changer celui qu'elle a reçu. — Un corps en repos y persévère, à moins qu'une cause telle que la pesanteur, un moteur animé, ne l'en fasse sortir. — S'il a été mis en mouvement et dans une certaine direction ab (pl. 1, fig. 15), il continuera à se mouvoir, de b en c, sur le prolongement de la droite ab; car, arrivé en b, il n'y a pas de raison pour qu'il se dirige au-dessus ou au-dessous de ab, à moins qu'une cause ne le fasse dévier de sa route. Pareillement, s'il a une certaine vitesse de a en b, il conservera cette vitesse tant qu'une cause étrangère ne viendra pas ralentir ou accélérer son mouvement,

cette vitesse. — Si nous voyons la bille lancée sur un billard ralentir sans cesse de vitesse, cela tient à la résistance du tapis et de l'air; si nous voyons un corps tomber verticalement quand on l'abandonne, et accélérer même de mouvement, cela tient à l'action de la pesanteur qui agit continuellement sur ce corps comme s'il était au repos : c'est tellement vrai, qu'en diminuant les obstacles qui s'opposent au mouvement de la bille, elle y persévère plus longtemps, et qu'en lançant le corps de bas en haut, sa vitesse diminue au lieu d'augmenter. Enfin, si la direction du mouvement (47) d'une bombe ou d'une pierre lancée obliquement, change à chaque instant, ou si elles décrivent des lignes courbes, c'est encore parce que la pesanteur tend sans cesse à ramener cette bombe ou cette pierre vers la terre.

Loi de l'inertie. Il résulte de là qu'en vertu de l'*inertie*, un corps qui se meut actuellement avec une certaine vitesse et dans une certaine direction, conserverait éternellement cette direction et cette vitesse, et que le mouvement serait rigoureusement rectiligne et uniforme, si rien ne venait à le déranger ; qu'enfin si, par une cause quelconque, le corps est forcé de décrire une ligne courbe ABC (pl. 1, fig. 16), cette même inertie (la cause venant tout à coup à cesser, à un certain instant), lui ferait décrire la *tangente* BT au point correspondant B de la courbe, et conserver la vitesse qu'il possédait en ce point.

DES FORCES, DE LEUR MESURE ET DE LEUR REPRÉSENTATION.

56. *Définition.* On appelle en général *forces*, les *causes* qui modifient actuellement l'état d'un corps, ou qui le modifieraient si d'autres forces ne venaient empêcher ou *détruire* l'effet des premières : l'*attraction*, la *pesanteur* (27 et suiv.), la *résistance* de l'air et des fluides, le *frottement*, le *calorique* considéré comme cause de la répulsion (28), sont de véritables forces, puisqu'ils peuvent changer l'état de repos ou de mouvement des corps. Nous ajoutons *ou qui le modifieraient*, etc. ; car un corps posé sur une table de niveau, par exemple, ou suspendu verticalement par un fil, ne paraît pas actuellement changer d'état; mais il en a changé d'abord, et la pesanteur le presse sans cesse contre la table ou lui fait tirer le fil; elle le ferait mouvoir enfin si la résistance de la table ou du fil ne s'opposaient continuellement à son action.

57. *Effets des forces.* Les forces produisent, comme on voit, des effets très-variés, suivant les circonstances : tantôt elles laissent les corps en repos, en se détruisant constamment les unes les autres, tantôt elles en changent la forme, elles les rompent, tantôt elles leur impriment du mouvement, elles accélèrent ou retardent celui qu'ils possèdent, ou en changent la direction, tantôt enfin ces changements s'opèrent avec lenteur, d'une manière imperceptible, tantôt ils s'opèrent au contraire avec rapidité, brusquement ; mais dans le fait; c'est toujours dans un temps fini et par degrés continus. — Si nous voyons quelquefois des corps changer brusquement d'état, de direction ou d'intensité de mouvement, c'est que la force, alors très-grande, produit son effet dans un temps dont la durée est seulement inappréciable à nos moyens de mesurer le temps. — Si la balle d'un fusil traverse un carreau de verre, une porte, une feuille de papier librement suspendue, sans leur imprimer un mouvement sensible, cela prouve seulement qu'elle opère cet effet avec une rapidité telle que les parties enlevées n'ont pas le temps de propager leur mouvement dans toute l'étendue des corps. — Si, d'après l'expérience qui en a été faite autrefois à la Rochelle, un canon suspendu verticalement à l'extrémité d'une corde, porte le boulet au même but que s'il était sur son affût, cela prouve seulement que la pièce n'avait point dévié d'une manière sensible avant l'instant où le boulet est sorti de l'âme, et qu'il lui faut un temps bien plus considérable qu'à ce boulet, pour acquérir une vitesse ou un mouvement qu'on puisse apprécier ou mesurer. — Nous examinerons, dans ce qui suit, comment le mouvement se propage, de proche en proche et d'une manière continue, dans toute l'étendue des corps, et comment il se fait que ceux qui ont le plus de poids et de densité, sont aussi ceux qui, dans un temps donné, reçoivent le moins de vitesse par l'effet d'une même force dont l'action est plus ou moins prolongée.

58. *Dénomination des forces.* Les forces qui donnent le mouvement aux corps s'appellent en général *forces motrices :* elles sont *accélératrices* quand elles accélèrent à chaque instant le mouvement, elles sont *retardatrices* quand elles le retardent. Souvent aussi on nomme *puissances* les forces qui agissent pour favoriser ou augmenter le mouvement, et *résistances* celles qui, au contraire, tendent à l'empêcher ou à le diminuer : d'après cette définition, les

forces accélératrices sont des puissances véritables, et les forces retardatrices des résistances. En général, on donne le nom de *puissance* aux forces qu'on regarde comme capables de produire un certain effet, et celui de *résistance* aux forces qui s'opposent à l'accomplissement de cet effet.

59. *Nature et comparaison des forces.* Nous avons, par nous-mêmes, une idée exacte du mode d'agir de la force. Quand nous poussons ou tirons un corps, qu'il soit libre ou qu'il ne le soit pas, nous éprouvons une sensation qui se nomme *pression, traction,* ou en général *effort :* cet effort est absolument analogue à celui que nous exerçons en soutenant un poids. Ainsi les forces sont pour nous de véritables pressions, comparables à ce qu'on nomme le *poids* des corps. La pression peut être plus forte ou plus faible; c'est donc une grandeur, et, pour la mesurer, la représenter par des nombres, il ne s'agit que de choisir une pression quelconque pour unité; ce qui ne sera pas difficile si nous pouvons trouver des pressions égales, comme nous avons trouvé des temps égaux (44).

Deux forces sont égales quand, substituées l'une à l'autre et dans les mêmes circonstances, elles produisent le même effet ou en détruisent une même troisième qui leur est directement opposée.

Suspendons (pl. I, fig. 17) un corps P à l'extrémité d'un fil AB; en vertu de son poids, ce fil prendra la direction de l'*aplomb* ou de la *verticale* AB (30), et il faudra, en A, suivant AB, un certain effort pour le soutenir contre l'action de la pesanteur. Si deux forces, ainsi appliquées successivement à ce fil et de la même manière, maintiennent le corps P en repos, ces forces seront nécessairement *égales entre elles* et au *poids du corps :* une *force double, triple,* supportera *deux, trois corps* semblables au premier, suspendus les uns au-dessous des autres, par le même fil. Prenant donc pour unité l'une de ces forces, par exemple celle qui supporte un *centimètre cube d'eau pure,* ou le poids d'un gramme (34), une force quelconque sera exprimée par le nombre qui indique combien de grammes elle pourra supporter : c'est au gramme, ou plutôt au *kilogramme,* que désormais nous comparerons toutes les forces de *pression,* de *traction,* de *tension,* de *compression,* etc.

60. *Mesure des forces par les poids.* Nous savons que les poids se mesurent ou se comparent entre eux par le moyen de *balances;*

d'après le caractère général ci-dessus auquel on reconnaît que deux forces sont égales, il devient facile de trouver le poids d'un corps, quelles que soient la justesse et la composition d'un tel instrument. Il suffit, pour cela, de s'assurer que ce corps, substitué dans les mêmes circonstances, à un certain nombre de poids étalons, produit le même effet sensible sur la balance, pour affirmer que le poids du corps est égal à celui des étalons. Sous ce rapport donc, tous les appareils quelconques peuvent être employés à mesurer le poids des corps, et par suite les forces.

Les ressorts, entre autres (17 et suiv.), quand ils sont susceptibles de conserver longtemps leur élasticité, peuvent servir et servent en effet à cet usage dans la pratique : tels sont plus particulièrement le *peson à ressort* du commerce (fig. 18), et le *dynamomètre de Régnier* (fig. 19), instrument plus compliqué et qui sert à mesurer des efforts de pression ou de traction supérieurs à 100 kilog. Dans l'un et dans l'autre, la grandeur de la flexion du ressort est indiquée par le mouvement d'une aiguille ou d'une tige qui parcourt les différentes divisions d'un limbe; ces divisions ayant été obtenues, lors de la fabrication, en suspendant directement des poids étalons à l'instrument, fournissent le moyen de mesurer ensuite le nombre des *kilogrammes* d'un effort quelconque. En se servant des balances à ressort, il ne faudra pas oublier de vérifier préalablement l'exactitude de leurs divisions au moyen de poids étalonnés, et de changer la valeur de la graduation, si l'élasticité se trouvait altérée depuis l'instant de la fabrication. Du reste, nous n'insisterons pas sur la description de ces instruments, parce que leur emploi dans les arts et leur intelligence n'ont rien de difficile, et qu'il nous suffit ici de savoir qu'il existe des moyens directs de mesurer les forces par des poids.

61. *Observations.* En proposant, comme nous venons de le faire, de mesurer les forces par des poids, nous supposons essentiellement que l'effort pour soutenir, contre l'action de la pesanteur, un corps quelconque, par exemple, un *litre* ou *décimètre cube* d'eau pure, soit constamment le même dans tous les temps et pour tous les lieux, et que par conséquent le *kilogramme*, poids de ce volume d'eau, soit une grandeur *absolue*, *invariable*. S'il n'en était pas ainsi, les poids ne pourraient aucunement nous servir pour mesurer les forces, et il faudrait recourir à quelque autre unité moins

sujette à changer. Or on sait, par expérience, que l'action de la pesanteur n'a pas varié avec le temps, du moins d'une manière sensible, et l'on peut croire qu'à moins d'événements extraordinaires, elle ne changera pas non plus dans l'avenir. A la vérité, l'action de la pesanteur diminue à mesure qu'on s'élève au-dessus de la surface de la terre; elle diminue pareillement à mesure qu'on s'éloigne des pôles pour s'approcher de l'équateur; de sorte que le même corps qui, dans notre pays et à la surface des plaines, fait, par son poids, fléchir un ressort jusqu'à un certain degré, le ferait fléchir un peu moins lorsqu'on le transporterait à l'équateur ou sur le sommet d'une montagne élevée; mais, pour l'étendue d'un pays comme la France, et pour des montagnes telles qu'il s'y en rencontre, la diminution du poids est à peine sensible : par exemple, pour une élévation verticale d'une lieue au-dessus des plaines, elle serait au plus de $\frac{1}{750}$ du poids mesuré au niveau de ces plaines.

Il suit de là donc que nous pouvons regarder le poids absolu des corps, ou la force qui soutient ce poids contre l'action de la pesanteur, comme une quantité tout à fait constante, du moins dans l'étendue ordinaire de nos travaux industriels, et que par conséquent nous pouvons aussi, sans crainte de commettre des erreurs appréciables, prendre pour unité de force l'unité de poids, conformément à ce qui a été proposé ci-dessus. Nous verrons d'ailleurs plus tard comment, à l'aide du *pendule*, on peut rendre sensible la variation de la pesanteur dans les divers lieux, variation généralement trop faible pour être appréciée, d'une manière facile et rigoureuse, par le moyen des ressorts ou d'instruments analogues.

62. *Point d'application, direction, intensité et représentation des forces.* Il faut distinguer dans une force, 1° *son point d'application*, c'est-à-dire le point où elle agit immédiatement; 2° sa *direction* indéfinie ou la droite que décrirait son point d'application, s'il obéissait librement à la force; 3° le *sens* de son action, qui peut s'exercer de la gauche vers la droite, du haut en bas, etc., ou inversement; 4° sa *grandeur absolue* ou son *intensité*, mesurée par des poids, par un certain nombre de kilogrammes.

Soit A (pl. I, fig. 20) le point d'application d'une force dont la droite AB est la direction indéfinie; portons, de A en P, sur cette droite et dans le sens de son action, un nombre d'unités de longueur, par exemple de *centimètres*, de *millimètres*, égal au nombre

des kilogrammes, qui exprime son intensité ; il est évident que cette force sera complétement représentée. Ordinairement on exprime le sens de l'action au moyen d'une petite flèche, et l'intensité de la force par une lettre telle que P, et cela afin d'abréger ; ainsi l'on dit : une force P ou AP, une force Q ou BQ, comme on dirait une force de 10 kilogrammes, de 15 kilogrammes, etc. De cette manière, l'étude de la Mécanique est ramenée à celle de certaines figures de la Géométrie.

MODE D'ACTION DES FORCES SUR LES CORPS.

63. *Action directe.* Quand une force agit extérieurement à un corps solide et contre un point de sa surface, elle exerce une pression qui refoule les molécules les plus près de ce point ; le corps *plie, fléchit* ou se comprime suivant les circonstances ; les molécules se trouvant plus rapprochées au contact, font effort pour retourner à leur place, en vertu de leur *force de répulsion* naturelle (27 et 28), ou de l'élasticité plus ou moins grande qui appartient à toutes les substances (19) ; elles refoulent aussi les molécules qui leur sont immédiatement voisines, et, de proche en proche, les plus éloignées jusqu'à l'autre extrémité du corps. Si cette extrémité est fixe ou arrêtée par un obstacle, l'effet de la force se réduira à une compression, à un changement de forme du corps ; si, au contraire, cette extrémité est libre, elle s'avancera, de sorte que le mouvement aura été propagé ou communiqué à toutes les parties, et cela de proche en proche, ou successivement. Ce mouvement *intestin*, résultat d'une suite de compressions, prouve qu'il faut un certain temps (57) pour que la force ait produit son effet total, et l'absurdité de supposer que la vitesse finie puisse s'engendrer *instantanément* ou *tout à coup*. Les mêmes choses se passeraient d'ailleurs si, à l'inverse, la force était employée à détruire le mouvement acquis d'un corps ; elle détruirait d'abord la vitesse des molécules les plus près du point d'action, puis, de proche en proche, celle des molécules les plus éloignées, etc.

Nous avons supposé que la force appliquée extérieurement au corps, agissait pour le presser, le refouler sur lui-même ; mais, si elle s'exerçait du dedans au dehors de façon à le tirer, à l'étendre, les molécules seraient écartées au lieu d'être rapprochées, et feraient, en vertu de l'*attraction* qui les unit (27 et 28), effort pour

reprendre leurs distances respectives, et pour s'entraîner ainsi, de proche en proche, d'une extrémité du corps à l'autre ; d'où l'on voit qu'en vertu de cette attraction et de la répulsion, les molécules des corps se comportent comme si elles étaient maintenues entre elles et séparées par de *petits ressorts* qui s'opposeraient aussi bien aux forces qui tendent à les rapprocher, qu'à celles qui tendent à les désunir.

64. *Réaction; principe de la réaction.* D'après cette manière d'envisager l'action des forces sur les corps, entièrement fondée sur l'expérience de ce qui se passe quand on les tire ou qu'on les comprime, il est évident qu'un effort ne peut être exercé, en un point quelconque d'un corps, sans que les ressorts moléculaires de celui-ci n'agissent, en sens contraire, avec un effort précisément égal et contraire : c'est ce qu'on exprime en disant, d'après l'illustre Newton, que *la réaction est toujours égale et contraire à l'action*, principe démontr par toutes sortes de faits.—En pressant, par exemple, du doigt un corps, en le tirant avec une ficelle, ou en le poussant avec une barre, nous sommes pressés, tirés ou poussés, en sens contraire, de la même manière et avec le même effort. — Deux pesons à ressorts (60), placés (pl. I, fig. 21) aux extrémités, A et B, d'une telle ficelle ou d'une telle barre, indiquent le même degré de tension, quand une force P vient à agir, par leur intermédiaire et celui de la ficelle ou de la barre, sur un obstacle placé à l'extrémité opposée. En général, nous ne pouvons concevoir qu'une force exerce son action, sans faire naître à l'instant une résistance égale et directement contraire : si une molécule matérielle en attire une autre, réciproquement celle-ci attirera la première avec une force égale et contraire ; si la pesanteur ou l'attraction terrestre sollicite les corps vers la terre (30), réciproquement ces corps sollicitent la terre à se rapprocher d'eux avec une force égale et directement opposée, etc. C'est là un des principes fondamentaux de la Mécanique.

65. *Hypothèses admises en Mécanique.* Dans tous les cas où une force agit, comme on vient de le dire, par l'intermédiaire d'une ficelle ou d'une barre tendue en ligne droite, l'action de cette force ne se transmet intacte, d'une extrémité à l'autre, que par une suite d'actions ou de réactions, égales et contraires, qui se détruisent ou se balancent réciproquement, et que les ressorts moléculaires exercent en chaque point de la droite suivant laquelle agit cette

force et la résistance opposée. C'est en vertu de cette considération qu'il est permis de supposer que *l'action d'une force s'opère ou se transmet en chacun des points de la droite matérielle qui l'unit à la résistance.*

Dans cette action réciproque des diverses parties de la barre et de la ficelle, celles-ci se trouvent raccourcies ou allongées jusqu'à un certain degré relatif à l'énergie de la puissance; mais, si cette énergie reste constante et ne surpasse pas d'ailleurs la force de résistance (20) de la ficelle ou de la barre, l'allongement ou le raccourcissement cessera d'augmenter. C'est d'après cette seconde considération que nous pourrons quelquefois regarder les corps solides et résistants, employés dans les arts pour transmettre l'action des forces, comme parfaitement *rigides* et *inextensibles;* d'autant plus qu'on les choisit, presque toujours, de façon qu'ils fléchissent en réalité très-peu sous l'action de ces forces, et que nous ne leur attribuerons cette qualité, dans toute autre circonstance, qu'après que le changement de forme aura déjà été opéré, et pour le temps seul où il restera invariable sous l'action constante des forces appliquées au corps.

Supposons, par exemple (pl. I, fig. 22), qu'une force P soit employée à pousser ou presser un obstacle solide K, par l'intermédiaire d'une barre ou d'un corps flexible quelconque, ABC, et concevons que cette force, ayant fait acquérir à la barre toute la flexion qu'elle peut recevoir d'après sa constitution, demeure constante; on pourra, dès lors, considérer ABC comme entièrement rigide, et supposer même que le point A soit réellement lié au point C, par une droite matérielle AC, suivant laquelle la pression de P se transmet exactement contre l'obstacle, puisque la réaction est nécessairement égale et contraire à l'action. Ainsi la force P produira en C, contre l'obstacle, précisément le même effet que si elle y était immédiatement appliquée, et elle fera naître, en ce point, une résistance Q égale et dirigée, de Q vers C, dans le prolongement de la droite AC ou de sa propre direction. On pourrait même remplacer cette force P par une autre qui lui serait égale, et qui tirerait le point A, vers C, par le moyen d'une barre ou d'une ficelle, sans que, pour cela, les effets soient aucunement modifiés; mais il faut nécessairement supposer que cette barre et cette ficelle soient inextensibles, ou qu'elles aient reçu, au moment où on les applique, le degré d'extension qui convient à l'énergie de la force.

Voilà comment on devra entendre les choses toutes les fois qu'il nous arrivera, par la suite, de considérer les corps comme entièrement roides, ou de supposer que le point d'application d'une force est transporté en un point quelconque de sa direction.

66. *De l'inertie considérée comme force.* Nous avons vu ci-dessus (63 et 64) que quand une force agit, à l'extérieur d'un corps libre, pour lui imprimer du mouvement ou pour détruire celui qu'il possède, ce corps réagit ou oppose une résistance égale et contraire à la force : cette résistance, cette réaction devant être considérée comme un résultat de l'inertie des diverses particules matérielles du corps, on voit que l'inertie est une force véritable qui peut se mesurer en poids. Pour un même corps, la résistance augmente évidemment avec le degré de vitesse imprimée ou détruite ; nous verrons plus tard qu'elle est exactement proportionnelle à ce degré, et qu'elle augmente aussi avec la quantité de matière renfermée dans chaque corps.

Quand on tire un corps libre par le moyen d'une ficelle, cette ficelle s'étend, s'allonge et peut même se rompre si elle est tirée brusquement, et cela d'autant mieux que le corps est plus *massif* ou plus *pesant* : le même effet serait produit évidemment si, le corps étant en mouvement, on essayait de le retenir par le moyen de la ficelle. — Si on suspend un corps à l'extrémité d'une ficelle verticale, et qu'on place un peson à ressort dans la ligne de *traction* ou de *tirage* de cette ficelle, le ressort indiquera le poids du corps dans le cas du repos ; mais, si on élève le corps avec une certaine vitesse, le ressort se pliera davantage, par suite de la résistance opposée par l'inertie de la matière. Le mouvement étant une fois acquis et demeurant régulier, uniforme (4), le ressort reprendra et conservera constamment l'état de tension qu'il avait dans le cas du repos, attendu que l'inertie ne se fait sentir (55), comme force, qu'autant que la vitesse du corps est altérée, et que la pesanteur, au contraire, agit, sans relâche, sur les corps qu'ils soient ou non en mouvement. On voit donc que l'état de tension du ressort peut servir à mesurer les variations de la vitesse du corps, et la grandeur de la résistance qu'en vertu de son inertie, il oppose à l'action de la puissance qui soulève la ficelle.

67. *Action combinée et réciproque des forces.* Nous n'avons, dans

ce qui précède, considéré que l'action simple d'une force appliquée en un point d'un corps, et nous avons vu qu'il naît, de cette action, une réaction égale et précisément contraire, provenant de l'inertie de la matière du corps, lorsqu'il est libre, ou de la résistance opposée par un obstacle extérieur quelconque, réaction qui est transmise d'une extrémité à l'autre de ce corps (63) par une suite d'actions et de réactions semblables qu'exercent entre elles les molécules, en vertu de leur force de ressort. Or, il se passe des choses absolument analogues quand plusieurs forces agissent à la fois en différents points d'un corps ; leurs effets se combinent tellement que chacune d'elles éprouve, de la part de ce corps, une réaction égale et contraire à la sienne propre, et que les autres forces lui transmettent encore par l'intermédiaire des ressorts moléculaires ; cette réaction peut donc être considérée comme un résultat plus ou moins immédiat de l'action de toutes les autres forces, ou comme la résistance qu'elles opposent à l'action directe de celle que l'on considère.

C'est ainsi qu'on devra entendre généralement le *principe de l'action égale et contraire à la réaction*, et que nous pourrons dire et concevoir désormais qu'une force en *détruit* ou *vainc* plusieurs autres, sans leur être directement opposée, bien que, dans la réalité, elle ne détruise ou n'empêche directement que l'effet qui serait produit par sa réaction, si, tout à coup, elle venait elle-même à s'anéantir ou à être détruite par une nouvelle force quelconque.

68. *Exemple de l'action combinée des forces.* Supposons qu'un cheval soit employé à tirer une voiture le long d'une route ; on pourra le considérer comme détruisant à chaque instant, par l'intermédiaire des traits, des palonniers, du timon, de la cheville ouvrière, etc., toutes les résistances qui s'opposent à son action, dans les diverses parties de la voiture. Si le mouvement est constamment le même ou uniforme, ces résistances proviendront uniquement du terrain et des divers frottements, l'inertie n'y entrant pour rien (55 et 66). Si la vitesse augmente à chaque instant, l'inertie, mise en action, s'ajoutera aux résistances précédentes ; enfin si la vitesse vient à diminuer par suite d'obstacles particuliers, l'inertie, qui tend à faire persévérer la voiture dans son état de mouvement, ajoutera son action à celle du cheval, pour vaincre ces obstacles et toutes les autres résistances.

C'est encore ainsi qu'on peut expliquer le principe de l'égalité de pression des fluides (14), en vertu duquel une pression quelconque, exercée contre une portion de la surface des parois du vase qui contient de toutes parts ce fluide, est transmise également sur toutes les parties de la surface de ces parois ; car cette répartition uniforme de la pression, cette réaction réciproque des parois du vase sur le fluide et du fluide sur les parois, ne peut évidemment provenir que de l'égalité des actions et des réactions qui s'exercent entre les différentes molécules de ce fluide. On voit aussi que, si le fluide n'était pas contenu, de toutes parts, au moyen de pistons, de parois solides ou par la réaction d'autres fluides tels que l'air, etc., le principe de l'égalité des pressions n'aurait plus lieu, du moins de la même manière, attendu que la pression, exercée en un certain point de sa surface extérieure, pourrait être employée, en partie, à vaincre l'inertie du fluide et toutes les autres forces qui s'opposent directement à son mouvement, à son changement de forme. Quant au principe de la réaction, il n'en subsistera pas moins pour toutes les forces appliquées aux différentes parties de ce fluide, et toujours l'action de chacune d'elles sera égale et contraire à la réaction qu'elle éprouve en son point d'application.

69. *Observations sur l'équilibre des forces.* Il arrive quelquefois qu'on nomme *équilibre* cette action réciproque des forces appliquées à un corps, par suite de laquelle une force quelconque peut être censée vaincre ou détruire, par l'intermédiaire de ce corps, l'action de toutes les autres qu'on regarde comme étant opposées à la sienne propre : c'est ainsi qu'on dirait, par exemple, du cheval qui, dans l'hypothèse ci-dessus, traîne une voiture le long d'une route, qu'il fait équilibre à toutes les résistances qui s'opposent au mouvement de cette voiture. Mais, quand il nous arrivera, par la suite, d'employer un langage aussi général, en parlant des actions réciproques exercées par les forces sur un corps, il ne sera uniquement question que de l'équilibre de ces forces considérées en elles-mêmes, et non de celui du corps ; car, d'après les idées généralement admises, l'équilibre des corps repose sur des notions tout autres, et que nous examinerons plus tard, lorsque nous aurons à étudier les effets combinés des forces. Il ne s'agit ici que de nous entendre sur la signification attachée à certains mots ; et, loin d'avoir à nous occuper d'une telle complication d'effets, nous devons nous

borner à poursuivre l'examen du cas simple et élémentaire où une force en détruit constamment une autre qui lui est égale et directement opposée ou qui lui fait équilibre. C'est à cèla, en effet, que se réduit, en définitive, l'emploi des forces motrices dans les travaux industriels.

DU TRAVAIL MÉCANIQUE DES FORCES ET DE SA MESURE.

70. *Notions générales.* Travailler c'est vaincre ou détruire, pour le besoin des arts, des résistances telles que la force d'adhésion des molécules des corps, la force des ressorts, celle de la pesanteur, l'inertie de la matière, etc. — User, polir un corps par le frottement, le diviser en parties, élever des fardeaux, traîner une voiture le long d'un chemin, bander un ressort, lancer des pierres, des boulets, etc.; c'est travailler, c'est vaincre, pendant un certain temps, des résistances sans cesse renouvelées dans la durée de ce temps.

Le *travail mécanique* ne suppose pas seulement une résistance vaincue, une fois pour toutes, ou mise en équilibre par une force motrice, mais *une résistance reproduite le long d'un chemin parcouru par le point où s'exerce cette résistance et dans la direction propre de ce chemin.* — Pour enlever une parcelle de la matière d'un corps, avec un outil par exemple, non-seulement il faut un effort directement opposé à la résistance que présente cette parcelle, mais encore il faut faire avancer le point d'action de l'outil dans la direction de la résistance : plus cet avancement sera grand, plus la parcelle enlevée aura de longueur; d'un autre côté, plus sera grande la largeur ou l'épaisseur de cette parcelle, plus la résistance ou l'effort sera considérable; l'ouvrage fait, à chaque instant, croît donc avec l'intensité de l'effort et la longueur du chemin décrit dans sa direction propre. Un raisonnement analogue est applicable à tous les travaux industriels opérés par le secours des outils et des machines.

71. *Mesure du travail quand la résistance est constante.* Supposons que la résistance soit *constante*, ou reste la *même* à chaque instant, aussi bien que l'effort qui lui est égal et directement opposé; il est clair que l'ouvrage produit et le travail seront proportionnels au chemin décrit par le point d'application de la résistance, c'est-à-

dire qu'ils seront doubles si le chemin est double, triples si le chemin est triple, etc.; de sorte que, si l'on prend *pour unité* le travail qui consiste à vaincre directement la résistance, le long d'un chemin de 1 mètre, le travail total pourra être *mesuré* par le nombre des mètres et des fractions de mètre, parcourus. Mais si pour un autre travail, il arrivait que la résistance constante fût double, triple, etc., de ce qu'elle était dans le premier, à chemin égal décrit par le point d'action de cette résistance, le travail serait également double, triple, etc., de ce qu'il était. Si, par exemple, la résistance était de 1 kilogramme dans le premier cas, et qu'elle fût de 2, de 3, de 4 kilogrammes dans le second, le travail, pour chaque mètre de distance, vaudrait 2, 3, 4 fois celui qui, à chemin égal, répond à la résistance de 1 kilogramme.

En prenant donc pour *unité de travail mécanique* celui qui consiste à vaincre la résistance de 1 kilogramme le long de 1 mètre, on voit qu'un travail quelconque, dont l'objet est de vaincre directement une résistance qui reste la même, sera mesuré par le nombre des kilogrammes qui expriment cette résistance (60), répété autant de fois qu'il y a de mètres, et de fractions de mètre dans le chemin parcouru par le point d'action de cette résistance, c'est-à-dire par le *résultat de la multiplication* de ces deux nombres. — Supposons un moteur employé à trainer un corps sur un chemin horizontal et rectiligne, par le moyen d'une corde tirée dans le sens même de ce chemin; son travail consistera uniquement à vaincre le frottement constant exercé sur le terrain, et qui lui est directement opposé: si, par exemple, la résistance occasionnée par ce frottement, sur la corde, est de $37^{kil},50$, et que le chemin total décrit, dans un certain temps, soit de 64^{m}, il est clair qu'en prenant pour unité de travail celui qui consiste à vaincre la résistance d'un kilogramme le long d'un mètre de chemin, le travail total sera mesuré par le nombre $37,50 \times 64 = 2400$; c'est-à-dire, en d'autres termes, que, si l'on était convenu de payer un centime, je suppose, l'unité dont il s'agit, il faudrait payer 2400^{cent} ou $24^{f},00$ le travail total.

En général, on voit que le *travail mécanique que nécessite directement une certaine résistance constante, et qui se reproduit le long d'un certain chemin, a, pour mesure, le produit de cette résistance par le chemin que décrit son point d'action, dans sa direction propre, l'unité de travail étant toujours l'unité d'effort, mesuré en poids, parcourant l'unité de chemin ou de longueur.* Nous disons *directement*,

parce qu'en effet, il ne s'agit ici que du travail d'une puissance qui serait directement opposée à la résistance, et non du travail d'un moteur qui agirait d'une manière quelconque sur cette résistance (75 et 76).

72. *Mesure du travail quand la résistance est variable.* Si la résistance, ou l'effort égal et opposé qui la détruit, au lieu d'être la même à chaque instant, variait sans cesse ainsi qu'il arrive dans bien des circonstances, le travail ne pourrait plus s'évaluer comme on vient de le dire; mais, attendu que, pour chacun des espaces très-petits décrits par le point d'action, la résistance peut être censée constante et sensiblement égale à la *moyenne* ou à la *demi-somme* de celles qui répondent au commencement et à la fin de cet espace, le petit travail qui y est relatif, pourra encore se mesurer par le produit de cette résistance moyenne et de l'élément de chemin dont il s'agit. Le travail total se composant de la somme des travaux partiels, sera mesuré également par la somme de tous les petits produits analogues qui leur correspondent.

Traçons, sur un plan ou tableau (pl. I, fig. 23), une courbe $O'a'b'c'\ldots$ dont les abscisses Oa, Ob, Oc, ... représentent (51) les chemins successivement décrits par le point d'action de la résistance, et dont les ordonnées OO', aa', bb', ... représentant, d'après une échelle convenable, les résistances ou efforts correspondants censés mesurés en kilogrammes. Supposons que Oa, ab, bc... soient les espaces égaux et très-petits décrits à chaque instant. Les travaux partiels ayant pour mesure les produits de ces petits espaces par les résistances moyennes correspondantes, censées constantes pour chacun d'eux, c'est-à-dire les produits $\frac{1}{2}(OO'+aa').Oa$, $\frac{1}{2}(aa'+bb').ab$, $\frac{1}{2}(bb'+cc').bc$,.... ces travaux seront représentés (voyez, en Géométrie, le *mesurage des surfaces*) par les aires des trapèzes $OO'a'a$, $aa'b'b$, $bb'c'c$,... et le travail total le sera par la surface de tous ces petits trapèzes réunis. Or, on voit, d'une part, que cette surface différera d'autant moins de la surface $OO'ab'\ldots k'hO$, comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les ordonnées OO', hh' qui correspondent au commencement et à la fin du travail, et, de l'autre, que la somme des travaux partiels, représentée par cette surface, s'approchera d'autant plus d'être égale au travail total, que le nombre des ordonnées ou des espaces successifs sera lui-même plus considérable. Si donc on multiplie

convenablement ce nombre des ordonnées, on pourra, sans erreur, prendre la surface $OO'a'h'hO$ pour la mesure véritable du travail effectué pendant que le point d'application de la résistance décrit l'espace Oh.

On voit, d'après cela, que, quand on connaîtra, soit au moyen de l'expérience, soit de toute autre manière, la *loi* ou la *table* (50) qui lie la résistance variable aux chemins décrits par son point d'application, toute la question, pour trouver le travail mécanique relatif à un espace quelconque parcouru, consistera à tracer la courbe de cette loi, et à calculer, par petites parties, l'aire de la surface qui répond à cette longueur de chemin. Comme les unités de longueur qui ont servi à construire les ordonnées, représentent des unités d'efforts ou de poids d'une certaine espèce, et que les abscisses sont elles-mêmes composées d'unités de longueur représentant des unités de chemin parcouru, on voit que l'*unité de surface* des trapèzes ou de leur somme totale, sera réellement l'*unité d'effort* exercé ou répété le long de l'*unité de chemin* *.

73. *Valeur de l'effort moyen.* Lorsqu'on a ainsi trouvé la valeur du travail mécanique d'une résistance variable, pour une distance quelconque parcourue par son point d'action, en divisant cette valeur par cette distance, on obtiendra ce qu'on nomme l'*effort moyen* de la résistance, ou l'*effort constant* qui, étant répété le long du chemin, produirait la même quantité de travail; car nous avons vu (71) que, pour une résistance constante, le travail se mesure simplement par le produit de cette résistance et du chemin total décrit par son point d'application.

La considération de l'effort moyen en vertu duquel un travail est censé s'opérer, n'est pas moins importante que celle de la vitesse moyenne dans le mouvement périodique (49); car il arrive, presque toujours, que la résistance du travail ne varie qu'entre *certaines limites fixes*, plus ou moins rapprochées, ou qu'elle croit et décroit alternativement sans devenir jamais plus petite qu'une certaine quantité, ni plus grande qu'une autre quantité; d'où il résulte que le travail se fait alors par *périodes* plus ou moins régulières, et qu'il se trouve représenté par une courbe sinueuse

* Voyez, à la fin de ces PRÉLIMINAIRES, une application de ces principes et une méthode expéditive et suffisamment exacte, pour calculer directement l'aire comprise entre une courbe, deux de ses ordonnées quelconques et l'axe des abscisses.

$O'a'b'c'\ldots k'$ (pl. I, fig. 24) dont les ondulations s'écartent très-peu, de part et d'autre, d'une droite AC *parallèle* à l'axe OB des chemins. On conçoit que, dans ces circonstances qui se reproduisent fréquemment, il devient utile de substituer, au travail variable, un travail uniforme moyen donnant les mêmes résultats, et qui ne présente point autant de complication. C'est effectivement ce qu'on ne manque jamais de faire dans les applications de la Mécanique industrielle, quand les alternatives ou les périodes de travail sont fréquemment répétées.

74. *Divers exemples du travail mécanique.* Quand un moteur est employé à bander un ressort, il développe, à chaque instant, un effort égal et directement opposé à la résistance du ressort, et qui est d'autant plus grand que son point d'application a décrit plus de chemin dans sa direction propre ; cet effort peut même se mesurer directement (60), au moyen du peson ou du dynamomètre, pour chaque position du ressort, ou pour chaque position du point d'application de la force. On pourra donc aussi, d'après la méthode précédente, tracer la courbe qui donne la loi de ces efforts, et calculer approximativement la somme des travaux mécaniques effectués à chaque instant et qui composent le travail total.

Nous avons pris pour exemples (71) le travail produit par une force qui traîne un corps le long d'un plan de la part duquel il éprouve une résistance constante, et celui qui consiste à bander un ressort dont la résistance varie à chaque instant ; mais les mêmes raisonnements, les mêmes méthodes de calcul, s'appliquent à tous les travaux des arts, qui sont *purement mécaniques*, et qui supposent *une résistance à chaque instant reproduite et vaincue dans le sens même du chemin décrit par son point d'action.* — Un cheval tire-t-il après la barre d'un manége ? un homme élève-t-il de l'eau du fond d'un puits ? un ouvrier est-il employé à scier, à raboter du bois, à limer, à polir un métal, à arrondir un corps sur le tour, etc.? la quantité de travail mécanique que nécessite directement l'ouvrage fait, sera toujours mesurée par le produit, et de la résistance opposée par la barre, par le poids de l'eau ou par la matière soumise à l'action de l'outil, et du chemin décrit par le point d'application de cette résistance, si elle est constante (71), ou par la somme des produits semblables qui mesurent les travaux partiels, si la résistance est variable (72).

75. *Observations sur le travail des moteurs.* En cherchant ainsi à apprécier, en nombre, le travail mécanique, il faudra avoir soin de ne pas confondre celui que dépense effectivement le moteur avec celui qui résulte immédiatement de l'ouvrage fait; car on conçoit qu'une partie du premier travail peut être détruite par des résistances autres que celles qui proviennent de l'ouvrage : ce n'est qu'à cette dernière résistance que s'appliquent véritablement les considérations précédentes et la mesure du travail. Plus tard nous examinerons le mode particulier de l'action des différentes forces motrices, les circonstances qui modifient les résultats de cette action, et le déchet que peut éprouver le travail de la force selon ses diverses applications.

76. *Complication de certains travaux.* Pour montrer la complication réellement inhérente à certains travaux industriels, nous prendrons pour exemple le travail du limeur : il faut 1° qu'il appuie pour faire mordre ou enfoncer la lime; 2° qu'il exerce un effort pour faire glisser la lime le long du corps ; 3° qu'il promène cette lime avec une certaine vitesse, en avant et en arrière, et que, par conséquent, il vainque l'inertie de la matière de cette lime. La quantité de l'ouvrage fait est le résultat de ces diverses actions simultanées; mais on fait disparaître toute cette complication en séparant du travail tout ce qui n'y est pas indispensable, et en ne considérant que ce qui se passe à l'endroit même où la matière du métal est enlevée par la lime : là on n'aperçoit qu'une résistance qui suppose un effort égal et contraire, exercé dans la direction même du chemin que décrit le point d'action de la lime, et dont la quantité de travail pourra s'obtenir ainsi que nous l'avons dit. Le travail du moteur serait même réduit à ce grand degré de simplicité, s'il était employé à promener, d'un mouvement uniforme, la lime le long d'une grande barre de fer couchée horizontalement sur un plan de niveau, et que cette lime eût été chargée convenablement d'un certain poids, pour la faire mordre.

77. *Spécification du travail mécanique.* En général, quand il sera désormais question, dans ces PRÉLIMINAIRES, du *travail mécanique*, on devra entendre le travail qui résulte immédiatement de l'action simple d'une force sur une résistance qui lui est directement opposée et qu'elle détruit continuellement, en faisant parcourir un certain

chemin au point d'application de cette résistance et dans sa *direction propre*. Cette force, elle-même, devra être considérée (59 et 60) comme un agent simple, produisant un effort, une pression mesurable, à chaque instant, par un poids, et agissant dans une direction et sur un point déterminés, ainsi qu'on l'a supposé constamment dans ce qui précède. Il ne faudra pas confondre enfin l'expression de *travail* et de *force*, avec celles par lesquelles on désigne vaguement tous les effets, plus ou moins compliqués, des moteurs animés ou inanimés qui développent leur action sur des résistances : ainsi nous ne parlerons pas de la force d'un cheval, d'un homme, d'un outil ou d'une machine, sans indiquer, sans sous-entendre, tout au moins, son point d'application, son intensité et sa direction ; nous ne parlerons pas de leur travail mécanique, sans spécifier ou sous-entendre la résistance, égale et directement contraire, que la force détruit, à chaque instant, tout en faisant parcourir, dans la direction propre de cette résistance, un certain chemin à son point d'application.

78. *De l'élévation verticale des fardeaux.* Le travail le plus simple, celui qui donne immédiatement l'idée de sa mesure, est l'élévation des fardeaux suivant la verticale ou l'aplomb ; la quantité de l'ouvrage croît alors visiblement comme le poids et comme la hauteur parcourue dans la direction de la verticale que suit ce poids, c'est-à-dire qu'il est le produit de ce poids et de cette hauteur. Car, pour répéter encore une fois nos raisonnements, en élevant à la même hauteur verticale, un poids double, triple, etc. ; le travail est bien double, triple, etc., de celui qui consisterait à élever le poids simple à cette hauteur ; et, en élevant un même poids à une hauteur double, triple, etc., c'est bien comme si on l'avait élevé deux, trois fois à la hauteur simple, ou une première fois à cette hauteur, puis une seconde fois, une troisième fois à cette même hauteur ; peu importe d'ailleurs la manière dont pourrait s'y prendre un moteur pour produire ces effets partiels, il nous suffit que, considérés en eux-mêmes, on puisse les regarder comme parfaitement égaux ou identiques. Si donc on prend, pour unité de travail, l'unité de poids élevée à l'unité de hauteur, le travail total sera mesuré par le produit du nombre des unités de poids et de celui des unités de hauteur.

79. *Des autres moyens d'évaluer le travail.* L'utilité de la mesure

que nous avons prise pour le travail, résulte de sa simplicité même, et de la facilité qu'on a d'évaluer des efforts, des pressions, en poids, et des distances, des chemins, en unités de longueur. Du reste, on pourrait, dans bien des cas, prendre la quantité même de l'*ouvrage* effectué pour la mesure du travail mécanique des forces : par exemple, on pourrait se contenter de dire, de tel moteur, qu'il est capable de moudre 1, 2, 3 kilogrammes de blé ; c'est même ainsi qu'on en agit quelquefois, et qu'en agissent les meuniers et les propriétaires de moulins, pour spécifier la valeur mécanique de ces moulins ou des cours d'eau. Mais comme un même poids de blé présente des résistances différentes à la mouture, selon sa qualité, le genre de l'outil et de la machine, non-seulement les meuniers ne pourraient être compris de tout le monde, mais ils ne pourraient pas même s'entendre entre eux : il faut donc une mesure commune et qui ne soit pas susceptible de varier ou d'être interprétée diversement ; or telle est celle qui résulte de la considération de l'effort et du chemin décrit dans la direction de cet effort.

Restera ensuite à savoir combien chaque unité de travail, ainsi définie, sera capable, dans des circonstances déterminées, de moudre de kilogrammes de blé, de scier de mètres carrés de planches, etc. ; or c'est à quoi l'on parviendra par des observations et des expériences bien faites ; l'essentiel est surtout qu'il n'y ait rien d'arbitraire dans la manière d'évaluer le travail mécanique.

80. *Dénominations admises pour le travail.* On a donné différents noms au travail mécanique, tel que nous venons de le définir dans ce qui précède, travail qu'il ne faut pas, dans tous les cas, confondre avec l'*ouvrage*, puisque ce dernier n'en est véritablement que l'effet.

Smeaton, ingénieur anglais qui a beaucoup écrit sur les roues hydrauliques, a nommé le travail *puissance mécanique ;* Carnot le nomme *moment d'activité* (*voy.* ses *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement*) ; Monge et Hachette (*voy.* le *Traité des Machines* de ce dernier) l'ont appelé *effet dynamique ;* Coulomb, Navier et plusieurs autres enfin, l'ont appelé *quantité d'action*, et cette dernière expression est assez généralement en faveur. Il nous arrivera souvent d'en faire usage, mais il faudra se rappeler qu'elle signifie la même chose que *quantité de travail*, *travail mécanique* *.

* En adoptant cette expression, nous n'avons fait que suivre l'exemple de M. de

Quelquefois aussi on nomme le travail mécanique *quantité de mouvement;* mais, comme on emploie généralement, en Mécanique, cette expression pour désigner tout autre chose, nous ne nous en servirons jamais pour désigner le travail. Les mêmes réflexions doivent s'appliquer à la dénomination de *force vive,* mise en usage par certains auteurs; l'une et l'autre n'indiquent que les effets du travail mécanique d'une force qui a été employée à mettre un corps en mouvement ou à vaincre son inertie (66).

Nous ferons connaître bientôt le sens qu'on attache le plus ordinairement à ces mots; quand donc il sera question, dans un ouvrage, de quantité de mouvement ou de force vive, il conviendra de s'assurer s'il s'agit, ou non, du travail mécanique tel que nous l'avons défini.

Un des caractères distinctifs du travail mécanique, c'est qu'il est la chose qu'on paye dans l'exercice de la force, et que sa valeur, son prix en argent, croissent précisément comme sa quantité. Car, si l'on ne considère que le travail nécessité directement par la résistance à vaincre, par l'ouvrage à confectionner, il demeure, comme on l'a vu précédemment, exactement proportionnel à la quantité de ce dernier. Mais, redisons-le, ce qui le distingue surtout des autres grandeurs mécaniques, c'est qu'il suppose une résistance, exprimable en poids, à chaque instant vaincue et reproduite, dans le sens même d'un certain chemin parcouru.

81. *Choix de l'unité de travail.* Le travail mécanique, ainsi défini et entendu est donc, en lui-même, une chose absolue, qui ne suppose que l'idée d'un effort exercé et d'un chemin parcouru; mais son expression, en nombres, peut changer selon les circonstances et les conventions admises pour l'unité de chemin ou d'effort, et aussi selon que le travail est ou n'est pas continué uniformément pendant un certain temps. Car, d'une part, l'unité de chemin et l'unité d'effort étant tout à fait arbitraires, l'unité de travail qui en dérive, l'est aussi; et, de l'autre, si le travail est longtemps continué d'une manière à peu près uniforme, son expression, en nombres,

Coriolis, savant ingénieur des ponts et chaussées, qui a écrit sur les applications de la Mécanique, et qui s'en sert dans les répétitions qu'il donne aux élèves de l'École polytechnique. Elle offre l'avantage particulier de se définir en quelque sorte par elle-même, et d'être d'une grande simplicité.

peut devenir embarrassante par sa longueur; de sorte qu'on se voit alors obligé, pour la simplicité, de ne considérer qu'une certaine fraction du travail total, relative à la durée d'un certain temps, qu'on prend à son tour pour unité. C'est de cette manière que l'idée du temps est introduite dans la notion du travail mécanique, bien que, envisagé sous un rapport plus absolu, ce dernier en soit véritablement indépendant : c'est ainsi, par exemple, qu'on dit d'un cheval attelé à une voiture, à un manége, qu'il exerce *moyennement* (73) un effort de tant de kilogrammes en parcourant un chemin de tant de mètres par minute ou par seconde, et d'un outil, d'une machine, qu'ils développent moyennement une telle quantité de travail dans tel temps. Mais alors il convient de ne pas oublier la durée effective du travail total en ajoutant, par exemple, qu'il est de tant d'heures pour chaque jour, chaque relais, etc.

On conçoit, d'après cela, quelle est la difficulté de choisir une unité de travail qui puisse servir dans tous les cas possibles et avec un égal avantage : tantôt l'expression du travail, en cette unité, se trouvera composée d'un très-grand nombre de chiffres entiers; tantôt elle exigera, pour la précision, un très-grand nombre de chiffres décimaux; tantôt enfin elle devra être accompagnée de la désignation du temps auquel elle se rapporte, lorsque le travail, étant continué uniformément pendant un ou plusieurs jours, on n'en considérera, pour la simplicité des calculs, qu'une certaine partie relative à l'unité de temps.

82. *Unités de travail proposées ou adoptées.* Les mécaniciens sentant l'importance de fixer une unité de travail et de lui donner un nom, comme on l'a fait pour le *gramme*, le *litre*, etc., en ont proposé de diverses espèces; mais on n'est point, jusqu'à présent, tombé d'accord sur le choix de cette unité, et il est probable qu'on ne le sera pas plus pour cet objet que pour désigner l'unité de vitesse, qui dépend à la fois de l'unité de temps et de l'unité de longueur. — MM. Mongolfier, Hachette, Clément, etc., ont pris, pour cette unité, 1 mètre cube d'eau ou 1000 kilogrammes élevés à 1 mètre de hauteur, et ils ont nommé cette unité, *unité dynamique*, *dynamie*. M. Dupin, de son côté, a proposé (*voy.* ses *Leçons de Géométrie et de Mécanique*, tome III, *Dynamie*) 1000 mètres cubes d'eau ou 1000 *tonneaux* (31) élevés à 1 mètre de hauteur, et il a supposé que ce travail, qu'il nomme *dyname*, s'opérait dans les 24 heures. Mais

aucune de ces unités n'a été définitivement, ni spécialement adoptée dans l'industrie manufacturière.

Enfin, depuis que les machines à vapeur commencent à se répandre en France, les mécaniciens constructeurs emploient assez généralement, d'après l'exemple des Anglais de qui nous viennent ces machines, une unité de travail qu'ils nomment *force, pouvoir de cheval,* ou simplement *cheval-vapeur.* La force du cheval n'a pourtant rien de bien défini, elle varie suivant une infinité de circonstances, suivant l'âge et la qualité des individus; si seulement on s'entendait sur sa valeur *fictive,* et si le gouvernement la consacrait par une loi comme les autres unités de mesure, on pourrait, sans inconvénient, s'en servir comme de terme de comparaison pour tous les travaux mécaniques des machines et des moteurs, qui sont continués d'une manière uniforme et pendant un certain temps; mais il n'en est pas ainsi. Toutefois la valeur qui paraît le plus généralement accréditée, d'après Watt et Boulton, soit en Angleterre, soit en France, et que les Anglais nomment pour cette raison *unité routinière,* s'écarte fort peu du travail mécanique qui suppose un effort de 75 kilog. exercé le long du chemin de 1 mètre, censé parcouru uniformément dans chaque seconde. Telle est du moins l'idée qu'on peut prendre de sa valeur approximative dans l'industrie manufacturière; car, s'il est des constructeurs qui adoptent, pour l'effort constamment exercé, 80 kilog., il en est d'autres aussi qui ne le supposent que de 70 kilog. seulement; de sorte que l'effort de 75 kilog., équivalant aux $\frac{3}{4}$ du quintal métrique, est véritablement un terme moyen qui diffère rarement de plus du $\frac{1}{15}$ de la valeur admise, dans les divers cas, par les parties directement intéressées.

88. *Conventions générales.* Sans rejeter précisément aucune des dénominations et des évaluations précédentes de l'unité de travail, lesquelles peuvent avoir leur avantage particulier dans certaines circonstances, nous prendrons le plus communément pour unité d'effort le *kilogramme,* et pour unité de distance le *mètre;* de sorte que l'unité de travail mécanique ou d'action sera l'effort de 1^{kil} exercé le long du chemin de 1^{met}, quantité qu'avec M. Navier, nous représenterons ainsi $1^{k}\times^{m}$ ou $1^{k.m}$ ou enfin 1^{km}, et qui se lit ordinairement *un kilogramme élevé à un mètre de hauteur;* parce qu'on rapporte volontiers tous les travaux mécaniques à celui qui consiste dans l'élévation verticale des corps pesants, l'effet produit ou l'ou-

vrage fait étant alors (78) la mesure même du travail. — Supposons, par exemple, un effort moyen ou constant (73) de 225^{kil} soutenu le long du chemin de 7 mètres, le travail qui en résulte aura pour valeur $225^{k} \times 7^{m} = 1575^{km}$, c'est-à-dire 1575 kilog. élevés à la hauteur de 1 mètre. Cette phrase étant un peu longue à lire, et rappelant d'ailleurs l'idée d'un travail particulier, qu'il n'est pas indispensable d'exprimer, nous conviendrons de nommer simplement *kilogrammètre* chacune des unités 1^{km}; de sorte que le travail ci-dessus équivaudra à 1575 kilogrammètres.

Cette dernière convention et celle qui consiste à placer l'indice ^{km} à droite et un peu au-dessus du nombre qui exprime la grandeur du travail, peuvent s'étendre à toutes les hypothèses que, selon les cas, on se croirait obligé de faire sur la valeur de l'unité de travail ou des unités d'effort et de chemin. — S'agit-il d'unités de travail dont chacune équivaut à 100, à 1000 kilog. élevés à un mètre, c'est-à-dire à un *quintal métrique*, à un *tonneau* (31), élevés à 1^{met}, on pourra les écrire ainsi 1^{qm}, 1^{tm}, et les nommer *quintalmètre*, *tonneaumètre;* par quoi l'on devra toujours entendre qu'il est nécessairement question de quintaux métriques et non des anciens quintaux. — S'agit-il d'unités dont chacune équivaut à 1 livre, à 100 livres élevées à 1 pied, à 1 toise de hauteur, ou pourra les écrire 1^{lp}, 1^{lt}, 1^{qp}, 1^{qt}, et les nommer respectivement *livrepied*, *livretoise*, *quintalpied*, *quintaltoise;* bien entendu qu'alors tout se rapporte à l'ancienne division des unités de poids et de longueur, appliquée soit aux anciennes valeurs de ces unités, soit aux nouvelles valeurs appelées, dans le commerce, *légales* ou *métriques* (31).

84. *Observations particulières.* Il serait inutile de s'occuper des unités de travail, telles que celle qui consisterait dans l'élévation de 1^{kil} à 1000^{met} ou à 1 kilomètre, par exemple; car, d'après nos principes, cette unité est la même que celle qui équivaut à 1^{tm} ou au tonneaumètre, c'est-à-dire à 1000^{kil} élevés à 1^{met}. On n'éprouvera donc aucune difficulté à exprimer numériquement et à dénommer la valeur d'un travail quelconque, quelle qu'en soit la grandeur et quelles que soient les conventions qu'on adopte pour l'unité; en spécifiant ensuite, si cela est nécessaire (81) et conformément à ce qui a été dit ci-dessus, le temps pendant lequel ce travail s'opère, on aura une idée complète de sa valeur. C'est ainsi, par exemple, que le travail du cheval-vapeur, *en une seconde*, pourra

être indifféremment représenté par 75^{km} (75 *kilogrammètres*), ou par 450^{lp} (450 *livrepieds*), la livre et le pied étant ici la nouvelle livre et le nouveau pied, adoptés légalement en France et dont l'un vaut le tiers de mètre et l'autre le demi-kilogramme. Si d'ailleurs on voulait simplifier encore davantage l'expression du travail quand elle dépend, comme ci-dessus, de l'unité de temps, on pourrait écrire les nombres en cette manière : $4500^{km'}$, $27000^{lp'}$, ou $75^{km''}$, $450^{lp''}$, selon qu'il s'agirait de la *minute* ou de la *seconde*.

Il arrive assez ordinairement que, pour les travaux soutenus des moteurs, on ne considère ainsi que la longueur du chemin décrit pendant la seconde, prise pour unité de temps, afin d'avoir de petits nombres à considérer. Cette longueur étant aussi celle qu'on adopte le plus volontiers (48 et suiv.), pour exprimer la vitesse même du mouvement, on voit que le travail, pendant l'unité du temps, se trouve réellement mésuré par le produit d'un effort ou d'un poids et d'une vitesse. C'est, comme nous le verrons un peu plus loin, ce qui fait quelquefois confondre (80) le *travail mécanique* ou la *quantité d'action* avec la *quantité de mouvement*, quoique leurs significations et leurs mesures soient, dans le fond, très-différentes.

DES CONDITIONS DU TRAVAIL MÉCANIQUE.

85. *Première condition générale.* D'après nos définitions, le travail mécanique des forces suppose à la fois une résistance vaincue et un chemin décrit dans la direction de cette résistance ; d'où il résulte que, dès qu'il n'y a pas de résistance vaincue ou de chemin décrit, il n'y a pas non plus de travail mécanique. Mais il n'en faudait pas conclure, à l'inverse, qu'il y a nécessairement travail toutes les fois qu'une puissance exerce, d'une manière soutenue et pendant un temps plus ou moins long, un effort dans la direction du chemin parcouru par son point d'application ; car il faut encore que le mouvement actuel de ce point ne soit pas indépendant de l'action de la force motrice et de la résistance, ou que ces forces puissent être considérées comme la cause directe et nécessaire qui modifie ou qui entretient le mouvement. Sans cette condition, en effet, il n'y aurait point de travail produit, et tout se réduirait, de la part du moteur, à exercer un certain effort, pendant le temps même où il serait entraîné, avec

la résistance, dans le mouvement général et indépendant de sa propre action.

Nous savons bien, par exemple, que la terre tournant sans cesse sur elle-même, et entraînant avec elle les corps placés à sa surface, on n'y peut exercer un effort quelconque, sans qu'en même temps le point d'application de cet effort ne décrive continuellement un certain chemin dans l'espace absolu (46). Or, il est évident en soi que, si le point d'application du moteur et de la résistance reste en repos par rapport aux objets environnants qu'on regarde comme fixes, il n'y a pas eu véritablement de travail produit : c'est qu'en effet le mouvement de transport général de la terre est indépendant de l'action de ces forces, et n'en continue pas moins quand cette action cesse.— Un homme qui, placé dans une voiture ou sur un bateau, tirerait sur un point fixe, c'est-à-dire fermement attaché à cette voiture, à ce bateau, ne travaillerait pas davantage; et il en serait de même de deux hommes qui se tireraient, sur cette voiture, ce bateau, sans bouger de place, sans s'entraîner réciproquement; car le mouvement de la voiture et du bateau étant indépendant de leur propre action, ils ne dépenseraient, en eux-mêmes, rien pour l'entretenir.

Mais si, dans ces divers cas, l'obstacle ou le point d'application des forces égales et opposées, venait à céder à leur action, en décrivant un certain chemin dans le sens même de cette action, indépendamment de celui qui résulte du transport général, alors il y aurait un travail produit, mesurable, à chaque instant, par le résultat de la multiplication de l'effort exercé et du petit chemin relatif décrit par le point d'application de cet effort, c'est-à-dire du chemin décrit par rapport aux objets qu'on peut regarder comme immobiles sur la terre, sur la voiture ou sur le bateau.

86. *Seconde condition générale.* Ceci étant entendu une fois pour toutes, et le chemin que l'on considère dans la mesure, en nombres, du travail mécanique, étant le chemin relatif véritable en vertu duquel ce travail s'opère, on conclut naturellement, des procédés par lesquels on obtient (71 et 72) cette mesure, d'une part qu'elle sera nulle en elle-même, toutes les fois qu'il en sera ainsi de l'un quelconque des facteurs dont elle se compose; et, de l'autre, que ce serait fort mal estimer la valeur purement mécanique, le pouvoir de production d'une machine, d'un moteur

quelconque, que de se borner, comme on le fait quelquefois, à tenir compte simplement, ou de la grandeur de l'effort dont ils sont capables en certains points, ou de la vitesse que possèdent, de la longueur d'espace que parcourent, dans un temps donné, leurs diverses parties ; qu'en un mot, sous le point de vue qui nous occupe, la grandeur de l'*effort absolu*, ou du plus grand effort que les moteurs peuvent exercer sans faire mouvoir sensiblement leur point d'application ; n'est pas plus un signe de leur puissance de travail, que ne le sont et la *vitesse* et le *chemin absolus*, la plus grande vitesse et le plus grand chemin qu'ils peuvent prendre ou parcourir, sans exercer d'effort dans la direction propre de cette vitesse ou de ce chemin.

87. *Réflexions sur le travail des moteurs animés.* Ainsi, par cela seul qu'un homme, un cheval marcheraient plus ou moins longtemps et avec une vitesse plus ou moins grande, sur un chemin horizontal, nous ne dirons pas qu'ils travaillent ; nous n'en conclurons pas même que ce seraient de bons travailleurs, qu'ils produiraient beaucoup d'ouvrage, si on les appliquait à une machine, à une charrue ou à un outil quelconque. Pareillement encore, de ce qu'un homme, un cheval seraient capables de soutenir, en repos, contre l'action de la pesanteur, un poids plus ou moins considérable ; de ce que tirant, au moyen de traits, un obstacle qui reste fixe, ils seraient capables de bander ces traits avec un effort plus ou moins grand, on n'en saurait conclure qu'ils développent beaucoup de travail mécanique, qu'ils sont bons travailleurs, ni qu'ils seraient capables de produire d'une manière soutenue, une grande quantité d'ouvrage, si l'obstacle venait à cheminer tout en résistant à leurs efforts.—Ainsi l'*Hercule du Nord*, tant vanté pour sa force prodigieuse, n'eût probablement pas, dans un travail réellement utile et longtemps continué, pu soutenir le parallèle avec un de nos bons manouvriers ordinaires ; ainsi les coureurs, les coursiers qui franchissent si rapidement de longs espaces, seraient généralement peu capables, sous d'autres rapports, de rendre les services d'un homme moins agile, d'un coursier moins rapide, mais bons travailleurs.

Il est tellement vrai qu'exercer un effort ou soutenir un fardeau sans se mouvoir, ce n'est pas proprement travailler, qu'on peut toujours alors remplacer un moteur par un corps inerte, tel qu'un

support, une *colonne*, un *trait*, un *tirant*, etc.; et il ne l'est pas moins de dire que le mouvement, sans effort exercé, sans résistance vaincue, ne peut constituer un véritable travail, puisqu'en vertu de l'inertie de la matière (55), le mouvement une fois acquis se continue, de lui-même, indéfiniment et sans perte si, comme on le suppose, rien d'extérieur ne tend à le modifier, à le ralentir.

88. *Distinction du travail intérieur et du travail extérieur.* Malgré ces réflexions sur la nullité du travail mécanique produit par les moteurs dans les circonstances précitées, on remarquera que chacun de ces emplois de la force peut quelquefois avoir son genre particulier d'utilité dans les arts, surtout relativement aux moteurs animés, et qu'on peut même, sous certains rapports, les considérer comme une sorte de travail dès lors qu'ils produisent la fatigue, et qu'ils supposent des *résistances intérieures* sans cesse renouvelées et vaincues; mais il ne s'agit ici expressément que du travail *extérieur* et *effectif* des moteurs, travail qui est le *résultat* d'actions plus ou moins compliquées qui ne peuvent être aucunement l'objet de nos investigations (75 et suiv.). Or ce travail extérieur doit être considéré comme nul, sous le point de vue purement mécanique et dans les circonstances qui viennent d'être spécifiées; de la même manière que nous regarderions comme nul le travail d'une machine qui marcherait *à vide*, c'est-à-dire dont l'*outil* ne rencontrerait point de résistance, ne confectionnerait point d'ouvrage, ou celui d'une machine dont l'outil, soumis à une trop forte résistance, ne pourrait marcher malgré l'action des forces motrices qui y sont appliquées; et, en effet, le cas est tout à fait semblable, attendu qu'ici la puissance n'en a pas moins consommé, comme on va le voir, ou n'en consomme pas moins une certaine quantité de travail pour vaincre les résistances intérieures et inhérentes aux pièces de la machine.

89. *Tout mouvement, toute action des forces supposent un travail.* Si nous considérons les choses sous un point de vue plus rigoureux encore et plus absolu, nous arriverons à reconnaître qu'il n'y a point d'action sans effet plus ou moins sensible, et d'effet sans dépense de travail plus ou moins appréciable.

D'une part, les corps ne pouvant se mouvoir, sur notre globe, sans éprouver tout au moins une certaine résistance (3) de la part

de l'air, et ne pouvant sortir du repos sans que leur inertie ne se soit d'abord opposée (66) à l'action de la puissance, on voit qu'en résultat, le mouvement, de quelque nature qu'il puisse être à la surface de la terre, suppose toujours une certaine quantité de travail, soit actuellement, soit primitivement dépensée par un moteur.

D'une autre part, puisque tous les corps sont plus ou moins compressibles et extensibles, une force motrice ne peut jamais agir, même contre des obstacles fixes, sans produire et dépenser une certaine quantité de travail mécanique. Car le point où cette force est appliquée a plus ou moins cédé (63); le corps a plié, s'est aplati, ou s'est allongé; les ressorts moléculaires ont opposé de la résistance, il y a eu un petit chemin décrit par le point d'application de la force et dans sa direction propre. D'abord l'effort, ou la résistance égale et contraire (64), étaient nuls; ensuite ils ont augmenté progressivement jusqu'à ce qu'ayant atteint leur valeur *maximum*, leur plus grande valeur, et le corps sa plus grande déformation possible, l'action de la force motrice s'est réduite à maintenir le corps ou l'obstacle à son état de tension et au repos, sans produire désormais aucun travail mécanique.

90. *Quand et comment ce travail peut être censé nul.* Nous venons de prouver que tout mouvement acquis, toute action des forces sur les corps supposent ou nécessitent réellement une certaine dépense de travail. Mais, attendu que la résistance opposée par l'inertie d'un corps, dans son passage de l'état de repos à celui de mouvement, et la résistance que présente sans cesse l'air à ce mouvement, exercent, comme nous le verrons bientôt, une influence très-faible toutes les fois que la vitesse n'est pas fort grande, ou ne surpasse pas 5 à 6 mètres en une seconde par exemple, ce qui est bien le cas des moteurs ordinaires; et, attendu d'ailleurs que les corps qui reçoivent ou transmettent directement l'action des forces, sont généralement (65) assez résistants, assez roides pour ne pas fléchir d'une manière sensible sous cette action, on conçoit que, dans la plupart des cas, le travail effectif, ainsi développé par le moteur, sera une fraction très-petite de celui qu'il pourrait produire si le mouvement était moins prolongé ou moins rapide, ou si l'obstacle, tout en opposant une certaine résistance, cheminait de façon que l'espace décrit devint très-grand par rapport à celui qui résulte de la simple déformation de cet obstacle.

Or, c'est sous ce rapport seulement, et quelquefois aussi sous celui de la *non-utilité* des résultats, que, dans la pratique, il est permis, selon les cas, de ne point tenir compte du travail extérieurement développé par les moteurs, ou même de le considérer comme entièrement nul et inutile; car, sous le rapport purement mécanique, il va sans dire (85 et 86), qu'exercer un effort, sans le répéter le long d'un chemin, ou cheminer sans exercer d'effort, ce n'est point travailler.

91. *Action d'une force perpendiculaire au mouvement.* Des réflexions analogues sont applicables toutes les fois qu'une force, agissant en un certain point d'un corps en mouvement, ce point ne cède pas sensiblement à l'action de la force et dans sa direction propre, vu que le chemin qu'il est contraint de décrire, par suite de sa liaison avec d'autres corps, demeure, à chaque instant, perpendiculaire à la direction de la force. Celle-ci ne faisant donc que comprimer inutilement le corps, et ne produisant aucun travail effectif dans le sens du mouvement, sa quantité de travail ou d'action devra encore être censée nulle, tout comme pour le cas d'un moteur qui agit sur un obstacle fixe.— Un homme qui tirerait ou pousserait sur le côté d'une voiture en mouvement et perpendiculairement au chemin qu'elle décrit, n'aiderait en rien le travail des chevaux; son effet serait absolument nul quant à l'*objet utile* du travail. La même chose pourrait se dire à l'égard d'un homme qui tirerait ou pousserait contre la barre d'un manége, dans le sens de la longueur de cette barre et non dans celui de son mouvement circulaire, etc. Cependant le moteur n'en aurait pas moins, dans ces deux cas, réellement dépensé et développé une certaine quantité d'action, en comprimant ou distendant le corps auquel il est appliqué.

92. *Transport horizontal des fardeaux.* Enfin c'est encore là le cas d'un homme ou d'un animal quelconque qui chemine horizontalement en portant un fardeau; car l'action du poids est perpendiculaire à celle du chemin; elle ne tend qu'à comprimer les parties sur lesquelles ce poids repose; il n'y a pas sensiblement (89) de résistance vaincue, et par conséquent de travail produit dans le sens du mouvement horizontal du point où agit le fardeau, bien que le moteur se fatigue; bien qu'il développe intérieurement une certaine quan-

tité de travail; bien qu'enfin le transport horizontal d'un fardeau ait en lui-même un but d'utilité dans les arts, et qu'il puisse, sous un certain rapport, être considéré comme un travail d'une espèce particulière, tout à fait distincte, et qui, comme l'autre, a son unité de mesure, son prix en argent.

Le transport horizontal des fardeaux, par les moteurs animés est, au surplus, le seul ouvrage dont la mesure ne puisse se rapporter directement à celle que nous avons jusqu'ici adoptée; et cela seulement en tant qu'il ne suppose pas, en lui-même, une résistance vaincue dans le sens propre du mouvement, et que le corps est immédiatement supporté par le moteur; car lorsqu'un moteur est employé à traîner un corps horizontalement sur un traîneau, une voiture ou un bateau, il se développe, de la part du terrain, des essieux de la voiture ou du fluide, des résistances qui s'opposent directement à l'action de ce moteur, et qui nécessitent une dépense plus ou moins forte de travail mécanique effectif et mesurable comme il a été expliqué précédemment (71 et 72). Aussi faudra-t-il bien se garder, par la suite, de confondre ce dernier travail avec le premier, et de lui supposer la même unité de mesure ni la même valeur en argent.— L'expérience prouve, par exemple, qu'il est plus facile à un homme de transporter à dos et à 6 lieues de distance horizontale, un corps qui pèse 50 kilogrammes, que d'exercer, d'une manière soutenue et le long du même chemin, un effort de 10 kilogrammes seulement.

93. *Observations sur le transport horizontal.* On voit, d'après cela, quelle serait l'erreur que l'on commettrait si, voulant, par exemple, estimer le travail mécanique nécessaire pour transporter, sur un chemin horizontal, un fardeau par le moyen d'une voiture, on se contentait de multiplier le poids de ce fardeau et de cette voiture par le chemin décrit, ou si l'on confondait l'effet utile, l'ouvrage avec le travail mécanique même que développe le moteur, par l'intermédiaire des traits. On n'en a pas pas moins nommé, d'après notre célèbre ingénieur Coulomb, qui a fait beaucoup d'expériences sur le travail de l'homme considéré dans diverses circonstances, on n'en a pas moins nommé *quantité d'action* le travail qui consiste à transporter directement un corps sur un chemin horizontal. Et, non-seulement on a mesuré ce travail par le produit du poids supporté par le moteur et du chemin qu'il décrit ho-

rizontalement, à peu près de la même manière que nous avons mesuré le travail mécanique véritable par le produit de l'effort et du chemin décrit dans le sens de cet effort; mais encore on a quelquefois comparé entre eux ces deux genres de travaux, d'autant plus distincts, que l'un est absolument nul à l'égard de l'autre, ainsi que nous l'avons expliqué ci-dessus.

Mais ce qui prouve incontestablement que, sous le point de vue purement mécanique, et lorsqu'on n'a point égard au mode particulier d'agir des moteurs animés, lesquels peuvent se fatiguer sans absolument rien produire d'extérieur, ce qui prouve, disons-nous, que le transport horizontal des corps ne suppose pas en lui-même une dépense nécessaire de travail mécanique, c'est qu'on peut diminuer indéfiniment cette dépense par des appareils ou des dispositifs matériels convenables, tels que des voitures, des bateaux, des chemins de fer, etc. *, qui ont la propriété de diminuer l'effet des résistances de toute espèce; c'est qu'on peut même le concevoir indépendamment de ces résistances, tandis que tous les autres genres de travaux industriels, analogues à ceux qui ont été cités n^os 70 et suivants, exigent nécessairement une certaine dépense de travail mécanique; c'est qu'enfin le résultat de ce transport horizontal ne peut jamais être directement la source d'un nouveau travail, tandis que cela arrive très-souvent pour l'autre, comme on aura bientôt occasion de le voir.

94. *Réflexions générales.* En général, et il faut bien le redire encore (75 et 77), nous ne considérons le travail mécanique que par rapport à lui-même, c'est-à-dire d'une manière absolue et indépendamment du degré de fatigue qu'il suppose de la part des moteurs animés, ou des circonstances qui, dans les arts, font varier son emploi, son prix ou sa valeur en argent. Et, quoiqu'il puisse bien arriver, par exemple, que telle quantité de travail mécanique,

* En effet, on sait par expérience qu'un cheval marchant au pas, ne peut porter à dos qu'environ 80 kilogrammes de poids, sur un chemin horizontal et d'une manière soutenue, tandis que, sans se fatiguer davantage, il peut transporter jusqu'à 1000 kilogrammes sur une bonne route ordinaire et au moyen d'une voiture; qu'il en peut transporter 10 000 sur un chemin de fer, et jusqu'à 20 000 sur un canal horizontal. Enfin, en plaçant le fardeau sur des rouleaux convenablement disposés, il pourrait, comme nous le verrons plus tard, en transporter bien davantage encore. Il est évident qu'il n'y a aucun moyen pareil de diminuer le travail nécessaire pour élever verticalement les corps contre l'action de la pesanteur, ou pour changer la forme même de ces corps, etc.

employée par un moteur à élever verticalement un corps à une certaine hauteur, coûte plus ou moins de fatigue et d'argent, que la même quantité de travail employée à transporter horizontalement, sur une voiture, un autre corps à une certaine distance, nous n'en regarderons pas moins ces quantités comme rigoureusement égales; parce qu'en effet on peut, à l'aide de machines, d'appareils convenables, transformer immédiatement l'une de ces opérations en l'autre, et que c'est même là l'objet de la Mécanique industrielle, telle que nous l'envisageons plus spécialement dans cette première partie du Cours.

Cela ne nous empêchera pas, un peu plus tard, de revenir sur tout ce que nous aurons fait, et d'établir, d'après les données de l'expérience, la comparaison exacte entre les divers genres de travaux des machines et des moteurs animés ou inanimés. Que si d'ailleurs nous sommes entrés aussi avant dans les discussions précédentes, c'est afin de bien préciser le point de vue sous lequel nous prétendons envisager le travail mécanique des forces, et d'éviter qu'on ne le confonde avec les autres résultats de l'exercice de ces forces.

DE LA CONSOMMATION ET DE LA REPRODUCTION DU TRAVAIL.

95. *Consommation inutile du travail.* Ces réflexions, ces discussions, au surplus, ne sont pas en elles-mêmes sans importance; car elles nous avertissent, d'une part, que si les moteurs animés peuvent se fatiguer sans produire de travail effectif, d'une autre, ces moteurs et les forces motrices en général, peuvent aussi travailler, et développer une certaine quantité d'action, sans produire d'effet appréciable, ou d'effet véritablement utile et qui contribue à augmenter celui qu'en définitive, il est question de produire : c'est ce qui a lieu (91), par exemple, quand le moteur agit perpendiculairement au chemin décrit par son point d'application. Mais, comme la plupart des travaux industriels ne s'effectuent que par l'intermédiaire des diverses pièces, des divers agents matériels qui constituent les outils, les machines, et que ces pièces ne peuvent opérer sur la résistance ou transmettre le mouvement et la force, sans être comprimées ou distendues, on aperçoit de suite que, même lorsque le point d'application de la force motrice est mis en mouvement dans la direction propre de cette force, il doit d'abord se

dépenser une certaine quantité de travail, pour amener les pièces au degré de tension relatif à la plus grande intensité de l'action, ou à l'état régulier du travail et du mouvement. Or il pourra arriver que ce premier travail de la puissance soit totalement perdu si, l'action de celle-ci venant à diminuer ou à cesser, les corps conservent la forme qu'ils ont acquise par suite du travail; c'est-à-dire, s'ils ne sont pas élastiques (19), ou, plus généralement encore, si les ressorts moléculaires (63) en se débandant, ne contribuent pas à accroître le travail, à l'instant où l'action de la puissance cesse, comme ils ont contribué à l'amoindrir, lorsqu'ils ont été primitivement bandés par l'effet de cette action.

On conçoit même que, si l'action du moteur, ou celle de la résistance produite par le travail, varie d'une manière irrégulière, c'est-à-dire si elle a de fréquentes *intermittences* ou interruptions, de telle sorte que tantôt elle devienne plus faible, tantôt plus forte; que tantôt elle s'exerce dans un sens, tantôt dans un sens contraire; qu'en un mot, si les corps sont souvent comprimés, puis distendus, la perte de travail pourra, à la longue et surtout quand les efforts exercés seront considérables, devenir très-comparable au travail total de la puissance; ce qui n'aurait pas lieu, si l'action de cette dernière était constamment la même, ou si elle ne variait seulement qu'aux reprises et aux cessations complètes du travail.

96. *Moyens d'éviter la consommation inutile du travail.* Ces réflexions nous font déjà entrevoir tout l'avantage qu'il y a d'éviter, dans les machines, les *chocs* ou secousses qui développent des pressions considérables; de régulariser l'action des forces elles-mêmes et le mouvement des pièces qui la transmettent, quand il s'agit de leur faire opérer, d'une manière continue, un travail industriel quelconque; d'employer enfin, pour ces pièces, des corps en même temps roides et élastiques; c'est-à-dire très-peu susceptibles de changer de forme sous l'action des forces, et capables, quand cette action cesse, de reprendre leur forme primitive, sans avoir subi aucune altération moléculaire ou intime (20); car cette altération est la cause finale de la *déperdition* ou de la consommation inutile du travail.

Voilà précisément pourquoi on préfère généralement, dans la construction des machines, se servir de roues qui tournent uniformément autour d'axes fixes, pour recevoir et communiquer le

mouvement ou même pour servir d'outils; car, d'après la petite étendue des ateliers consacrés aux travaux de l'industrie, le mouvement uniforme et longtemps continué est impossible pour les pièces qui sont assujetties à décrire des lignes droites. Voilà pourquoi aussi on se sert, pour travailler les bois, les métaux, etc., de marteaux, de burins, de couteaux, de limes, de ciseaux, de scies en acier trempé, et dont les dimensions, les proportions sont tellement combinées, qu'ils fléchissent en réalité très-peu sous l'action des forces qui les mettent en jeu, et des résistances qu'ils doivent vaincre. Car, non-seulement des outils en fer doux, en cuivre, en plomb, travailleraient fort mal, non-seulement ils exigeraient de fréquentes réparations, mais encore ils consommeraient ou absorberaient, en pure perte, une grande quantité de travail mécanique, sans produire beaucoup d'ouvrage. Or ces réflexions sont d'autant plus importantes, qu'elles s'appliquent à tous les outils employés dans les arts, si ce n'est à ceux pour lesquels un certain degré de flexibilité est une qualité essentielle, tels que les *spatules*, les *pinces*, les *ressorts*, etc.; encore faut-il que la matière de ces outils soit suffisamment résistante ou *dure*, en elle-même, pour ne pas s'user aisément, et qu'elle soit assez élastique pour ne pas perdre promptement sa forme.

97. *De la reproduction du travail par les ressorts.* Pour démontrer clairement comment le ressort des corps peut développer ou restituer, lors du débandement, une certaine quantité de travail mécanique qu'il a primitivement absorbée, il ne s'agit que de voir ce qui se passe à l'instant où un corps revient progressivement à sa forme primitive après avoir été comprimé, et se rappeler ce que nous avons dit précédemment (72 et suiv.) sur la manière de mesurer la quantité de travail d'une force qui varie à chaque instant.

Supposons qu'un moteur soit employé à bander un ressort quelconque (pl. I, fig. 25), en développant, sur un même point A de ce ressort, et dans la direction propre du chemin que tend à décrire ce point, des efforts F qui sont de plus en plus grands (15 et 69) à mesure que la compression ou la distension augmentent; formons, comme nous l'avons expliqué (72), une courbe $Oa'b'c'$.... (pl. I, fig. 26), dont les abscisses représentent les chemins successivement décrits, par le point d'action A (fig. 25) de la force F, dans la direction propre de cette force, et dont les ordonnées représentent

les valeurs, en kilogrammes, des efforts correspondants exercés sur le ressort, efforts que détruit la réaction égale et directement contraire de ce ressort ; la quantité de travail développée ou absorbée, pour un petit chemin quelconque *cd* (fig. 26), sera mesurée (72) par le trapèze *cc'd'd* formé sur ce chemin et les ordonnées correspondantes *cc'*, *dd'*, et le travail total le sera par l'aire entière *Oa'h'hO* comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et la dernière ordonnée *hh'*, représentant le plus grand effort.

Supposons maintenant que le ressort (fig. 25), arrivé à cette position, soit employé à vaincre une résistance qui cède à son action dans la direction même du chemin primitivement décrit par le point d'application A de la force F ; ce ressort va développer, contre la résistance, une quantité de travail qu'on pourra calculer en appréciant, en poids, les diverses pressions qui correspondent à chaque position du ressort, depuis l'instant où la compression est la plus forte, jusqu'à celui où elle est nulle, et où le ressort est parvenu à la position qu'il peut conserver par lui-même. Si le corps reprend, à ce dernier instant, exactement la forme qu'il avait avant d'être bandé ; si d'ailleurs les pressions qui répondent aux mêmes degrés de tension, aux mêmes positions, sont les mêmes ; si en un mot, le corps possède, dans son retour vers sa forme primitive, la même énergie qu'auparavant, ce qui suppose nécessairement qu'il soit parfaitement élastique, et que sa constitution intime n'ait pas été altérée ; dans ces circonstances, disons-nous, la quantité de travail produite par le débandement du ressort contre la résistance, sera nécessairement égale à celle qu'il a fallu dépenser primitivement pour le bander, puisque la courbe, qui donne la loi des pressions et des espaces décrits, sera la même de part et d'autre. Si, au contraire, le corps n'est pas parfaitement élastique, non-seulement il ne reviendra pas à sa première forme, mais aussi les pressions seront moindres dans le débandement ; le travail restitué sera aussi moindre que celui qui a été d'abord dépensé, et une certaine portion de ce dernier sera, comme nous l'avons déjà avancé ci-dessus (95), totalement perdue pour l'effet : c'est évidemment celle qui est nécessaire pour produire les altérations moléculaires qui sont survenues dans le corps.

98. *Des ressorts considérés comme réservoirs d'action.* Nous avons vu (15 et 18) qu'il n'y a guère que l'air et les gaz qui soient à la

fois très-compressibles et parfaitement élastiques, lorsqu'on les enferme dans des espaces clos et qu'on les y refoule au moyen d'un piston mobile, etc. De tels ressorts peuvent donc servir à *emmagasiner* le travail mécanique, à faire fonction de *réservoir*, en les bandant jusqu'à un certain point, et les maintenant à ce point par des moyens faciles à imaginer; car, lorsqu'ensuite on viendra à les abandonner à eux-mêmes contre des résistances à vaincre et qui céderont à leur action, ils restitueront, en se débandant, exactement la quantité du travail qu'ils auront d'abord consommée. — Tel est, entre autres, l'usage bien connu du fusil à vent, qui n'est véritablement qu'un réservoir d'air comprimé, dans lequel on a accumulé une certaine quantité de travail pour s'en servir à lancer des balles au besoin. — Les *catapultes*, les *balistes*, les *arcs*, machines employées par les anciens, lançaient pareillement des pierres, des flèches, etc., par le débandement de ressorts ordinairement formés avec des cordes ou des pièces de bois flexibles.

Mais les ressorts ne servent pas seulement à lancer des *projectiles*, on peut aussi leur faire mouvoir des machines quelconques, et produire des travaux industriels. — C'est par de semblables moyens, par exemple, que les montres et les pendules reçoivent le mouvement pendant des jours, des mois entiers, par le débandement d'un ressort d'acier roulé en spirale, et que l'on a quelquefois tenté, quoique infructueusement, de mettre en mouvement des voitures, etc. En un mot, l'élasticité permet d'enfermer, dans les corps inertes, une force capable de les faire travailler à la manière des moteurs animés, tels que l'homme et le cheval.

99. *De la production du travail par la chaleur.* Le calorique qui dilate les corps (21 et 24) en s'insinuant entre leurs diverses molécules, rend, par là même, ces corps capables de développer du travail mécanique; car il met en jeu leur force de répulsion (27), il bande les ressorts moléculaires; et, quand des obstacles, des résistances quelconques s'opposent à leur libre extension, ces résistances sont vaincues en même temps qu'un certain chemin est décrit par leur point d'application. A l'inverse, quand on vient à refroidir un corps chaud par un moyen quelconque, quand on en fait sortir une certaine quantité de calorique, les ressorts moléculaires, abandonnés à leur libre action, tendent à retourner vers leur position primitive, et font effort contre les résistances qui s'y opposent, absolument de

la même manière que si le corps avait été réellement distendu par des forces extérieures quelconques. On peut même admettre, comme fait de l'expérience, que, dans les changements de volume des corps chauffés ou refroidis, la quantité de travail développée par les ressorts moléculaires, est précisément la même que celle que dépenseraient des forces, appliquées extérieurement au corps, pour produire des effets égaux si la température (22) restait la même.

Nous avons déjà donné (25) quelques exemples des effets de la chaleur et de l'usage qu'on en peut faire, dans les arts, pour consolider les édifices ou rapprocher les diverses parties des corps; en voici d'autres d'une espèce toute différente. — Quand on enferme hermétiquement de l'eau dans un canon de fusil ou dans une chaudière, et qu'on la chauffe à un certain degré, elle tend à se transformer en vapeur (3); elle fait de toutes parts effort contre les parois de l'enveloppe, et finit, lorsqu'on augmente suffisamment la chaleur, par faire éclater cette enveloppe, et par en lancer violemment les débris dans tous les sens. La chaleur, employée à produire l'inflammation de la poudre à canon, produit des effets non moins terribles et bien connus d'ailleurs. Dans l'un et dans l'autre cas, la *force d'explosion* est produite par le développement rapide des gaz ou vapeurs qui tendent (15 et 21) à s'échapper en tout sens, par suite de l'élévation de la température. De là, au surplus, les accidents graves survenus aux chaudières de certaines machines à vapeur et aux marmites dites *autoclaves*.

100. *Usage du calorique comme moteur.* Nous avons vu (26) combien est faible, en général, la dilatation des corps solides; celle des liquides ne l'est guère moins, tant qu'on ne les chauffe pas de manière à les convertir entièrement en vapeur; il en résulte donc que les solides, et les liquides proprement dits, ne font décrire au point d'application des résistances à vaincre, qu'un espace en général fort petit; et qu'ils ne peuvent développer un travail notable qu'autant que ces résistances sont très-grandes. Voilà précisément pourquoi on les emploie rarement quand il s'agit d'effectuer, dans les arts et par l'application de la chaleur, des travaux soutenus qui exigent qu'un certain chemin, plus ou moins grand, soit décrit dans chaque unité de temps. Les gaz et les vapeurs n'ont pas cet inconvénient (21 et 26), aussi peuvent-ils être avantageusement employés comme moteurs dans ces sortes de travaux : la vapeur d'eau surtout,

qu'on se procure à si peu de frais, sert spécialement à cet usage dans l'industrie manufacturière.

101. *Condition générale de l'emploi des moteurs.* Des réflexions analogues sont applicables à tous les agents qui peuvent servir de moteurs, et montrent la limite de l'utilité de leur emploi dans les arts; ils expliquent, par exemple, pourquoi on fait aujourd'hui si rarement usage de la force des ressorts ou de celle des bois et des cordages mouillés (11), pour servir de moteurs dans des travaux soutenus, indépendamment de leur cherté propre, et de l'inconvénient qu'ils ont de mettre en jeu de grands efforts qui consomment, en pure perte (95), une certaine portion de la quantité de travail qui leur est appliquée.

102. *De la reproduction du travail par la pesanteur.* La pesanteur offre, comme l'élasticité des corps, un moyen d'emmagasiner le travail mécanique des forces, et de la rendre disponible au besoin.

Quand un moteur a élevé un corps à une certaine hauteur, en dépensant une certaine quantité de travail, mesurée (78) par le produit du poids de ce corps et de la hauteur à laquelle il a été élevé; ce corps, employé ensuite à vaincre des résistances, soit directement, soit par le moyen de machines, pourra restituer, dans sa descente, précisément la même quantité de travail que celle qui a été dépensée primitivement. C'est ainsi que le mouvement est communiqué aux grandes horloges, aux tournebroches, etc., et que l'eau, en s'échappant des réservoirs où elle est contenue et a été accumulée par la nature ou par l'art, fait mouvoir, par son poids, les roues de nos moulins, de nos usines diverses.

Nous disons que la quantité de travail restituée dans la descente verticale d'un poids, d'une certaine hauteur, est précisément égale à celle qui a été primitivement dépensée pour l'élever à cette hauteur; car l'intensité d'action de la pesanteur est sensiblement la même (61), soit qu'un corps monte, soit qu'il descende; et par conséquent la pression exercée par le poids de ce corps contre une résistance à vaincre, ne varie pas dans les deux cas; de sorte que, pour un même chemin vertical décrit, le travail ne varie pas non plus. Mais, quand bien même on admettrait que l'intensité de la pesanteur n'est pas constante pour toutes les hauteurs du corps, on n'en conclurait pas moins que le travail développé dans la descente,

est égal au travail consommé dans la montée, attendu que le poids est, pour chaque position distincte d'un corps, une grandeur absolue (61) et qui ne varie pas avec le temps. En effet, les raisonnements seraient ici semblables à ceux que nous avons employés (97) pour le cas des ressorts parfaitement élastiques, et ils s'appliqueraient également à tous les cas où des forces motrices, agissant sur des corps, redeviendraient constamment les mêmes, pour les mêmes positions relatives de ces corps.

103. *De la consommation du travail sans restitution.* Cette circonstance de la reproduction complète du travail n'arrive pas toujours; nous en avons déjà eu des exemples (95 et suiv.) à l'occasion de la compression des corps en général ou des ressorts imparfaits; on peut même prévoir qu'elle n'arrive jamais rigoureusement dans les travaux industriels, attendu les résistances nuisibles ou inutiles qui accompagnent nécessairement le mouvement des corps ou l'exercice des forces appliquées à ces corps : ainsi la résistance de l'air et des fluides en général, celle du frottement, de l'adhérence des corps qui glissent, qui roulent les uns sur les autres, sont autant de causes qui détruisent, sans retour, une portion plus ou moins grande du travail développé par les moteurs.

En général, on peut remarquer que, toutes les fois qu'une certaine quantité de travail mécanique aura été dépensée pour détruire directement la force d'agrégation ou d'affinité des molécules des corps (28), cette quantité sera totalement anéantie ; en ce sens qu'elle ne pourra nullement être restituée par les corps après qu'ils auront subi le changement d'état. C'est ainsi que le travail employé pour limer, pour polir, pour rompre ou diviser les corps solides d'une manière quelconque, est consommé sans retour; parce qu'on a séparé, les unes des autres, certaines molécules, qu'on a détruit leur force de ressort, et que les molécules des corps solides, une fois ainsi séparées, ne possèdent plus l'énergie qui leur est nécessaire pour se rejoindre, même quand on remet les parties en contact immédiat.

104. *De la consommation nécessaire ou utile du travail.* Il faut distinguer soigneusement la consommation de travail, nécessitée par des résistances telles que celles qui viennent de nous occuper en dernier lieu, de la consommation de travail occasionnée par des ré-

sistances étrangères à l'effet qu'on veut réellement produire; car cette première consommation est essentiellement utile et la dernière ne l'est pas; celle-ci diminue l'effet, la quantité d'ouvrage, et l'autre le constitue essentiellement. Enfin on peut, jusqu'à un certain point, éviter les résistances nuisibles, on peut même les amoindrir beaucoup, par des dispositions bien entendues et que nous ferons connaître plus tard; mais on ne peut diminuer, en aucune manière, la consommation de travail, nécessitée rigoureusement par les résistances inhérentes à l'*effet utile* lui-même.

Il suit de là, par conséquent, que tout ouvrage réclame une dépense absolue de travail. Or nous verrons, par la suite, que la seule chose qu'il soit possible d'obtenir par les machines, les outils, les ressorts, etc., c'est que la force motrice n'en dépense pas beaucoup plus, ou que celle qu'elle produit soit presque entièrement employée d'une manière utile.

105. *Toute production de travail suppose une consommation.* Ce que nous disons des machines industrielles peut s'étendre aux agents de toute espèce que présente la nature, lesquels, considérés en eux-mêmes, nous paraissent quelquefois doués d'une énergie d'action qui leur est propre et qui ne suppose point une consommation primitive de travail; mais c'est une erreur qui vient de ce que nous ne réfléchissons pas toujours attentivement aux causes plus ou moins immédiates de cette action. — Cette eau (102) que nous voyons tomber, du haut du réservoir où elle est retenue, sur la roue d'un moulin qu'elle fait marcher, par son poids, en produisant du travail mécanique, a été d'abord amenée là par l'action de la gravité qui l'a fait descendre de la partie supérieure des vallées, où elle jaillit de sources naturelles; ces sources elles-mêmes, sont entretenues par les pluies qui tombent sur le sommet des montagnes et s'infiltrent lentement à travers le sol. Or les pluies proviennent des nuages ou brouillards supérieurs, et les nuages sont produits par l'action de la chaleur du soleil, qui a vaporisé l'eau et l'humidité contenues sur la surface de la terre, et les a contraintes de s'élever malgré la force de la pesanteur; de sorte que la quantité de travail que nous recueillons dans nos moulins, nos usines *hydrauliques*, est, en réalité, une bien faible portion de celle qui a été primitivement dépensée par la force motrice de la chaleur solaire.

Il résulte, par exemple, des observations très-précises faites, de-

puis plusieurs années, à l'École d'application de l'artillerie et du génie, par M. le garde du génie Schuster, qu'à Metz et aux environs, il tombe annuellement, sur toute la surface du sol, une quantité d'eau de pluie capable de couvrir cette surface sur une hauteur de 50 à 60^{cent}; ce qui produit, sur la superficie seulement d'une lieue carrée de poste ayant 4000^{met} de longueur, l'énorme volume de $4000^m \times 4000^m \times 0^m,5 = 8\,000\,000$ mètres cubes, au moins; lesquels pesant 8 000 000 de tonneaux (34), et étant tombés de la hauteur des nuages qu'on peut fixer moyennement à 1200^m, ont ainsi exigé, de la part de la chaleur, un développement de travail mécanique (83) équivalent à $8\,000\,000^t \times 1200^m = 9\,600\,000\,000^{km}$, représentant un travail continuel et uniforme (45 et 81) de $\frac{9\,600\,000\,000\,000}{31\,556\,910} = 304\,212^{km}$ par seconde, ou (82) de 4 506 chevaux-vapeur environ.

Les animaux, la chaleur même, sources primitives du travail mécanique, exigent, quand on les considère dans leur application immédiate aux travaux de l'industrie manufacturière, une certaine dépense en nourriture, en combustible, etc., qui, à son tour, est la représentation d'un certain travail mécanique; de sorte qu'il est réellement impossible de créer, de toutes pièces, de la force motrice, ou plutôt du travail, sans qu'il y en ait eu de consommé primitivement. — Ainsi la houille ou charbon de terre qui alimente les chaudières des machines à vapeur, a été extrait du fond des mines qui la recèlent, et amenée sur les lieux de sa consommation, au moyen de voitures ou de bateaux trainés par des chevaux; elle a exigé en outre des chargements et des déchargements successifs; et, si l'on calculait tout ce qu'elle a coûté de travail mécanique, avant de recevoir sa destination utile et définitive, on trouverait que, dans certains cas, ce travail égale presque celui qu'elle produit effectivement en convertissant l'eau en vapeur pour la faire agir sur les machines, et, par l'intermédiaire des machines, sur les outils, sur la matière à confectionner. Ce n'est pourtant point un motif de croire qu'il fût avantageux, même dans de telles circonstances, de renoncer à cette manière de reproduire le travail, puisqu'on obtient ce travail coercé dans un petit espace, et sous une forme infiniment commode, infiniment avantageuse pour les besoins de l'industrie manufacturière.

106. *De la consommation et de la reproduction du travail par*

l'inertie. Jusqu'ici nous avons examiné le travail de la force lorsqu'elle est employée à vaincre la pesanteur et les résistances inhérentes à l'état d'agrégation des corps, ou à leur force d'affinité, à leur force de ressort, etc.; il nous reste à apprécier la résistance que tous les corps opposent au mouvement par suite de leur inertie, et la manière dont cette inertie, considérée (66) comme une force véritable, sert tantôt à consommer, tantôt à produire le travail mécanique, de la même manière que la pesanteur et les ressorts. Et, en effet, nous n'en avons nullement tenu compte dans ce qui précède, bien que réellement on ne puisse, en aucune manière, la séparer des autres genres de forces, quand il s'agit de travailler.

Nous avons déjà remarqué (68 et 76), par exemple, que le limeur est obligé de vaincre l'inertie de la matière propre de sa lime, le cheval attelé à une voiture, l'inertie de la matière de cette voiture et du fardeau qu'elle supporte; nous avons même fait voir (66) que cette inertie se comporte véritablement comme les autres forces motrices, quand la vitesse du mouvement vient à changer. Il est donc fort important d'apprécier, à sa juste valeur, la quantité de travail qu'un corps donné absorbe ou restitue pour acquérir ou pour perdre un certain degré de vitesse, indépendamment de ce qu'il arrive souvent que le mouvement est le but utile même du travail, comme lorsqu'il s'agit de lancer des projectiles, des boulets par le ressort des gaz ou des corps solides, genre de travail qui constitue l'art de la *balistique* mis en usage par tous les peuples pour combattre; indépendamment enfin de ce qu'il arrive aussi très-souvent qu'au lieu d'appliquer directement une puissance à la production d'un travail, on la fait agir d'abord sur un corps libre, et qu'on se sert du mouvement acquis par ce corps, pour effectuer le travail par le moyen du choc ou de toute autre manière, comme cela a lieu, par exemple, dans les machines à pilons, à marteaux, à volants, etc., où l'inertie de la matière est employée à restituer une certaine quantité de travail primitivement dépensée par un moteur pour la mettre en action. Mais il est indispensable d'exposer d'abord les lois suivant lesquelles le mouvement peut être communiqué ou détruit par l'action des forces motrices constantes et variables.

DE LA COMMUNICATION DU MOUVEMENT PAR LES FORCES MOTRICES CONSTANTES.

107. *Notions générales*. Le cas le plus facile et le plus simple de

la communication du mouvement, est celui d'un corps qui est poussé à chaque instant par une force motrice constante, égale et directement contraire (66) à la résistance opposée, par l'inertie, dans la direction propre du mouvement. Or il est clair que, la pression étant la même, à chaque instant, *l'accroissement* ou le *décroissement très-petit* de la vitesse (53) sera aussi le même, ou constant pour le même corps. Ainsi, dans le cas dont il s'agit, la vitesse, à partir d'un certain instant, sera augmentée ou diminuée de *quantités proportionnelles au temps écoulé depuis cet instant :* c'est ce qu'on appelle le *mouvement uniformément varié* en général ; mouvement qui est *uniformément accéléré ou retardé*, selon que la force motrice constante agit pour *augmenter* ou pour *diminuer* la vitesse du corps.

Si l'action de la force motrice constante a commencé avec le mouvement même du corps, c'est-à-dire à partir de l'instant où il était au *repos*, la *vitesse totale acquise*, au bout d'un temps quelconque mesuré depuis cet instant, sera *proportionnelle à ce temps ;* ou si l'on veut, elle sera double pour un temps double, triple pour un temps triple, etc. Si, au contraire, l'action de la force motrice ne commence qu'à partir d'un certain instant, ou que le corps ait déjà une *vitesse acquise* à cet instant; cette vitesse, qu'on nomme ordinairement la *vitesse initiale* du corps, aura, au bout d'un temps quelconque, augmenté ou diminué d'une quantité qui sera encore proportionnelle à ce temps, et qu'on pourra calculer quand on connaîtra la vitesse que la force motrice imprime ou détruit constamment, dans un certain temps, par exemple dans l'unité de temps, la seconde, etc. En effet, il ne s'agira que de multiplier le temps total écoulé, par la vitesse qui répond à cette unité de temps ; ajoutant ensuite la vitesse ainsi calculée à la vitesse initiale, ou l'en retranchant selon les cas, on aura la vitesse même du mouvement au bout du temps que l'on considère.

Mais, pour bien saisir l'objet de ces calculs, il est nécessaire de se rappeler que, dans le mouvement varié, la vitesse acquise à un certain instant, est mesurée (53) par le chemin que décrirait le corps, dans l'unité de temps et à compter de cet instant, si, la force motrice cessant tout à coup son action, le corps continuait à se mouvoir uniformément; ce qu'il ferait véritablement en vertu de son inertie (55) et du degré de vitesse qu'il possède déjà.

108. *Du mouvement uniformément accéléré.* Occupons-nous d'a-

bord du cas où le corps part du repos sous l'action de la force motrice constante, et proposons-nous de découvrir toutes les circonstances du mouvement de ce corps.

Nous pouvons encore représenter ici, par le dessin, la loi qui lie, aux temps, les vitesses acquises par le corps au bout de ces temps, en traçant (pl. I, fig. 27) une ligne $Oa'b'....h'$ dont les abscisses Oa, Ob,.... Oh, représentent les temps écoulés depuis l'origine du mouvement, et dont les ordonnées aa', bb', cc'.... hh', représentent les vitesses acquises à la fin de ces temps respectifs.

Cela posé, puisque, dans le cas du mouvement uniformément accéléré, les vitesses aa', bb', cc'.... hh', sont proportionnelles aux temps écoulés Oa, Ob, Oc.... Oh, il est clair que la ligne $Oa'b'c'....h'$ est une ligne droite qui passe par l'origine O des abscisses ; car le mobile est ici censé partir du repos à l'instant où la force motrice commence son action, de sorte que le temps et la vitesse sont nuls à la fois à cet instant. Supposez qu'on ait partagé l'axe OB des abscisses ou des temps en un grand nombre de parties égales très-petites, puis qu'on ait élevé les ordonnées correspondantes, et qu'enfin on ait mené, par les extrémités de ces ordonnées, des parallèles à l'axe des abscisses, on formera une suite de petits triangles Oaa', $a'b'b''$, $b'c'c''$.... égaux et rectangles. Les côtés aa', $b'b''$, $c'c''$.... de ces triangles marqueront les accroissements successifs de la vitesse, accroissements qui seront égaux comme les petits instants qui leur correspondent, Oa, ab, bc,.... conformément à la définition du mouvement uniformément accéléré.

Les intervalles de temps successifs Oa, ab, bo.... étant donc supposés extrêmement petits, on peut regarder le corps comme se mouvant, d'une manière sensiblement uniforme, pendant l'un quelconque $cd = c'd''$ de ces intervalles, et avec une vitesse moyenne égale à la demi-somme de celles cc', dd' qui répondent au commencement et à la fin de chacun d'eux. Or, dans le mouvement uniforme (48), l'espace décrit dans un temps quelconque est mesuré par le produit de la vitesse et de ce temps ; donc l'espace décrit ici, pendant le temps élémentaire cd, sera égal à cd multiplié par la vitesse moyenne $\frac{1}{2}(cc' + dd')$, qui correspond à ce temps élémentaire. Ce produit n'étant autre chose que la mesure de l'aire du petit trapèze $cc'd'd$, cette aire pourra ainsi représenter l'espace parcouru pendant le temps élémentaire cd : pour un autre intervalle quelconque de égal au premier, l'espace décrit sera encore représenté par le trapèze $dd'e'e$; donc l'espace total décrit, pendant le temps

O*h*, par exemple, a sensiblement pour mesure la somme ou surface totale des trapèzes élémentaires *aa'b'b*, *bb'c'c*.... *gg'h'h*, augmentée du petit triangle O*aa'* qui mesure évidemment l'espace décrit dans le premier instant O*a*; c'est-à-dire la surface même du triangle correspondant O*hh'*. Donc enfin cette dernière surface est la mesure exacte et rigoureuse de l'espace décrit pendant le temps total O*h*, puisqu'on peut supposer que ce temps a été divisé en un nombre indéfini de parties égales et infiniment petites; le raisonnement étant ici le même que celui qui a été mis en usage (72) pour trouver la mesure du travail quand l'effort est variable.

109. *Lois du mouvement uniformément accéléré.* Le chemin décrit au bout d'un temps quelconque, étant, pour le mouvement uniformément accéléré, représenté par la surface du triangle qui a pour base ce temps et pour hauteur la vitesse acquise au bout de ce même temps; on en peut déduire, de suite, plusieurs conséquences importantes, et qui permettent de calculer les circonstances de ce genre de mouvement.

D'abord, puisque la surface de tout triangle O*hh'* a pour mesure la moitié du rectangle de même base et de même hauteur, et que ce dernier est aussi la mesure (48) du chemin qui serait décrit uniformément pendant un temps égal à O*h* et avec la vitesse *hh'* acquise au bout de ce temps, on voit que,

1° *Dans le mouvement uniformément accéléré, le chemin décrit, au bout d'un temps quelconque et à partir de l'origine du mouvement, est la moitié de celui que le mobile décrirait, dans un temps égal, s'il se mouvait uniformément avec la vitesse qu'il a acquise à la fin du premier temps.*

Ensuite, puisque les chemins décrits, au bout de deux temps quelconques O*b*, O*e*, sont représentés par les triangles O*bb'*, O*ee'*; puisque ces triangles sont semblables, et que, d'après les principes démontrés en géométrie, leurs surfaces sont comme les carrés des côtés homologues, il en résulte encore que,

2° *Dans le mouvement uniformément accéléré, les chemins décrits au bout de deux temps quelconques et à compter de l'origine du mouvement, sont entre eux comme les carrés de ces temps.*

3° *Ces mêmes chemins sont aussi entre eux comme les carrés des vitesses acquises au bout des temps correspondants.*

110. *Formules relatives au mouvement uniformément accéléré.*

Lorsque, dans le mouvement que nous considérons, on se donne la vitesse *es'* acquise au bout d'un temps quelconque *Oe*, par exemple au bout d'une seconde prise pour unité de temps, la loi du mouvement, ou la droite *Ok'* qui la représente, est entièrement déterminée; c'est-à-dire qu'on peut la construire. On doit donc aussi pouvoir construire et calculer alors la vitesse et l'espace qui répondent à un autre temps quelconque.

En effet, représentons par e_1, v_1 le chemin et la vitesse qui répondent à la première seconde; soient E, V le chemin et la vitesse qui répondent à un nombre quelconque de secondes, représenté par T, et qui seraient censées écoulées depuis l'origine du mouvement; on aura d'abord, en vertu de la première des propositions ci-dessus,

$$e_1 = \tfrac{1}{2} v_1 \times 1'' = \tfrac{1}{2} v_1, \qquad E = \tfrac{1}{2} V \times T;$$

puis, en vertu de la deuxième,

$$e_1 : E :: 1'' \times 1'' : T \times T \text{ ou } T^2;$$

d'où l'on tire

$$E = e_1 \times T^2 = \tfrac{1}{2} v_1 \times T^2;$$

puis enfin, en vertu de la troisième,

$$e_1 \text{ ou } \tfrac{1}{2} v_1 : E :: v_1^2 : V^2; \quad \text{d'où } V^2 = 2 v_1 \times E.$$

Nous avons d'ailleurs, en vertu même de la définition du mouvement uniformément accéléré (107),

$$v_1 : V :: 1'' : T; \quad \text{d'où } V = v_1 \times T.$$

Ces différentes formules serviront à calculer la valeur de deux quelconques des quantités E, V, T quand on connaîtra celle de la troisième, ainsi que le chemin e_1 ou la vitesse v_1 qui correspondent à l'unité de temps 1''; il ne s'agira que de remplacer chaque lettre par le nombre d'unités de temps ou de longueur qu'elle représente, et d'effectuer les opérations indiquées *.

* La relation $E = \frac{1}{2} v_1 \times T^2$, et la relation $V^2 = 2v \times E$ qui indique que la *vitesse* V *est moyenne proportionnelle* entre $2v_1$ et E, ou *entre le double du chemin décrit dans la première seconde et celui qui est décrit au bout du temps* T, présentent seules quelques difficultés pour le calcul de T et de V; mais on peut parvenir au résultat par le moyen des constructions graphiques connues, ou par les tables que nous ferons connaître plus tard, ou enfin par l'*extraction* directe de la *racine carrée* du quotient de 2E par v_1 et du produit $2v_1 \times E$, qui donnent, en chiffres, les valeurs de T^2 et de V^2.

111. *Cas où le corps part avec une vitesse déjà acquise.* Dans ce qui précède, nous avons supposé que le corps partait du repos ou avec une vitesse nulle, de sorte que la droite OA', qui donne la loi de son mouvement, passait par l'origine O des temps; mais, s'il avait déjà une vitesse acquise antérieurement, cette droite passerait par le point O' (pl. I, fig. 28), extrémité de l'ordonnée OO' qui représente cette vitesse du départ. En menant la parallèle O'B' à OB, on verra que la vitesse *cc'*, qui répond à un temps quelconque Oc, écoulé depuis l'origine O du mouvement, se composera de la vitesse *cc''*, égale à la vitesse *initiale* OO'', augmentée de la vitesse *c'c''*, que le corps acquerrait, sous l'action de la force motrice constante et au bout du temps correspondant Oc ou O'*c''*, si le corps partait réellement avec une vitesse nulle, comme dans le cas précédent; car la droite O'*d'* donne, dans ce cas, par rapport à O'B', prise pour axe des temps, la loi de l'accélération de la vitesse. Connaissant donc la vitesse que la force imprimerait au corps au bout de la première seconde, s'il partait du repos, on aura tout ce qu'il faut pour construire O*d'* par rapport à O'B', et par conséquent par rapport à O*d*; d'où il sera aisé de déduire toutes les circonstances du mouvement, et de les calculer même au moyen des propriétés géométriques de la figure, si l'on se rappelle les diverses notions déjà établies précédemment.

Qu'il s'agisse, par exemple, de calculer le chemin décrit par le corps au bout du temps O*d*, lequel est ici représenté par l'aire du trapèze O*dd'*O'; on apercevra, de suite, qu'il *se compose du chemin* OO'*d''d*, *qui, pendant ce temps, serait décrit uniformément, en vertu de la vitesse initiale* OO', *augmenté de celui* O'*d'd''*, *qui dans le même temps, serait décrit, sous l'action de la force motrice constante et d'un mouvement uniformément accéléré, si le corps partait du repos au lieu de partir avec une vitesse déjà acquise.* Or, nous avons appris ci-dessus à calculer l'un et l'autre de ces chemins.

112. *Du mouvement uniformément retardé.* Si nous supposons maintenant que la force motrice constante, au lieu d'augmenter sans cesse et par degrés égaux la vitesse *initiale* OO' (fig. 29), la diminue au contraire à chaque instant, le mouvement sera alors *uniformément retardé.* En menant la parallèle O'B' à OB, on verra que la vitesse *cc'*, qui répond à un temps quelconque Oc, écoulé depuis l'origine O du mouvement, n'est autre chose que la vitesse

primitive OO′ diminuée de la vitesse $c'c''$ que le corps acquerrait, sous l'action de la force motrice, au bout du temps Oc, si ce corps partait du repos.

L'aire du trapèze OO′$c'c$ étant encore ici la représentation du chemin décrit au bout du temps Oc, en vertu du mouvement retardé, on voit que ce *chemin est égal à celui* OO′$c''c$ *qui serait décrit uniformément, pendant ce même temps, et avec la vitesse primitive* OO′, *moins celui* O′$c'c''$, *qui, dans ce même temps, serait décrit, sous l'action de la force motrice constante et d'un mouvement uniformément accéléré, si le corps partait du repos au lieu de posséder une vitesse déjà acquise.* On pourrait donc encore calculer, dans le cas actuel et au moyen de la figure, toutes les circonstances du mouvement, si seulement on connaissait la vitesse initiale OO′, ainsi que la diminution de vitesse $c'c''$, due à la force retardatrice, au bout d'un temps quelconque Oc, ou, si l'on veut, à la fin de la première seconde de temps écoulé.

Supposons, entre autres, qu'on veuille trouver le temps Oe au bout duquel la force motrice aura éteint entièrement la vitesse du corps; on aura, par les triangles semblables O′$c'c''$ et OO′e, la proportion

$$c'c'' : O'c'' \text{ ou } Oc = 1'' :: OO' : Oe; \quad \text{d'où } Oe = \frac{OO' \times 1''}{c'c''} = \frac{OO'}{c'c''}.$$

Quant au chemin total décrit par le corps, depuis l'instant où la force retardatrice a commencé son action jusqu'à celui où la vitesse est devenue nulle, il sera donné par la surface du triangle OO′e, ou par le produit

$$\tfrac{1}{2}\, OO' \times Oe = \tfrac{1}{2}\, OO' \times \frac{OO'}{c'c''} = \tfrac{1}{2}\, \frac{\overline{OO'^2}}{c'c''}.$$

Une remarque très-importante à faire, c'est que, si l'on suppose que la force motrice constante, après avoir anéanti complétement la vitesse initiale du corps, continue à agir en lui imprimant à chaque instant des degrés de vitesse égaux à ceux qu'elle avait détruits d'abord, le corps retournera dès lors en arrière, en reprenant les mêmes vitesses quand il repassera par les mêmes positions. C'est ce qu'indique la ligne O′e, en supposant que les temps soient comptés à partir de e vers O, c'est-à-dire de l'instant où le mouvement du corps est éteint; car la force motrice, qui est devenue accélératrice,

aura imprimé, en sens contraire, la vitesse *dd'* au bout du temps *ed*, la vitesse *cc'* au bout du temps *ec*, etc.

DES LOIS DU MOUVEMENT VERTICAL DES CORPS PESANTS.

118. *Causes qui influent sur le mouvement des corps dans l'air.* L'un des exemples les plus importants du mouvement uniformément accéléré, est celui que nous présente la chute des corps pesants, suivant la direction de la verticale ou de l'aplomb. Mais, avant de l'exposer, faisons connaître les circonstances qui, à la surface de la terre, accompagnent et modifient ce mouvement.

Déjà nous avons vu (61) que la pesanteur pouvait être considérée comme une force sensiblement constante dans l'étendue ordinaire des travaux de l'industrie. Mais, à la surface de notre globe, tous les corps sont plongés dans l'air, et cet air est lui-même (8 et 4) un corps matériel qui les presse de toutes parts (37), et qui, en vertu de son inertie, de son impénétrabilité, s'oppose avec plus ou moins d'énergie, à toute espèce de mouvement (66). Nous avons vu (41) que l'effet de la pression de l'air, sur les corps solides, se réduit sensiblement à diminuer le poids de ces corps d'une quantité égale au poids du volume du fluide qu'ils déplacent; de sorte que cette diminution est d'autant plus sensible que, à égalité de volume d'un corps, son poids est moindre. Quant à la résistance que l'air oppose au mouvement des corps, en vertu de son inertie et de sa force de ressort (63), l'expérience apprend que cette résistance varie selon l'étendue et la forme de la surface extérieure des corps; mais surtout selon la rapidité plus ou moins grande du mouvement. — En frappant l'air avec une palette plane et mince, la résistance qu'on éprouve est d'autant plus grande que la vitesse du mouvement est plus considérable, tandis qu'elle est à peine sensible quand le mouvement s'opère avec lenteur. Si au lieu de frapper l'air avec toute la surface du plan de la palette, on fait mouvoir cette palette de *biais*, la résistance est moindre à vitesse égale, et elle est la plus petite possible quand on oppose tout à fait le *chan* ou le côté mince de la palette à l'action de l'air; c'est-à-dire quand on dirige sa face plane dans le sens même du mouvement.

Des choses analogues se passent à l'égard de tous les corps qui se meuvent dans l'air; et l'on observe que la résistance croît généralement 1° avec l'étendue de la *surface antérieure* des corps, de celle

qui se présente directement à l'action de l'air; 2° avec la difficulté plus ou moins grande que, par suite de la forme même de ces corps, l'air éprouve à glisser le long de leur surface, à se dévier ou à leur faire place; 3° avec la grandeur de la vitesse qu'ils possèdent, et cela dans un rapport qui croît beaucoup plus rapidement que cette grandeur, et qui surpasse même un peu son carré.

114. *Chute verticale des corps dans l'air.* On conçoit, d'après tout ce que nous venons de dire, que la présence de l'air doit apporter des modifications, plus ou moins sensibles, aux lois de la chute verticale des corps qui sont abandonnés librement à l'action de la pesanteur; et l'on peut même prévoir à l'avance et expliquer une infinité de faits que l'expérience journalière confirme ; tels que l'ascension *spontanée* ou naturelle (41) de certains corps, leur équilibre à une certaine hauteur dans l'atmosphère, la chute plus ou moins rapide des corps solides, etc. — En laissant tomber, dans l'air et d'une même hauteur, des corps solides, on observe, en effet, que ceux qui pèsent plus sous le même volume, ou qui sont les plus denses (33), ceux qui présentent le moins de surface à l'action directe de l'air et dans le sens du mouvement, sont aussi ceux qui arrivent les premiers au bas de leur chute. Ainsi une balle de plomb pleine tombe plus vite qu'une balle de plomb creuse ou qu'une balle de bois pleine, égale en grosseur, en diamètre; celle-ci tombe aussi plus vite qu'une balle de liége, etc.; enfin, un même poids de la même substance peut aussi tomber, plus ou moins vite, selon que cette substance est plus ou moins compacte, moins ou plus divisée. La raison en est toute simple : dans le premier cas, la diminution du poids des différents corps et la résistance de l'air sont les mêmes pour chacun d'eux, tandis que (35 et 41) leurs poids absolus, leurs poids dans le vide qui mesurent véritablement l'énergie de la pesanteur sur chacun d'eux sont très-différents; dans le second cas, au contraire, le poids absolu reste le même, mais la diminution de ce poids, résultante de la pression de l'air, et la résistance que cet air occasionne sur la surface extérieure des corps, est aussi moins forte pour les corps compacts que pour les autres.

115. *Chute dans le vide, mode d'action de la pesanteur.* Si l'on faisait tomber les corps ci-dessus dans un espace entièrement vide ou privé d'air, chacun d'eux, en descendant toujours de la même hau-

teur, arriverait nécessairement en moins de temps ou plus vite au bas de sa chute; car l'action de la pesanteur conserverait alors toute son intensité. L'expérience qui confirmerait un tel aperçu n'aurait donc rien qui dût nous surprendre; mais il n'en serait pas de même si elle nous apprenait que les corps tombent tous également vite d'une même hauteur; car nous sommes naturellement portés à croire que les corps qui ont plus de poids, étant sollicités avec une force plus énergique, doivent aussi acquérir un degré de vitesse plus grand; nous ne faisons pas attention, en effet, que la pesanteur a aussi plus de matière à mettre en mouvement, dans le premier cas, que dans le second, de sorte que la résistance de l'inertie (66) est réellement plus grande.

Or c'est ce que les physiciens ont constaté en faisant le vide (36) dans un grand tube de verre (pl. I, fig. 30), après y avoir préalablement introduit des corps solides de diverses espèces, depuis les plus légers jusqu'aux plus denses: ces corps parvenaient tous à la fois au bas de leur chute, quand, par un moyen quelconque et facile à imaginer, on les lâchait en même temps et de la même hauteur. Ils ont, de plus, remarqué que ces corps tombaient dans le même ordre, et conservaient les mêmes distances respectives dans toute la durée de leur chute; ce qui prouve que la pesanteur leur imprimait, à chaque instant, le même degré de mouvement; nous pouvons donc admettre, comme parfaitement démontré, ce principe général qu'il est important de retenir :

La pesanteur ou gravité agit indistinctement sur toutes les particules de la matière quelle qu'en soit la nature particulière, et leur imprime, à chaque instant, le même degré de vitesse dans le même lieu et dans le vide.

On s'assure d'ailleurs très-simplement que la pesanteur agit aussi bien sur les molécules intérieures des corps que sur celles du dehors, en observant qu'un même corps pèse également à l'air libre ou placé dans l'intérieur d'un autre corps, par exemple, dans une chambre, dans une boîte; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que l'action de la pesanteur se fasse sentir à travers la matière même de cette chambre, de cette boîte.

On voit aussi que *le poids absolu des corps* n'est autre chose que le *résultat* de toutes les petites actions réunies de la pesanteur sur les molécules matérielles de ces corps. Il ne faut donc pas confondre le *poids* avec la *pesanteur*, qui est véritablement la *force élémentaire*

qui sollicite ces diverses molécules à se mouvoir avec le même degré de vitesse.

116. *Expérience sur la chute des corps.* Nous venons de voir que les corps les plus denses tels que l'or, le plomb, le cuivre, sont ceux qui, à égalité de surface, tombent le plus vite dans l'air, parce que la résistance est alors très-faible par rapport au poids total du corps. Mais, quand la hauteur de chute ne surpasse pas 5 mètres, par exemple, on trouve, par l'expérience, que des balles de ces diverses substances tombent dans le même temps, et qu'elles ne tombent même guère plus vite que des balles de marbre et de cire, égales en volume, dont le poids est 7 fois, 20 fois moindre. Or cela prouve évidemment que la présence de l'air exerce réellement, pour de petites chutes, une influence peu sensible sur le mouvement de ces corps; de sorte qu'on peut très-bien admettre, par exemple, que la loi que suit la balle d'or, en tombant, dans l'air, d'une hauteur moindre que 5 mètres, est, à très-peu de chose près, la même que celle qu'elle suivrait si elle tombait de cette hauteur, dans un espace entièrement vide.

Galilée, célèbre physicien italien, qui a le premier découvert cette loi par des expériences directes et suffisamment précises, a trouvé que le mouvement vertical des corps était véritablement un mouvement uniformément accéléré. La pesanteur est donc (107) une *force accélératrice constante,* et qui agit avec une intensité égale, à chaque instant et quelle que soit la vitesse déjà acquise par le corps. Atwood, physicien anglais, en reprenant depuis les expériences de Galilée avec des moyens plus ingénieux et plus perfectionnés, a obtenu les mêmes résultats. Nous pouvons donc énoncer les principes généraux qui suivent (109).

117. *Lois de la chute des corps dans le vide.* Lorsqu'un corps tombe verticalement et d'une certaine hauteur, dans le vide,

1° *Les vitesses acquises aux diverses instants, sont proportionnelles aux temps écoulés depuis le commencement de la chute;*

2° *Les espaces totaux parcourus aux mêmes instants, ou les hauteurs de chute, sont proportionnels aux carrés des temps écoulés;*

3° *Ces mêmes hauteurs sont proportionnelles aux carrés des vitesses acquises au bout de chacune d'elles;*

4° *La vitesse acquise, au bout d'un certain temps, est double de la hauteur de chute déjà parcourue avant cet instant.*

Pour le point du globe où nous nous trouvons, le chemin décrit au bout de la *première seconde*, est égal à $4^m.9044$; donc la *vitesse acquise* au bout de ce temps, est 2 fois $4^m,9044$ ou 9^m8088. Cette dernière vitesse est ordinairement représentée par g dans les traités de Mécanique : ainsi $g = 9^m,8088$: c'est la connaissance de cette grandeur qui sert à calculer (110) toutes les circonstances du mouvement accéléré des corps tombant d'une certaine hauteur dans le vide, ou des corps très-denses tombant d'une petite hauteur dans l'air.

118. *Formules et applications.* Ordinairement on représente par la lettre h ou H, la hauteur, en mètres, d'où le corps est tombé à un certain instant ; en nommant toujours T le temps employé, par ce corps, à décrire le chemin vertical H, ou à tomber de H, et V la vitesse qu'il a acquise à la fin de ce temps, on aura, d'après ce qu'on a trouvé (110) pour le mouvement uniformément accéléré en général.

$$H = \tfrac{1}{2}V \times T,\quad H = \tfrac{1}{2}g \times T^2,\quad V^2 = 2g \times H,\quad V = g \times T,\quad g = 9^m,8088,$$

formules très-fréquemment rappelées en Mécanique, et d'un grand usage pour calculer les circonstances de la chute des corps pesants.

Supposons qu'on veuille trouver la vitesse acquise V, et le chemin H décrit au bout de 7″ de chute ; T représentant ici les 7″, on aura $V = g \times T = 9^m,809 \times 7 = 68^m,66$ environ. $H = \tfrac{1}{2}g \times T^2 = 4^m,9044 \times 49 = 240^m,316$.

Si l'on se donnait seulement la hauteur H de chute, on calculerait la vitesse acquise, au bas de cette chute, au moyen de la relation $V^2 = 2g \times H$. Supposons, par exemple, que $H = 10^m$, on aura $V^2 = 19^m,6176 \times 10^m = 196,176$ mètres carrés ; et il ne s'agirait que de trouver la racine carrée de 196,176, ou le nombre qui, multiplié par lui-même, donnerait cette quantité. Or cette racine est ici 14^m environ, puisque 14×14 ou $14^2 = 196$.

Pour montrer une nouvelle application des principes ci-dessus, nous supposerons que deux corps différents tombent verticalement d'un même point A (pl. I, fig. 31), où ils étaient d'abord au repos, mais ne tombent que l'un après l'autre, et à un intervalle de temps qui soit seulement de $\frac{1}{100}$ de seconde ou 0″,01. Cela posé, nous nous demanderons à quelle distance A′B′ se trouveront ces deux corps à la fin de la première, de la deuxième seconde, écoulées depuis l'instant du départ du second corps.

Puisque ce corps ne part, du point A, que 0″,01 après le premier,

il en résulte que celui-ci aura déjà parcouru un certain espace AB avant l'instant où l'autre aura été lâché de A ; cherchons d'abord cet espace au moyen de la formule $H = \frac{1}{2} g T^2 = 4^m,9044 \times T^2$ (118). Ici $T = 0'',01$; donc

$$H = 4,9044 \times 0,01 \times 0,01 = 4^m,9044 \times 0,0001 = 0^m,00049;$$

c'est-à-dire que la distance AB, entre les deux corps, n'est pas même de $\frac{1}{2}$ millimètre.

Cherchons maintenant à quelle distance A'B' se trouveront, l'un de l'autre, les mêmes corps, à l'instant où une seconde entière se sera écoulée depuis l'instant du départ du deuxième corps ; et, pour cela, calculons séparément les chemins AB', AA' décrits par chacun de ces corps, à partir du point A, en observant que, puisque la durée de la chute AA' du second corps est de 1", celle de la chute AB' du premier est $1'' + 0'',01 = 1'',01$; on aura l'espace

$$AA' = 4^m,9044 \times 1'' \times 1'' = 4^m,9044, \text{ et l'espace}$$
$$AB' = 4^m,9044 \times 1,01 \times 1,01 = 4^m,9044 \times 1,0201 = 5^m,003;$$
donc l'intervalle A'B' ou $AB' - AA' = 5^m,0030 - 4^m,9044$
$$= 0^m,0986 \text{ ou environ } 10^{cent}.$$

A la fin de la 2e, de la 3e seconde de chute, les deux corps seraient déjà à une distance, l'un de l'autre, de près de 20, de 30^{cent}, etc.

Ces résultats expliquent très-bien pourquoi les *jets d'eau* des jardins, des pompes à incendie, qui s'élèvent verticalement, ou sous une certaine inclinaison, en filets compacts et continus, retombent, au contraire, en se divisant en gouttelettes, en pluie plus ou moins fine ; car la résistance de l'air, loin de séparer les parties, comme on pourrait le croire d'abord, tend au contraire à les réunir en diminuant la rapidité du mouvement de celles qui redescendent les premières. C'est aussi là l'explication très-simple de l'effet si connu des cascades naturelles, dont l'eau, en se précipitant du haut des montagnes, se divise en une pluie tellement fine qu'elle ressemble à un véritable brouillard. Nous verrons, par la suite, que de telles remarques ne sont pas seulement un objet de curiosité, mais qu'elles peuvent aussi recevoir des applications dans les arts.

119. *Observations diverses.* L'opération, par laquelle il s'agit de trouver la vitesse V, acquise à la fin de la chute verticale d'un corps, au moyen de la hauteur H de cette chute, se reproduit très-fréquem-

ment dans la Mécanique pratique ; aussi a-t-on construit des tables exprès, qui fournissent immédiatement la vitesse répondant à une hauteur donnée : nous les ferons connaître lorsqu'il sera question des lois de l'écoulement des fluides.

On dit ordinairement que la *vitesse* V *est due à la hauteur* H, et réciproquement que cette *hauteur est due à la vitesse* V, expressions abrégées qu'il est essentiel de retenir.

Enfin on devra se ressouvenir que, dans l'air, les corps ne tombent pas réellement avec la vitesse qui répond aux données du calcul ; mais que cette vitesse et les autres circonstances du mouvement diffèrent très-peu des véritables, dans les cas qui ont déjà été spécifiés plus haut (116). Nous ferons d'ailleurs connaître, à la fin de ces PRÉLIMINAIRES, les moyens par lesquels on peut calculer exactement le mouvement des corps qui tombent ou s'élèvent verticalement dans l'air ; et, en les appliquant à la théorie des parachutes et des ballons, nous démontrerons ainsi l'utilité immédiate des principes de la mécanique.

120. *Ascension verticale des corps pesants.* Lorsqu'un corps, une balle de fusil par exemple, est lancé, de *bas en haut*, selon la verticale, la pesanteur agit, à chaque instant, avec la même intensité, pour diminuer, par degrés égaux, la vitesse primitive ; le mouvement sera donc *uniformément retardé*, et, d'après ce qui précède (112), la vitesse finira par s'éteindre, quand le corps sera arrivé à une certaine hauteur, puis il redescendra, en vertu de l'action de la gravité, en reprenant tous les degrés de vitesse qu'il possédait en montant et pour les mêmes positions. Ainsi à 1^m, à 2^m, à 3^m au-dessus de terre, le corps possédera exactement les mêmes vitesses, soit dans l'ascension, soit dans la chute ; il n'y aura que la direction du mouvement de changée : par exemple, lors de sa chute ou de son retour au point de départ, la pesanteur lui aura précisément restitué la vitesse qu'il avait primitivement. Nommant H la plus grande élévation à laquelle il soit parvenu, et V cette vitesse, on aura donc $V^2 = 2gH$; d'où il sera facile de déduire H quand on aura V, et réciproquement, ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus (118).

On pourra d'ailleurs calculer toutes les autres circonstances de l'ascension verticale du corps, par les méthodes du n° 112 ; mais il ne faudra pas oublier, je le répète, que les résultats, ainsi obtenus, supposent que l'air n'existe pas ou n'exerce aucune influence sensible

sur le mouvement. Car, dans la réalité, les corps montent à une hauteur un peu moindre que celle qui *répond* ou est *due* à leur vitesse *initiale*, et, de plus, en retombant, ils acquièrent une vitesse un peu moindre que celle qui est *due* à la hauteur réelle de leur chute ou de leur ascension.

FORCE VIVE, MASSE ET QUANTITÉ DE MOUVEMENT DES CORPS.

121. *Travail relatif à la vitesse de chute des corps.* Nous pouvons maintenant apprécier la quantité de travail ou d'action que dépense la pesanteur pour engendrer une certaine vitesse dans un corps, ou pour vaincre l'inertie de ce corps. Nommons, en effet, P le nombre des kilogrammes que pèse le corps, c'est-à-dire l'effort total (60 et 115) que la pesanteur exerce sur ce corps, et qu'il faudrait employer pour le soutenir à une certaine position; ce sera aussi la mesure de l'effort constant exercé sur le corps pendant sa descente de la hauteur H. La quantité de travail développée par la pesanteur et consommée par l'inertie (66), pendant cette chute, sera donc représentée (78) par le produit $P \times H$; et cette quantité de travail aura engendré, dans le corps, la vitesse V calculée (118) par l'équation $V^2 = 2g\,H$. Mais, si l'on divise le produit $2g \times H$ ou V^2 par l'un de ses facteurs $2g$, on aura l'autre $H = \frac{V^2}{2g}$; et par conséquent, $P \times H$ est la même chose que $P \times \frac{V^2}{2g}$ ou $\frac{1}{2}\frac{P}{g} \times V^2$.

Ainsi donc la quantité de travail, développée par la pesanteur pour imprimer une certaine vitesse V à un corps, est égale à la moitié du produit obtenu en multipliant le carré de cette vitesse par le poids P de ce même corps, divisé par la vitesse g ou $9^m,8088$ que la pesanteur imprime, à tous les corps (117), au bout de la première seconde de leur chute.

122. *Force vive des corps; sa relation avec le travail mécanique.* Le produit $\frac{P}{g} \times V^2$ étant précisément ce que les mécaniciens sont convenus de nommer la *force vive du corps dont le poids est* P *et la vitesse actuelle* V, on voit que *la quantité d'action ou de travail, dépensée par la pesanteur pour produire la chute verticale d'un corps, est la moitié de la force vive imprimée au bas de cette chute;* ou, si l'on

vent, *la force vive imprimée est le double de la quantité de travail dépensée par la pesanteur*. Lorsque le corps est lancé verticalement de bas en haut, avec une certaine vitesse, le travail de la pesanteur, toujours mesuré par le produit du poids et de la hauteur à laquelle le corps à été élevé verticalement, est employée, au contraire, à détruire cette vitesse. Par conséquent, dans les deux cas de la descente et de la montée, la moitié de la force vive acquise ou détruite, mesure la quantité de travail nécessaire pour vaincre l'inertie du corps ; c'est-à-dire, que cette mesure reste la même, soit que la pesanteur imprime une certaine vitesse à un corps, soit qu'elle détruise une vitesse égale et qu'il possédait déjà.

Nous prouverons bientôt que ce principe est général, quelle que soit la force motrice qui ait communiqué le mouvement au corps, et quelle que soit la direction et la nature de ce mouvement. Mais il est nécessaire auparavant de faire plusieurs remarques, et de passer quelques autres définitions admises par les mécaniciens.

123. *Comment on doit entendre la force vive*. L'expression de *force vive*, employée pour désigner le produit $\frac{P}{g} \times V^2$, pouvant induire en erreur beaucoup de personnes, il est bon de remarquer ici que, d'après notre manière de voir, ce n'est point à proprement parler (39) une *force*, pas plus que la quantité $P \times H$, que nous avons nommée, en général, *quantité d'action*, *quantité de travail;* c'est tout simplement le résultat de l'activité d'une force motrice ou de pression, *exprimable en poids*, qui a été employée, pendant un temps plus ou moins long (57), à vaincre l'inertie de la matière d'un corps, à imprimer un certain mouvement, une certaine vitesse à ce corps. Sous ce point de vue, la force vive n'est véritablement que *l'effet dynamique* (80) de la force motrice, ou plutôt le double de cet effet, puisque $\frac{P}{g} \times V^2 = 2P \times H$.

Lors donc que nous emploierons le mot *force vive*, ce ne sera jamais que pour désigner la valeur numérique d'une certaine quantité essentiellement relative au mouvement actuel d'un corps, ou au mouvement qu'il pourrait réellement acquérir dans des circonstances déterminées ; et, sans s'arrêter aucunement à la signification propre des mots par lesquels on l'indique dans le discours, il faudra seulement se ressouvenir que *sa valeur, en nombre, équivaut au produit*

du carré de la vitesse effective d'un corps, par le poids de ce corps, divisé par g ou 9m,8088. Ainsi nous ne confondrons pas, comme on le fait quelquefois (80), la force vive des moteurs avec la quantité de travail qu'ils développent contre des résistances qui leur sont opposées; et, s'il nous arrivait, par exemple, de parler de la force vive d'un homme ou d'un cheval, nous entendrions uniquement spécifier le produit ci-dessus concernant leur vitesse et leur poids réels, produit qui est bien différent de celui qui mesure la quantité de travail mécanique même développée par ces moteurs, à chaque instant ou pendant un certain temps, lorsqu'ils sont appliqués à une machine, à un outil quelconque (74 et 77).

124. *Réflexions sur la force vive et les forces motrices en général.* Ce qui a porté autrefois les mécaniciens à adopter le mot *force vive*, c'est qu'ils ont confondu l'*effet* avec la *cause*, le *résultat du travail* d'une force motrice avec ce *travail même;* par la seule raison que les mesures, en nombres, de ce travail, de cet effet ou de ce résultat, sont directement comparables entre elles, et ont une certaine relation numérique. Ayant d'ailleurs admis l'expression de *force* pour désigner les effets, les résultats de l'activité d'un moteur qui travaille, et voulant la distinguer de l'*effort* ou *pression simple* (59) que ce moteur exercerait sur un corps qui resterait en repos ou qui ne céderait pas à son action, ils ont dit que c'était une *force vive*, et cette pression, cet effort, ils l'ont nommé *force morte*. De là aussi la dispute qui s'est élevée, parmi les géomètres du dernier siècle, sur la manière de mesurer la force vive et la force morte, et de les distinguer entre elles; dispute fort oiseuse et qui n'a fait qu'embrouiller des choses très-claires par elles-mêmes, puisqu'il est impossible de confondre l'effort, la pression simple qu'exerce un moteur sur un corps, avec son travail mécanique; et ce travail avec le mouvement actuel ou acquis d'un corps.

A la vérité, un corps mis en mouvement, un certain *effet dynamique* (123) peut, à son tour, devenir une cause, une source de travail : c'est ainsi, par exemple, qu'un corps lancé verticalement de bas en haut, est élevé, en vertu de sa vitesse, à une certaine hauteur, tout comme il le serait par l'action d'un moteur animé. Mais il arrive ici la même chose que lorsqu'une force motrice a développé une certaine quantité de travail pour bander un ressort élastique (97) : l'inertie de la matière a été mise en jeu de la même

manière que les ressorts moléculaires l'ont été dans ce dernier cas ; cette inertie (106), quand elle a été ainsi vaincue, devient capable de restituer la quantité de travail dépensée, de même que le fait le ressort qui a été bandé. En un mot, l'inertie comme les ressorts (98), sert à *emmagasiner* le travail mécanique, en le transformant en force vive ; de sorte que la force vive est un véritable *travail disponible*.

Nous avons vu (102) qu'on peut en dire tout autant d'un corps qui a été élevé à une certaine hauteur, par un moyen quelconque ; ce corps, sollicité par la pesanteur, est la source d'une quantité de travail, dont on peut disposer subséquemment pour produire effectivement du travail mécanique. Mais, de même que nous ne disons pas, en termes absolus, que ce corps, actuellement élevé à une certaine hauteur, est une *force*, qu'un ressort bandé est une *force* ; de même aussi il est peu exact de dire qu'un corps en mouvement, que $\frac{P}{g} V^2$ est une *force*. Ces réflexions sont également applicables d'ailleurs aux *hommes*, aux *animaux* en général, aux *combustibles* ou au *calorique* enfermé dans les corps (99), aux *cours d'eau*, au *vent*, etc. ; ce sont des *agents* de travail, des *moteurs* si l'on veut, mais non de simples forces, de simples pressions (59).

L'objet de la Mécanique industrielle consiste principalement à étudier les diverses transformations ou métamorphoses que peut subir le travail des moteurs par le moyen des machines ou des outils, à comparer entre elles les quantités de ce travail, à les évaluer en argent ou en ouvrage de telle ou telle espèce, etc.

125. *Définition de la masse des corps.* Puisque la pesanteur agit indistinctement sur toutes les particules matérielles d'un corps, et tend, à chaque instant, à leur imprimer, le même degré de vitesse dans le même lieu (115), on voit que le poids de ce corps, qui est le résultat de toutes ces actions partielles, peut donner, jusqu'à un certain point, une idée de la *quantité de matière* qu'il renferme ou de sa *masse*. Suivant cette notion, la *masse* serait donc proportionnelle au poids ; souvent même on prend, dans les applications, les poids pour les masses. Mais, comme l'intensité de la pesanteur varie d'un lieu à un autre (61), et que la quantité de matière ou la *masse absolue* d'un même corps ne varie pas, on voit que cette dernière serait, dans certains cas, mal définie par le poids simple de ce corps.

Or, l'expérience apprend que la vitesse imprimée, par la pesanteur, au bout de la première seconde de chute, demeure constamment proportionnelle à son intensité; c'est-à-dire (117 et 121) que le rapport $\frac{P}{g}$ reste le même pour tous les lieux. Ainsi, P et P′ étant les *poids absolus* (60) et dans le vide, d'un même corps transporté, par exemple, à deux hauteurs différentes; g et g' les vitesses qu'à ces hauteurs, la pesanteur imprime, dans le vide et à la fin de la 1re seconde de leurs chutes, à chaque particule de matière, on a

$$P : P' :: g : g' \text{ ou } \frac{P}{g} = \frac{P'}{g'}.$$

C'est donc à ce rapport invariable $\frac{P}{g}$, et non au poids P lui-même, que s'applique véritablement, en Mécanique, la définition de la *masse* d'un corps; et l'on commettrait souvent des erreurs de calcul fort graves, en prenant le poids pour la mesure de la masse.

126. *Expression abrégée de la masse et de la force vive, dans les calculs.* Ordinairement on représente la valeur de la masse par la lettre m ou M : on a donc $M = \frac{P}{g}$, et, par suite, $P = M \times g = Mg$; P exprimant l'effort absolu exercé par la pesanteur sur un certain corps, et g la vitesse qu'elle lui imprime, dans le même lieu et dans le vide, au bout de la première seconde de sa chute verticale.

D'après cette convention, la valeur ci-dessus $\frac{P}{g} \times V^2$ de la *force vive* d'un corps (121) se trouve aussi représentée, dans les calculs mécaniques, par $M \times V^2$ ou MV^2, c'est-à-dire par *le produit de la masse de ce corps et du carré de sa vitesse acquise ou actuelle.*

127. *Quantité de mouvement des corps.* Les mécaniciens sont également convenus de nommer *quantité de mouvement* d'un corps, *le produit de sa masse,* définie comme on vient de le dire, *par la vitesse simple et actuelle que possède cette masse,* c'est-à-dire que $M \times V$ ou $\frac{P}{g} \times V$, qu'on écrit aussi MV, $\frac{PV}{g}$ pour la simplicité, est ce qu'on nomme une *quantité de mouvement* en Mécanique. Cette quantité est, comme on voit, très-différente de ce que nous avons appelé (80) la *quantité d'action* ou *de travail* des moteurs; et on ne

peut la confondre avec cette dernière, qu'autant (84) que l'on confondrait aussi l'effort d'un moteur avec le poids réel, ou plutôt avec la masse d'un corps; ce qui n'est évidemment pas permis *.

128. *Observations générales.* Dans le fait, c'est principalement pour abréger et simplifier, tout à la fois, les calculs et les raisonnements qu'on emploie les dénominations de *masse*, de *quantité de mouvement*, et qu'on les représente par des lettres particulières: on pourrait aisément s'en passer, ainsi que du mot *force vive*, dans l'exposition des principes de la Mécanique industrielle. Mais, comme tous les auteurs en ont fait usage, il devient important de bien se pénétrer de leur véritable signification, et de ne pas oublier qu'elles se rapportent toutes à des corps matériels et au mouvement véritable de ces corps; ou plutôt qu'elles sont des expressions purement conventionnelles pour exprimer, d'une manière commode, certaines grandeurs numériques, certains résultats qui se présentent fréquemment dans les applications de la Mécanique.

DE LA COMMUNICATION DU MOUVEMENT PAR LES FORCES MOTRICES EN GÉNÉRAL.

129. *Rapport des forces motrices au mouvement qu'elles impriment.* Nous venons de voir que la pesanteur imprime, à un même corps et au bout de la première seconde de sa chute verticale, des vitesses qui sont constamment proportionnelles à son intensité, ou au poids absolu du corps dans chaque lieu. Mais cette propriété provient

* Nommons Q la valeur, en nombre, de $\frac{P}{g} \times V$, on aura $Q = \frac{P}{g} \times V$, ou, ce qui revient au même, $Q : P :: V : g$. Mais P est le poids véritable d'un certain corps, g, ou g^m fait est la vitesse que la pesanteur imprime à ce corps, au bout de la première seconde de chute et dans le lieu où nous sommes; donc Q n'est autre chose que le poids absolu du même corps dans le lieu où la gravité serait capable de lui imprimer la vitesse V au bout de la première seconde de chute, c'est-à-dire l'effort qui soutiendrait le corps contre l'action de cette gravité. On voit aussi que la force vive $M \times V^2$ ou $MV \times V$ n'est elle-même que le produit de ce dernier poids, de cet effort, par la vitesse V, ou par le chemin que décrirait uniformément le corps, dans l'unité de temps, en vertu de sa vitesse acquise. Ces observations peuvent servir à distinguer entre elles, d'une manière absolue, la quantité de mouvement et la force vive, ainsi qu'à montrer l'identité de nature que, sous un certain point de vue, les mécaniciens ont attribuée à ces deux sortes de grandeurs, ainsi qu'au poids et au travail mécanique véritables; elles expliqueront aussi comment on regarde quelquefois la quantité de mouvement comme une *force morte* (12), comme un poids ou un effort sans énergie, et la quantité de travail comme une force vive. Au surplus, nous n'avons nullement besoin de nous inquiéter de pareilles distinctions, de pareilles subtilités.

uniquement de ce que la pesanteur varie, en effet, très-peu (61) dans toute la hauteur de cette chute; de sorte que la vitesse totale, acquise en une seconde, est proportionnelle *aux degrés égaux* de vitesse imprimés à chaque instant (107 et suiv.). Lorsque la force motrice, au lieu d'être constante, varie à chaque instant, il est évident qu'alors son intensité ne peut plus se mesurer par la vitesse qu'elle imprime, à un même corps, au bout de l'unité de temps, et qu'elle dépend uniquement du *petit degré de vitesse* qu'elle lui communique à un instant donné.

L'observation de ce qui se passe à la surface du globe terrestre et dans les mouvements de notre système planétaire, prouve que

Les forces motrices ou de pression sont réellement proportionnelles aux degrés de vitesse très-petits, qu'elles impriment, à un même corps, dans des temps égaux infiniment petits.

Ce fait sert de base à toute la Mécanique du mouvement, et doit être considéré comme une loi générale des forces motrices de la nature.

130. *Mesure des forces motrices et d'inertie par la vitesse imprimée et réciproquement.* Soit F la mesure, en *kilogrammes*, d'une certaine force de pression; soit v le degré très-petit de vitesse qu'elle imprime à un corps, à une époque quelconque et pendant le temps très-petit t; soit pareillement P la pression que la pesanteur exerce, en un certain lieu, sur le corps, ou le poids de ce corps, et v' le petit degré de vitesse qu'elle lui imprime dans le même temps t. On aura, d'après ce qui précède,

$$F : P :: v : v'; \text{ d'où } F = \frac{P}{v'} \times v.$$

Mais, d'après la première loi de la chute des corps (117), nous avons

$$v' : g :: t : 1''; \text{ d'où } v' = gt; \text{ donc, } F = \frac{P}{g} \times \frac{v}{t} = M \times \frac{v}{t},$$

M étant la masse du corps (125).

Ainsi, quand on connaîtra la vitesse v imprimée dans le petit temps t, par la force F, on pourra calculer cette force, qui est égale et contraire à la résistance qu'oppose au mouvement (66), l'inertie de la matière de ce corps, *résistance* que nous avons nommée simplement la *force d'inertie*, et qu'on pourrait aussi ap-

peler la *force dynamique* des corps. La relation $F = M \times \frac{v}{t} = M\frac{v}{t}$, nous apprend donc que

La force d'inertie F *croît proportionnellement à la masse des corps et aux degrés de vitesse* v *qu'il reçoit dans des temps élémentaires* t, *égaux et infiniment petits.*

De la relation ci-dessus, on tire réciproquement la valeur $v = \frac{F \times t}{M}$; donc

Le degré de vitesse *qu'une force motrice imprime à un corps, pendant un même temps élémentaire ou très-petit, croît proportionnellement à l'intensité de la force motrice et inversement à la masse de ce corps ou de son poids.*

131. *Rapport des forces motrices aux quantités de mouvement imprimées.* D'après nos définitions (127), le produit $M \times v$ ou Mv n'est autre chose que ce qu'on nomme une *quantité de mouvement*, en Mécanique. On voit donc que la première des propositions ci-dessus, revient à dire que

« La force d'inertie croît proportionnellement à la quantité de « mouvement communiquée dans un même instant très-petit *t*. »

Ou que

« Les forces motrices communiquent, dans des instants égaux et « infiniment petits, des quantités de mouvement qui leur sont pro- « portionnelles. »

Soient, en effet, F et F′ deux forces motrices ou pressions quelconques agissant, pendant un même instant très-petit t, sur deux corps différents, de masses M et M′; soient v et v' les degrés de vitesse qu'elles leur impriment respectivement à la fin de cet instant, on aura, d'après ce qui précède, $F = M\frac{v}{t}$, $F' = M'\frac{v'}{t}$; et par conséquent

$$F : F' :: M\frac{v}{t} : M'\frac{v'}{t} :: Mv : M'v'.$$

Si donc les forces motrices F, F′, ou les forces d'inertie qui leur sont directement opposées, avaient la même intensité, la même valeur en kilogrammes, les quantités de mouvement qu'elles imprimeraient, dans le même instant très-petit t, le seraient aussi;

ce qui résulte immédiatement de ce qu'on aurait alors

$$M\frac{v}{t} = M'\frac{v'}{t}, \text{ ou } Mv = M'v'.$$

On voit enfin que, si deux forces motrices, appliquées à deux corps différents, demeurent sans cesse égales entre elles et aux mêmes instants; c'est-à-dire, si elles varient de la même manière, les *quantités de mouvement totales et finies* qu'elles auront imprimées à ces corps, entre deux instants quelconques, seront aussi *égales* entre elles; car chacune d'elles sera la somme de quantités de mouvement partielles telles que Mv, $M'v'$, qui ont les mêmes valeurs pour les divers instants successifs et égaux dont se compose le temps total.

C'est ainsi qu'il faut entendre le principe par lequel les auteurs admettent quelquefois que les *forces motrices égales* impriment les mêmes quantités de mouvement *finies* à des corps quelconques; car quelle que soit la petitesse de la durée du temps pendant lequel elles agissent, ce temps n'est pas *nul* (57); et quelle que soit la grandeur de leur intensité, elles ne sont pas *infinies;* elles peuvent se mesurer en kilogrammes comme toutes les forces de pression, de traction, etc. Au surplus, je le répète, ces discussions sont parfaitement inutiles pour nous, qui n'admettons le mot *quantité de mouvement* que pour désigner un certain résultat des calculs, et pour abréger les énoncés des principes (128).

132. *Autre mesure des forces motrices et d'inertie.* Revenons maintenant à la considération simple d'une force unique F, agissant sur un corps de poids P ou de masse M (130) et supposons qu'à une certaine époque du mouvement d'un corps, cette force cesse tout à coup de varier, ou continue d'agir sur le corps avec l'intensité qu'elle possède à cette époque; la vitesse augmentant ou diminuant dès lors de quantités proportionnelles au temps (107), cette intensité pourra être encore mesurée par la *vitesse finie* qu'elle imprimerait au corps, à la fin de la première seconde, s'il partait du repos au commencement de cette seconde. Désignant par V_1 cette vitesse finie, on aura

$$V_1 : v :: 1'' : t; \text{ d'où } V_1 = \frac{v}{t}, \text{ et } F = M \times \frac{v}{t} = MV_1.$$

Ainsi, dans le mouvement varié en général, la force motrice, égale et contraire à la force d'inertie, à la force dynamique, est *mesurée*, à chaque instant, par la *quantité de mouvement qu'elle imprimerait, au bout d'une seconde, si, au lieu de varier, elle demeurait ce qu'elle est à cet instant.*

133. *Calcul des mêmes forces par la loi géométrique du mouvement.* Ces dernières considérations sur la force motrice, dans le mouvement varié, sont analogues à celles qui concernent la vitesse même du mouvement (53), et on peut les reproduire également à l'aide d'une figure. Soit tracée (pl. II, fig. 32), comme il a été dit n° 108, pour le mouvement uniformément accéléré, la ligne $O'a'b'\ldots f'$, qui représente la loi des temps et des vitesses; soient cc', dd' les vitesses qui répondent au commencement et à la fin du très-petit temps cd ou t. Menons, par c', la parallèle $c'd''m$ à l'axe des temps OB; elle retranchera, de l'ordonnée dd', la petite longueur $d'd''$, représentant le *degré de vitesse* imprimé par la force motrice, dans la durée du petit temps $cd = c'd''$, degré dont nous avons désigné la valeur en nombre par v. Or, si l'on suppose qu'à partir du commencement de ce temps t, la force motrice devienne constante, ou (107) qu'elle imprime, dans les instants successifs égaux à t, des degrés de vitesse aussi égaux à $d'd''$; la loi des vitesses acquises sera exprimée (108) par une droite $c'n$, prolongement de $c'd'$, et qui sera tangente à la courbe $O'a'b'\ldots f'$, puisque l'intervalle cd ou t est censé excessivement petit. Prenant donc $c'm = 1''$, et élevant l'ordonnée mn, celle-ci ne sera autre chose que la vitesse V_1 acquise, au bout de l'unité de temps, en vertu de la force motrice supposée constante; et l'on aura, à cause des triangles semblables $c'd'd''$ et $c'mn$, la proportion

$$c'd'' \text{ ou } t : d'd'' \text{ ou } v :: c'm \text{ ou } 1'' : mn \text{ ou } V_1;$$

d'où l'on tire, comme ci-dessus, $V_1 = \frac{v}{t}$.

Ainsi, quand on connaîtra la loi qui lie les temps aux vitesses imprimées, ou la courbe qui représente cette loi, on pourra, pour chaque instant, et par le tracé d'une tangente de cette courbe, déterminer la vitesse V_1; et, par suite, calculer, comme il a été expliqué précédemment (130 et 132), la valeur $MV_1 = \frac{P}{g} \times V_1$ de la

force motrice F qui produit l'accélération du mouvement du corps, ou, ce qui est la même chose (130), la résistance égale et contraire, que l'inertie de la matière du corps oppose, à chaque instant, à l'action de cette force.

134. *Trouver la loi du mouvement quand on a celle de la force.* Réciproquement, si l'on connaît, pour chaque instant et par le moyen d'une table ou d'une courbe, la valeur de la force motrice F, on en déduira les valeurs correspondantes de $V_1 = \frac{F}{M} = \frac{g.F}{P}$, inclinaisons des tangentes $c'n$ de la courbe des vitesses ; car la mesure de ces inclinaisons est donnée par le rapport $\frac{mn}{c'm} = V_1$. Si l'on connaît d'ailleurs la *vitesse initiale* OO′ du corps, vitesse nulle quand ce corps part du repos, rien ne sera plus facile que de tracer la courbe des vitesses successivement acquises sous l'action de la force motrice ; puisqu'au moyen des inclinaisons des tangentes correspondantes à chaque abscisse ou à chaque temps Oa, Ob, Ob,.... on pourra, de proche en proche, construire les positions consécutives O′a', $a'b'$, $b'c'$,.... des éléments rectilignes de cette courbe, et en déduire les ordonnées correspondantes aa', bb', cc', qui mesurent les vitesses acquises par le corps à la fin des divers temps Oa, Ob, Oc....

Par exemple, la vitesse initiale du corps étant OO′, on mènera O′m' parallèle à OB et égale à l'unité de temps ; puis, ayant calculé la valeur de V_1 relative à l'intensité de F au moment où l'action commence, on portera cette valeur sur l'ordonnée $m'n'$, de m' en n' ; traçant O′n', ce sera la direction de l'élément O′a' ; et l'ordonnée aa', qui répond au premier instant Oa, donnera, en la terminant à la droite O′n', la grandeur de la vitesse à la fin de cet instant : en répétant les mêmes opérations pour le point a', on en déduira b' et bb', etc. On pourra d'ailleurs diminuer la longueur des tracés, en construisant quelque part (fig. 33) les inclinaisons successives pn, pn', pn'',.... des tangentes relatives aux divers instants ; car on en déduira, de suite, les accroissements de vitesses tv, tv', tv'',.... acquises par le corps à la fin des instants égaux représentés par pt.

Il est évident que plus sera grand le nombre des parties égales

dans lesquelles on aura divisé le temps total, où l'on suppose que la force motrice opère, plus la courbe, ainsi construite, s'approchera de représenter la véritable loi du mouvement communiqué par cette force. Enfin on remarquera que les trapèzes *bb'c'c*, *cc'd'd*, ... fig. 32, représentent encore ici (108) les chemins élémentaires décrits, par le corps ou par le point d'application de la force, dans les petits temps correspondants *bc*, *cd*....; car nous supposons expressément (130) que cette force agit dans le sens même du mouvement du corps, et que toutes les parties de ce dernier marchent *parallèlement* et de la *même quantité*. On trouvera donc aussi le chemin décrit par le corps, au bout d'un temps quelconque et sous l'action de la force motrice variable, en mesurant l'aire totale de tous les petits trapèzes relatifs à ce temps, c'est-à-dire la surface même du trapèze curviligne *OO'f'f*, par exemple, qui répond à ce temps. Or cette surface s'obtiendra aisément à l'aide du procédé de calcul qu'on trouvera exposé à la fin de ces PRÉLIMINAIRES, et que nous avons déjà signalé (72), à l'occasion de la mesure du travail mécanique variable.

DE LA FORCE VIVE DES CORPS EN GÉNÉRAL ET DE SA RELATION AVEC LE TRAVAIL MÉCANIQUE.

135. *Mesure du travail des forces motrices et d'inertie.* A l'aide des notions qui précèdent, nous pouvons calculer la quantité de travail que doit dépenser, contre un corps de poids P, une force de pression qui varie à chaque instant en demeurant égale et contraire à la force d'inertie, pour imprimer à ce corps une certaine vitesse, ou plus généralement, pour augmenter ou diminuer sa vitesse d'une quantité donnée.

En effet, cette quantité de travail est mesurée, pour chaque instant très-petit *t*, par le produit de la *valeur moyenne* (72) de la force motrice dans la durée de ce temps, valeur que nous nommerons F, et du chemin élémentaire décrit, dans ce même instant, par le point d'application de la force, et dans la direction propre de cette force. Ce petit chemin, comme on vient de le rappeler, est donné sur la fig. 32, par l'aire du trapèze élémentaire *cc'd'd*, par exemple, formé (108) sur la vitesse moyenne correspondante $\frac{1}{2}(cc' + dd')$, que nous nommerons V, et sur l'élément de temps *cd* ou *t*; c'est-à-dire par le produit $V \times t$. Donc la quantité de tra-

vail élémentaire en question est $F \times V \times t$ pour chaque instant, ou pour chaque petit accroissement $d'd''$ de la vitesse, dont la valeur a déjà été nommée v. Or nous avons trouvé ci-dessus (130) que la valeur correspondante de F était $M \times \frac{v}{t}$, ainsi cette quantité de travail est $M \times V \times v$.

C'est la somme de toutes ces quantités de travail partielles qui composent le travail total, et cette somme est facile à trouver par la considération d'une figure. A partir du point O (pl. II, fig. 34), pris pour origine, portons, sur la droite OB, les divers accroissements successifs Oa, ab, bc, cd.... de la vitesse, répondant aux divers instants égaux écoulés depuis celui du départ du corps, accroissements qui ne seront point égaux dans le cas du mouvement varié; il est clair que les longueurs Oa, Ob, Oc, Od.... seront les vitesses totales acquises aux instants correspondants. Portons ces mêmes longueurs sur les ordonnées correspondantes aa', bb', cc', dd'....; de telle sorte qu'on aura $Oa' = Oa$, $bb' = Ob$, $cc' = Oc$....; la suite des points $Oa'b'c'$.... va former une ligne droite inclinée à 45°, sur l'axe des abscisses OB. Cela posé, considérons en particulier l'accroissement de vitesse $d'd''$ qui a été nommé v, le produit $V \times v$ de cet accroissement par la vitesse moyenne correspondante $V = \frac{1}{2}(cc' + dd')$ sera ici représenté par l'aire du petit trapèze $cc'd'd$. Donc la somme cherchée de tous les produits $V \times v$, a pour mesure celle des petits trapèzes correspondants, ou l'aire comprise entre la courbe, l'axe OB des abscisses et les ordonnées qui représentent la vitesse au commencement et à la fin de l'intervalle de temps pour lequel on veut calculer le travail de la force motrice.

136. *Relation entre le travail développé et la force vive acquise.* Supposons en premier lieu que le corps parte du repos, et qu'il s'agisse de trouver la somme des produits $V \times v$, relative à la vitesse acquise dd', que nous nommerons V'; cette somme étant représentée par l'aire du triangle Odd', aura pour mesure $\frac{1}{2} dd' \times Od$ ou $\frac{1}{2} dd' \times dd' = \frac{1}{2} V'^2$. Donc, *la quantité de travail correspondante à la vitesse acquise* V' *et consommée par l'inertie du corps, sera mesurée* (135) par $\frac{1}{2} M \times V'^2 = \frac{1}{2} MV'^2$, ou *par la moitié de la force vive communiquée à ce corps depuis l'instant du départ* (122 et 126). Ce principe a donc lieu aussi pour un mouvement quelconque et pour une force motrice différente de la pesanteur.

Pour une autre vitesse ff' ou V″ plus grande que la première, la consommation de travail sera également mesurée par $\frac{1}{2}$ M X V′ ou $\frac{1}{2}$ MV″² ; et par conséquent, pour l'intervalle compris entre les positions du corps qui répondent aux vitesses V′ et V″, la quantité de travail consommée sera mesurée par la différence $\frac{1}{2}$ MV″² — $\frac{1}{2}$ MV′², correspondante au trapèze $dd'f'f$. Or MV′² et MV″² sont les *forces vives* possédées par le corps au commencement et à la fin de l'intervalle de temps pour lequel on considère le travail de la force ; c'est donc encore l'*accroissement* de la force vive, ou la force vive *communiquée et acquise* dans cet intervalle ; de sorte que le principe ci-dessus peut s'appliquer à deux instants quelconques du mouvement d'un corps. C'est-à-dire que

La quantité de travail, dépensée par une force motrice quelconque qui agit directement dans le sens du mouvement d'un corps, a, dans tous les cas, pour mesure la moitié de la force vive communiquée ou acquise par le corps, entre les instants où l'on considère ce travail.

C'est aussi évidemment la mesure même du travail consommé par l'inertie du corps (130), ou qu'elle développe, en sens contraire, contre l'action de la force motrice.

137. *Cas où la force motrice est opposée au mouvement du corps.* On remarquera que ce qui précède suppose que la vitesse du corps augmente sans cesse ; s'il en était autrement, ce serait un signe que la force motrice serait opposée au mouvement ou serait *résistrice ;* de sorte qu'elle agirait alors comme une véritable *résistance* (58). Du reste, tous nos raisonnements demeureraient encore applicables, et l'on trouverait que la quantité de travail ou d'action développée par cette résistance, toujours égale et directement contraire à la force d'inertie devenue *puissance,* serait, pour un certain intervalle de temps pendant lequel la vitesse antérieurement acquise V′ aurait été réduite à V″, par exemple, égale à $\frac{1}{2}$ (MV′² — MV″²) ou à la moitié de la force vive qui a été perdue ou *détruite.*

Ainsi la diminution de la force vive d'un corps entre deux instants suppose qu'une quantité de travail ou d'action, égale à la moitié de cette diminution, a été développée par l'inertie de ce corps contre des obstacles ou des résistances, comme son augmentation suppose, de la part d'une puissance, une consommation de travail égale à la moitié de cette augmentation ; principe qu'on peut énoncer généralement ainsi :

La perte ou le gain de force vive éprouvés par un corps, entre deux instants quelconques, a pour mesure le double de la quantité de travail développée par l'inertie de ce corps ou par la force motrice égale et directement contraire.

138. *Transformation du travail en force vive et réciproquement.* On voit clairement maintenant comment, en général, l'inertie de la matière sert à transformer le travail en force vive et la force vive en travail ; ou, pour nous exprimer comme nous l'avons fait précédemment (124), à l'occasion du mouvement vertical des corps pesants, on voit que l'inertie sert à *emmagasiner* le travail des moteurs en le convertissant en force vive, et à le *restituer intégralement* ensuite, lorsque cette force vive vient à être détruite contre des résistances.

Les arts industriels nous offrent une infinité de circonstances où ces transformations successives s'opérent par le moyen des machines, des outils, etc. L'eau renfermée dans le réservoir d'un moulin représente une certaine quantité de travail *disponible*, qui se change en force vive quand on ouvre la *vanne* de retenue ; à son tour, la force vive acquise par cette eau, en vertu de sa chute du réservoir, se change en une certaine quantité de travail quand elle agit contre la roue du moulin, et celle-ci transmet ce travail aux meules, etc., qui confectionnent l'ouvrage. — L'air refoulé dans le réservoir d'un fusil à vent représente la valeur mécanique du travail dépensé, par un certain moteur, pour l'y emprisonner (98) ; en lâchant la détente, l'air chasse la balle et convertit une certaine portion de ce travail en force vive : si la balle est lancée contre un ressort ou un corps élastique quelconque retenu par un obstacle, ce ressort va se bander, se comprimer en opposant une résistance, de plus en plus forte (97), égale et contraire à la force d'inertie de la balle, et qui finit par éteindre le mouvement quand la quantité de travail développée par la résistance du ressort atteint une valeur égale à la moitié de la force vive que possédait la balle. Le ressort étant maintenu, à cet instant, par un moyen quelconque, la force vive s'y trouvera emmagasinée ou convertie en quantité de travail disponible, de la même manière que s'il avait été bandé par une force motrice quelconque (97) ; si donc on vient à supprimer l'obstacle qui maintient le ressort dans sa dernière position, ou si on le laisse réagir immédiatement contre la balle, celle-ci sera

lancée, en sens contraire, avec une vitesse telle que la force vive qu'elle acquerra sera le double de la quantité d'action ou de travail restituée, par le ressort, dans son débandement (136).

139. *Restitution et consommation de la force vive dans le choc des corps.* Si on suppose que le ressort soit parfaitement élastique, la vitesse transmise à la balle sera précisément égale à celle que le fusil à vent lui avait d'abord imprimée dans une direction contraire; car le travail développé dans le débandement sera aussi égal (97) à celui qui, d'abord, a été emmagasiné, etc. Ainsi, dans l'exemple dont il s'agit, la *quantité de travail* a été alternativement changée en *force vive*, et la *force vive* en *quantité de travail*, sans qu'il y ait eu rien de perdu ni de gagné. Mais, si le ressort n'est pas parfaitement élastique, une portion de la force vive imprimée à la balle, sera employée (103) à détruire les forces moléculaires de ce ressort.

Ainsi, dans le choc des corps non parfaitement élastiques, il y a toujours une perte de quantité de travail, mesurée par la moitié de la force vive détruite. Presque tous les corps étant dans ce cas, et la quantité de travail consommée inutilement par les forces moléculaires étant comparable à celle que développe l'inertie pendant que les corps se compriment, on voit que, si la masse de ces corps et la vitesse en vertu de laquelle leur choc s'opère, est considérable, il y aura eu, dans un très-petit temps, une grande perte de quantité d'action; et voilà pourquoi, comme nous l'avons déjà observé (96), il faut surtout éviter les chocs dans le mouvement des machines industrielles. Au surplus, nous reviendrons bientôt sur ce sujet, dont l'examen circonstancié ne serait pas ici à sa place, et dérangerait l'ordre naturel des idées.

140. *Réflexions nouvelles sur l'impossibilité d'augmenter le travail mécanique.* On voit encore, par tout ce qui précède, qu'il est aussi impossible de se servir de la force de ressort que de celle de la gravité (120) pour imprimer à un corps une vitesse plus grande que celle qu'il possédait primitivement, ou pour augmenter le travail quelconque d'une puissance; et qu'au contraire, cette vitesse restituée sera toujours moindre que la vitesse primitive. Mais, comme la portion de vitesse ou de force vive, détruite dans le choc, a été employée réellement à vaincre certaines résistances moléculaires,

et par conséquent à produire un certain travail, nous avons pu dire ci-dessus (138) que la force d'inertie restitue *intégralement* la quantité de travail qui a été dépensée pour la mettre en jeu : seulement il arrive ici qu'une portion de ce travail est, dans certains cas, *étrangère* à l'ouvrage qu'il s'agit réellement de produire, ou n'est point considérée comme faisant partie de l'*effet utile*, ainsi qu'il a déjà été expliqué généralement (104), à l'occasion des autres forces motrices.

141. *Examen particulier du mouvement périodique.* Nous venons de montrer, par des exemples, comment la quantité de travail peut être transformée alternativement en force vive, et la force vive en travail par le moyen des ressorts et des machines qui les emmagasinent et les restituent successivement. Ces transformations se présentent, en général, toutes les fois que le mouvement d'un corps, sollicité par une puissance motrice, est, par sa liaison avec d'autres corps, contraint de varier à chaque instant, de manière à devenir tantôt accéléré et tantôt retardé; genre de mouvement que nous avons déjà examiné et défini en lui-même (49), et qui se rencontre spécialement dans les pièces des machines qui *oscillent*, qui *vont et viennent* entre deux positions extrêmes qu'elles ne peuvent dépasser, et pour lesquelles leur vitesse devient nulle forcément en changeant de direction. Le mouvement des scies, des rabots, des limes, des pistons de pompe et de la plupart des outils employés dans les arts manuels est évidemment dans ces cas.

Or, lorsque la vitesse du corps augmente, ce qui arrive nécessairement au commencement de chaque *période* ou *alternation*, c'est un signe (136) qu'une certaine portion du travail du moteur agit dans le sens du mouvement pour accroître la force vive d'une quantité égale au double de cette portion; le surplus du travail étant absorbé par les autres résistances. Lorsque, au contraire, la vitesse du corps vient à ralentir vers la fin de chaque période, c'est un signe (137) qu'une certaine portion de la force vive précédemment acquise, a été dépensée, contre les mêmes résistances, pour augmenter le travail du moteur d'une quantité égale à la moitié de cette portion, et ainsi de suite selon le nombre des alternatives du mouvement.

Comment se comporte l'inertie dans ce mouvement. On voit, d'après cela, que, quand la vitesse ou la force vive d'un corps oscille

entre certaines limites, c'est une preuve que l'inertie absorbe et restitue successivement des portions du travail de la puissance, qui sont égales pour tous les instants où la vitesse est redevenue la même ; c'est-à-dire que, dans l'intervalle de deux quelconques de ces instants, il n'y a eu rien de perdu ni de gagné, et que la puissance doit être considérée comme ayant été entièrement employée à vaincre les résistances autres que l'inertie. Mais, si dans un intervalle de temps quelconque, la vitesse, après avoir subi également des alternatives de grandeur, ne redevient pas ce qu'elle était d'abord, la moitié de la différence des forces vives qui répondent à la fin et au commencement de cet intervalle, mesure (136 et 137) la quantité de travail qui a été réellement consommée ou restituée par l'inertie du corps. Par conséquent, si le corps était parti du *repos*, la quantité de travail consommée, par l'inertie, à un instant quelconque, serait mesurée seulement par la moitié de la force vive acquise à cet instant.

142. *Démonstration des mêmes choses par la Géométrie.* On remarquera que tous les raisonnements qui précèdent peuvent être reproduits directement à l'aide de la fig. 34 ci-dessus, et des considérations du n° 136. Car, lorsque la vitesse du corps diminue après avoir augmenté pendant un certain temps, il en est de même de l'abscisse et de l'ordonnée de la droite Of, qui représentent cette vitesse : ainsi l'ordonnée ff', par exemple, après s'être éloignée de l'origine jusqu'à un certain point, en *balayant des aires triangulaires* Oaa', Obb'....Off', proportionnelles à la quantité de travail absorbée par l'inertie, ou à la moitié de la force vive acquise par le corps, se rapproche ensuite de cette même origine, en soustrayant, de la plus grande aire ou du plus grand triangle Off', des surfaces trapézoïdes $ff'e'e$, $ee'd'd$,.... qui diminuent, de plus en plus, l'aire de ce triangle relatif à la plus grande force vive ; de sorte que, l'ordonnée étant arrivée au point O, qui correspond à une vitesse nulle, le travail absorbé par l'inertie sera également nul. Si ensuite la vitesse augmente de nouveau, le travail consommé par l'inertie croîtra, comme dans la première période, de quantités mesurées, à chaque instant, par l'aire du triangle qui correspond à la vitesse acquise à cet instant ; et ainsi de suite alternativement.

Enfin, si on considère le mouvement entre deux instants quelconques pour lesquels la vitesse serait représentée par bb' et ee',

par exemple, il est bien clair, d'après nos raisonnements, que le travail absorbé ou développé par l'inertie, sera mesuré par l'aire du trapèze *bb'e'e* formé sur ces vitesses, et sur leur accroissement ou leur diminution *be*.

143. *Exemples particuliers relatifs au mouvement périodique.* Une voiture qui chemine avec une vitesse, tantôt plus grande, tantôt plus petite, offre l'exemple de ce que nous venons de dire : d'abord les chevaux dépensent une certaine quantité de travail pour la mettre en mouvement au pas ou au trot ; puis, lorsque la vitesse de la voiture vient à ralentir par suite de l'augmentation des résistances, ou de la diminution d'action des chevaux, cette même inertie développe contre ces résistances une portion du travail qu'elle avait d'abord absorbée, et qui est égale à la moitié de la diminution qu'a éprouvée la force vive. Si on suppose que les choses continuent ainsi alternativement, et qu'à la fin la voiture soit remise au repos, la quantité de travail restituée par l'inertie se trouvera précisément être égale à la quantité de travail même qu'elle a consommée d'abord ; de sorte qu'en réalité, il n'y aura rien eu de perdu. Il est entendu d'ailleurs que les diminutions de vitesse, éprouvées par la voiture, ne proviennent pas du fait même des chevaux, comme cela arrive quelquefois dans les descentes rapides où on les fait *retenir*, ni de ce qu'on aurait *enrayé* les roues, puisqu'alors ces chevaux ou l'*enrayure* auraient servi à augmenter les véritables résistances, et à consommer la force vive d'abord acquise, sans utilité immédiate pour l'objet du transport.

Lorsqu'un moteur est employé à élever verticalement des fardeaux, il prend le corps au repos ; de là une consommation de travail pour vaincre l'inertie de ce corps, et l'amener à un certain état de mouvement ; arrivé à la hauteur voulue, le moteur ralentit sa propre vitesse pour remettre de nouveau le corps au repos. Dans ce ralentissement, la force vive acquise par le corps est employée à détruire une portion de l'effet de la pesanteur sur ce même corps, ou plutôt elle sert à l'élever verticalement d'une certaine hauteur ; c'est ce qu'on aperçoit très-bien, en effet, dans les mouvements d'ascension tant soit peu rapides ; ainsi donc l'inertie a réellement rendu ce qu'elle avait absorbé primitivement.

Les mêmes réflexions peuvent être appliquées encore au travail du limeur, du scieur, etc., puisqu'à la fin de chaque oscillation

de l'outil, la vitesse devient nulle comme elle était au commencement.

On remarquera que, dans tous les exemples qui précèdent, le mouvement est censé naître ou s'éteindre par degrés insensibles, c'est-à-dire lentement et sans secousses, de sorte que les pertes de force vive, qui proviennent de la réaction mutuelle des parties qui communiquent ou reçoivent ce mouvement (95 et suiv.) sont réellement inappréciables. Mais il n'en serait pas ainsi du cas où, la vitesse changeant brusquement à la fin et au commencement de chaque période, il y aurait choc entre corps non parfaitement élastiques, ainsi qu'il arrive dans certaines dispositions vicieuses des pièces qui entrent dans la composition des machines; et l'on ne doit pas oublier qu'alors une portion, plus ou moins notable (139), de la force vive, peut être employée inutilement à détruire la force d'agrégation des molécules, ou à changer la forme des corps qui se choquent.

144. *Du rôle que joue l'inertie dans divers procédés des arts.* Afin de donner une idée plus complète encore du rôle que joue l'inertie des corps dans les travaux industriels, et de montrer comment elle peut servir à expliquer une infinité de procédés des arts, nous allons ajouter quelques exemples à tous ceux qui ont été rapportés jusqu'à cette heure.

Pour faire sortir le ciseau d'une varlope, l'ouvrier frappe le bois sur le derrière; en imprimant ainsi brusquement de la vitesse à ce bois, le ciseau et son coin résistent par leur inertie, ou ne cèdent qu'en partie au mouvement. — En frappant brusquement sur la douve qui porte la bonde d'un tonneau, on imprime à cette douve un mouvement très-rapide, auquel résiste cette bonde comme si elle était retenue fortement par la tête; en conséquence, elle est séparée de la douve, en vertu de sa seule inertie, avec un effort supérieur à celui qu'on pourrait obtenir par des moyens plus directs et cependant très-puissants : c'est à peu près de la même manière encore que les clous, les boulons d'assemblage, etc., sont arrachés par l'effet des chocs et des secousses. — On emmanche souvent un outil, par exemple un marteau, en frappant la queue du manche dans le sens de sa longueur; ce manche chemine, et l'inertie de la matière qui tend à maintenir le marteau au repos résiste au mouvement imprimé, de la même manière que si

ce marteau eût été réellement appuyé contre un obstacle fixe.

Voici encore quelques exemples de la manière dont l'inertie des corps sert à transformer le travail en force vive et la force vive en travail. — La *toupie*, lancée à terre, tourne et chemine en vertu de la force vive qui y a été primitivement accumulée par le déroulement accéléré de la ficelle, déroulement produit par le travail de la main qui tend cette ficelle tout en lançant la toupie. — Le *diable* est un autre exemple du moyen qu'on peut employer pour accumuler, de plus en plus, la force vive dans un corps mobile autour d'un axe horizontal. — Le jouet que les enfants nomment *tourniquet* reçoit d'abord sa vitesse par le déroulement du fil enveloppé autour de son axe et tiré rapidement avec la main; en vertu de l'inertie du *volant* placé sur cet axe, le mouvement continue et sert à enrouler le fil, en sens contraire, en le tirant avec un effort semblable à celui qu'a d'abord exercé la main : ce moyen peut même être employé dans les grandes machines pour transformer le travail des moteurs en force vive, puis la force vive en travail ordinaire. — On se sert avec avantage, dans les arts, du *tour à pédale* et *à ressort* pour les pièces légères et de petites dimensions, parce que l'inertie exerce alors peu d'influence et que les *alternations*, les changements de direction du mouvement, s'opèrent sans secousses et sans danger pour les différentes pièces : mais l'emploi de ce tour aurait des inconvénients fort graves pour les grosses pièces et surtout pour les pièces de métal; c'est ce qui fait qu'alors on substitue à ce tour, le *tour à mouvement de rotation continu* ou qui chemine toujours dans le même sens.

145. *Observations sur ces exemples.* Nous engageons le lecteur à méditer attentivement ces divers exemples, que nous ne faisons en quelque sorte qu'indiquer, et d'en agir de même à l'égard de tous ceux que la pratique des arts pourrait offrir à ses méditations : ils serviront à lui bien faire concevoir comment l'inertie de la matière se comporte, tantôt comme une simple résistance, tantôt comme une véritable puissance, absolument de la même manière que la pesanteur des corps et les ressorts élastiques (97 et 102).

Au surplus, nos derniers exemples concernent principalement l'inertie des pièces qui ont un mouvement de rotation, et tout ce que nous avons dit jusqu'à présent de la force vive, est uniquement (130 et suiv.) relatif au mouvement de transport des corps, dont les

de l'outil, la vitesse devient nulle comme elle était au commencement.

On remarquera que, dans tous les exemples qui précèdent, le mouvement est censé naître ou s'éteindre par degrés insensibles, c'est-à-dire lentement et sans secousses, de sorte que les pertes de force vive, qui proviennent de la réaction mutuelle des parties qui communiquent ou reçoivent ce mouvement (95 et suiv.) sont réellement inappréciables. Mais il n'en serait pas ainsi du cas où, la vitesse changeant brusquement à la fin et au commencement de chaque période, il y aurait choc entre corps non parfaitement élastiques, ainsi qu'il arrive dans certaines dispositions vicieuses des pièces qui entrent dans la composition des machines; et l'on ne doit pas oublier qu'alors une portion, plus ou moins notable (139), de la force vive, peut être employée inutilement à détruire la force d'agrégation des molécules, ou à changer la forme des corps qui se choquent.

144. *Du rôle que joue l'inertie dans divers procédés des arts.* Afin de donner une idée plus complète encore du rôle que joue l'inertie des corps dans les travaux industriels, et de montrer comment elle peut servir à expliquer une infinité de procédés des arts, nous allons ajouter quelques exemples à tous ceux qui ont été rapportés jusqu'à cette heure.

Pour faire sortir le ciseau d'une varlope, l'ouvrier frappe le bois sur le derrière; en imprimant ainsi brusquement de la vitesse à ce bois, le ciseau et son coin résistent par leur inertie, ou ne cèdent qu'en partie au mouvement. — En frappant brusquement sur la douve qui porte la bonde d'un tonneau, on imprime à cette douve un mouvement très-rapide, auquel résiste cette bonde comme si elle était retenue fortement par la tête; en conséquence, elle est séparée de la douve, en vertu de sa seule inertie, avec un effort supérieur à celui qu'on pourrait obtenir par des moyens plus directs et cependant très-puissants : c'est à peu près de la même manière encore que les clous, les boulons d'assemblage, etc., sont arrachés par l'effet des chocs et des secousses. — On emmanche souvent un outil, par exemple un marteau, en frappant la queue du manche dans le sens de sa longueur; ce manche chemine, et l'inertie de la matière qui tend à maintenir le marteau au repos résiste au mouvement imprimé, de la même manière que si

ce marteau eût été réellement appuyé contre un obstacle fixe.

Voici encore quelques exemples de la manière dont l'inertie des corps sert à transformer le travail en force vive et la force vive en travail. — La *toupie*, lancée à terre, tourne et chemine en vertu de la force vive qui y a été primitivement accumulée par le déroulement accéléré de la ficelle, déroulement produit par le travail de la main qui tend cette ficelle tout en lançant la toupie. — Le *diable* est un autre exemple du moyen qu'on peut employer pour accumuler, de plus en plus, la force vive dans un corps mobile autour d'un axe horizontal. — Le jouet que les enfants nomment *tourniquet* reçoit d'abord sa vitesse par le déroulement du fil enveloppé autour de son axe et tiré rapidement avec la main; en vertu de l'inertie du *volant* placé sur cet axe, le mouvement continue et sert à enrouler le fil, en sens contraire, en le tirant avec un effort semblable à celui qu'a d'abord exercé la main : ce moyen peut même être employé dans les grandes machines pour transformer le travail des moteurs en force vive, puis la force vive en travail ordinaire. — On se sert avec avantage, dans les arts, du *tour à pédale* et *à ressort* pour les pièces légères et de petites dimensions, parce que l'inertie exerce alors peu d'influence et que les *alternations*, les changements de direction du mouvement, s'opèrent sans secousses et sans danger pour les différentes pièces : mais l'emploi de ce tour aurait des inconvénients fort graves pour les grosses pièces et surtout pour les pièces de métal; c'est ce qui fait qu'alors on substitue à ce tour, le *tour à mouvement de rotation continu* ou qui chemine toujours dans le même sens.

145. *Observations sur ces exemples.* Nous engageons le lecteur à méditer attentivement ces divers exemples, que nous ne faisons en quelque sorte qu'indiquer, et d'en agir de même à l'égard de tous ceux que la pratique des arts pourrait offrir à ses méditations : ils serviront à lui bien faire concevoir comment l'inertie de la matière se comporte, tantôt comme une simple résistance, tantôt comme une véritable puissance, absolument de la même manière que la pesanteur des corps et les ressorts élastiques (97 et 102).

Au surplus, nos derniers exemples concernent principalement l'inertie des pièces qui ont un mouvement de rotation, et tout ce que nous avons dit jusqu'à présent de la force vive, est uniquement (130 et suiv.) relatif au mouvement de transport des corps, dont les

diverses parties sont animées de la même vitesse. Mais nous verrons plus tard que les principes qui précèdent, sur la force vive et le travail mécanique, peuvent s'étendre à tous les cas, et nous apprendrons même à calculer rigoureusement la valeur de ce travail, de cette force vive, quel que soit le mouvement d'un corps ou d'une machine. Pour le moment, il nous suffira de donner une série d'applications, en nombres, relatives au mouvement de transport parallèle, afin de faire apprécier, à sa juste valeur, l'influence de l'inertie dans les travaux industriels, et de montrer l'exactitude, l'utilité des principes de la Mécanique, dans les questions variées que présente la pratique des divers arts.

Ces applications doivent être considérées, par nos lecteurs, comme une partie essentielle de ce Cours, et comme un exercice indispensable pour bien saisir le but et l'esprit des vérités fondamentales de la science. Il s'en présentera, par la suite, un grand nombre d'autres très-importantes; mais, avant de les exposer, il sera nécessaire d'entrer plus avant dans l'étude des lois du mouvement et de l'action des forces; car, dans toute cette première partie, nous supposons constamment les choses ramenées à cet état final de simplicité où des forces, quoique variables à chaque instant, en direction et en intensité, exercent néanmoins leurs actions réciproques suivant une droite qui est unique pour ce même instant, et qui se confond avec la direction propre du chemin décrit par le point d'application où on suppose, en quelque sorte, ces actions et le mouvement des corps concentrés. Les principes subséquents montreront d'ailleurs comment cette supposition, jusque-là gratuite, est rigoureusement permise.

FIN DES PRÉLIMINAIRES.

APPLICATIONS,

EXERCICES ET DÉVELOPPEMENTS DIVERS.

QUESTIONS CONCERNANT L'INERTIE ET LA FORCE VIVE.

146. *Travail nécessaire pour vaincre l'inertie d'une voiture.* Considérons une voiture de roulier cheminant sur une route horizontale; supposons qu'elle pèse, en tout, 10000 kil., et qu'elle doive être mise en mouvement, par des chevaux, avec une vitesse moyenne (49) de 1^m par seconde; la consommation de travail pour vaincre, dans les premiers instants, son inertie indépendamment des autres résistances, sera (136) $\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 = \frac{1}{2}\frac{10000}{9,81} \times 1^m \times 1^m = 510^{km}$,

puisque nous avons $P = 10000^k$, $V = 1^m$, $g = 9^m,81$ environ.

Or on sait, par expérience, qu'un bon cheval de roulier, marchant régulièrement huit heures par jour, en 2 relais et avec la vitesse du pas ordinaire qui est d'environ 1^m par seconde, développe *moyennement* (81), un travail d'au moins 70^{km} dans chacune de ces secondes. Si donc il y en avait huit, de cette force, attelés à la voiture, ils donneraient au moins 560^{km} dans le même temps; de sorte que le travail que devraient dépenser les chevaux, pour mettre cette voiture en mouvement dans les premiers instants, ne serait pas même égal à celui qu'ils peuvent développer, d'une manière soutenue et par seconde, quand la voiture chemine régulièrement; d'où l'on voit le peu d'influence exercée alors par l'inertie propre d'une aussi grande masse.

Si la voiture devait aller avec la *vitesse du trot*, qui est de 2^m environ par seconde, alors le travail absorbé par l'inertie serait $510 \times 2 \times 2 = 2040^{km}$, c'est-à-dire quadruple; si elle devait aller *au galop ordinaire* de 4^m par seconde, la consommation de

travail serait $510 \times 4 \times 4 = 8160^{km}$, c'est-à-dire 16 fois celle qui répond à la vitesse de 1^m.

On voit, par là, que le travail nécessaire pour vaincre l'inertie dans les premiers instants, augmente très-rapidement avec la vitesse imprimée à la voiture; ce qui tient à ce que la force vive croît elle-même *comme le carré* de cette vitesse.

147. *Temps nécessaire pour imprimer le mouvement à la voiture.* Il est essentiel de remarquer qu'on ne peut rien inférer, de ce qui précède, relativement à la durée du temps qu'emploient les chevaux pour mettre effectivement la voiture en mouvement à partir du repos. Car, d'un côté, nous avons fait abstraction de la résistance du terrain et des divers frottements, et, de l'autre, il peut bien arriver que la voiture acquière, au bout de la première seconde et sous l'effort réuni des huit chevaux, une vitesse qui soit plus petite ou plus grande, par exemple, que celle de 1^m considérée dans le premier des cas ci-dessus : cela dépend principalement de l'intensité absolue de cet effort (129 et suiv.) dans chaque instant infiniment petit.

Pour mettre la chose dans tout son jour, nous supposerons que l'effort des huit chevaux soit seulement de 560 kil., c'est-à-dire égal à celui qui répond à l'allure du pas ordinaire, et qu'au lieu de varier, comme cela arrive effectivement au moment du départ, il demeure constamment le même; on trouvera facilement, d'après la formule $V_1 = \frac{F}{M} = \frac{g.F}{P}$ des n^os^ 132 et 134, la valeur de la vitesse qui serait transmise, par cet effort, au bout de la première seconde de temps écoulé. Car nous avons ici, $F = 560^{kil}$, $M = \frac{P}{g} = \frac{10000^{kil}}{9^m,81} = 1020$ environ; et la vitesse cherchée $V_1 = \frac{F}{M} = 0^m,549$: cette vitesse est loin d'égaler un mètre; mais aussi le chemin décrit et le travail développé, par les chevaux, pendant la première seconde de temps, sont bien moindres que 1^m et 560^{km}. En effet, nous savons que le chemin, décrit au bout de la première seconde sous l'action d'une force constante (110), est égal à la moitié de la vitesse acquise à la fin de cette seconde; c'est-à-dire qu'il est ici $\frac{1}{2}\ 0^m,549 = 0^m,275$,

de sorte que les chevaux n'ont réellement développé, dans la supposition ci-dessus, qu'une quantité de travail de $560^k \times 0^m,275 = 154^{km}$, sous l'effort des 560 kil., censé constant.

Pour développer réellement, dans la première seconde, la quantité de travail qui répond à la vitesse de 1^m acquise par la voiture, il faudrait que les chevaux exerçassent, à partir du repos, un effort constant qu'on trouvera au moyen de la relation $F = MV_1$; car ici V_1 doit être égal à 1^m, et par conséquent $F = MV_1 = 1020$ kil.; ce qui donne, pour chaque cheval, $\frac{1}{8}\,1020 = 127^k,5$. Or on sait, par expérience, que l'effort d'un cheval ordinaire, contre un obstacle qui cède peu au mouvement, peut être beaucoup plus grand et surpasser même 350 kil.; d'où il résulte qu'en réalité, nos huit chevaux mettraient beaucoup moins d'une seconde de temps à imprimer la vitesse d'un mètre à la voiture, s'ils n'avaient pas à vaincre, en outre de l'inertie, la résistance du terrain, des essieux, etc.

148. *Observation générale sur le travail des moteurs.* Ce que nous venons de dire du travail des chevaux, dans les premiers instants du mouvement de la voiture, s'applique, comme on le verra plus tard, généralement à tous les moteurs : l'effort qu'ils exercent sur les corps est d'autant plus grand que leur vitesse est moindre, et il diminue, d'une manière plus ou moins sensible, à mesure que la rapidité du mouvement augmente, jusqu'à devenir tout à fait nul quand enfin la vitesse égale la plus grande vitesse que ces moteurs peuvent s'imprimer ou acquérir par le développement libre et complet de toute leur activité. C'est ainsi, par exemple, qu'un homme, un cheval qui courraient ou se mouvraient, d'une manière quelconque, avec toute la vitesse qu'ils peuvent prendre, ne seraient susceptibles (86 et suiv.) d'aucun effort extérieur un peu soutenu.

On peut donc déjà prévoir que, pour toute espèce de moteur, il existe un degré de vitesse qui est le plus avantageux possible sous le rapport du travail produit, puisque ce travail devient sensiblement nul (90) dans les deux cas extrêmes dont il s'agit. Mais c'est ce qui sera démontré plus clairement, par la suite, quand nous en viendrons à examiner les conditions du *maximum* d'effet, relatives à chacun des moteurs en usage dans l'industrie manufacturière.

149. *Exemples relatifs à la force vive des fardeaux et des eaux courantes des rivières.* Supposons qu'un moteur soit employé à élever,

à une certaine hauteur verticale, un poids de 5000 kil., soit directement, soit par l'intermédiaire d'une machine quelconque, et que la vitesse du mouvement, à l'instant où elle est la plus grande (143), soit de $0^m,3$ par seconde, ce qui est déjà une vitesse considérable pour un si lourd fardeau ; le travail consommé par l'inertie, avant l'instant où ce degré de vitesse est acquis, aura pour valeur $\frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 = \frac{1}{2}\frac{5000^k}{9,81} \times 0,09 = 23^{km}$ environ. Si le moteur devait élever seulement le fardeau à 1^m de hauteur, il dépenserait $5000^k \times 1^m = 5000^{km}$, c'est-à-dire, au moins 210 fois le travail qui est nécessaire pour vaincre l'inertie dans les premiers moments ; encore arriverait-il que cette inertie restituerait (143), dans le ralentissement du fardeau vers le haut de sa course, le travail qu'elle avait primitivement absorbé.

Considérons encore le mouvement des eaux d'une rivière, telle que la Moselle, par exemple : on sait qu'à Metz, en particulier, elle fournit, même dans les grandes sécheresses, au moins 10 mètres cubes d'eau par chaque seconde, dont le poids (34) est environ 10000 kil. Or cette eau coule naturellement, soit au-dessous, soit au-dessus de la ville et dans les endroits où il n'existe pas de barrages ni d'obstacles, avec une vitesse qu'on a mesurée et qui est moyennement de $0^m,80$ par seconde ; donc la force vive du volume de fluide qui passe par chacun de ces endroits, dans une seconde de temps, est $\frac{10000^k}{9^m,81} \times 0^m,8 \times 0^m,8 = 652^{km}$ environ ; ce qui répond à une quantité de travail disponible (136 et suiv.) égale à $\frac{1}{2}\,652 = 326^{km}$, c'est-à-dire (82), d'environ $4\frac{1}{3}$ chevaux-vapeur, et qu'on pourrait utiliser directement contre une roue de moulin, etc. Mais si, au lieu de se servir de la vitesse possédée par l'eau dans son lit naturel, on construit des barrages ou digues, comme on l'a fait à Metz, on pourra élever son niveau et l'obliger à descendre, du haut de ces barrages, pour opérer sur les machines par son poids ou de toute autre manière : si, par exemple, le barrage fait élever ce niveau de $2^m,5$ seulement, comme cela a effectivement lieu dans certaines parties de la ville, la quantité de travail disponible, répondant aux mêmes 10^{mc} d'eau et qu'ils pourraient fournir, dans chaque seconde, par leur descente de la hauteur de $2^m,5$, sera égale

à $10000^k \times 2^m,5 = 25000^{km} = 333\frac{1}{3}$ chevaux-vapeur; quantité qui est, comme on voit, presque 77 fois plus grande que celle qu'on obtiendrait en utilisant simplement la force vive naturelle des eaux de la rivière. Or cela explique suffisamment l'utilité des barrages artificiels dans la pratique des usines hydrauliques.

150. *Exemples relatifs à l'art de lancer l'eau à distance.* Nous venons de montrer comment le mouvement acquis d'une certaine masse d'eau, qui coule et se renouvelle constamment dans chaque seconde, représente une quantité de travail mécanique qu'on peut immédiatement calculer en chevaux de machines à vapeur; recherchons, à l'inverse, combien il faudrait de ces chevaux pour imprimer continuellement une vitesse donnée à un certain volume d'eau qui devrait être extrait d'un bassin ou réservoir quelconque où le liquide est en repos. Ce problème trouve son application particulière dans le jeu des pompes à incendie, où il s'agit de lancer, sur des parties embrasées d'un édifice et d'une certaine distance, un volume d'eau qui suffise pour éteindre le feu, et dont la vitesse de projection doit ainsi être d'autant plus grande que le trou ou l'*orifice* par lequel sort l'eau, se trouve à une distance plus considérable du but qu'on veut atteindre. Supposons, par exemple, qu'il faille lancer cette eau par l'orifice, avec une vitesse uniforme de 15^m par seconde, et qu'il doive en arriver continuellement, sur le lieu de l'incendie et dans chaque seconde de temps, un volume de 6 litres pesant 6 kil.; la force vive à imprimer, dans ce même temps, sera donc égale à

$\frac{6^k \times (15)^2}{9,81} = 137,6$ environ, dont la moitié $68^{km},80$ mesurera la quantité de travail nécessaire pour imprimer le mouvement à l'eau. Ce travail devant se reproduire dans chaque seconde, nécessitera, comme on voit, la force de $\frac{4}{3}\,0,688 = 1,03$ de cheval-vapeur environ : mais il est clair qu'il faudrait en appliquer davantage au balancier de la pompe, attendu les frottements et résistances de toute espèce, qui consommeraient, en pure perte (103), une portion notable du travail-moteur.

S'il s'agissait de lancer continuellement, ou dans chaque seconde, un volume d'eau de 40 litres avec la vitesse de 30^m, on trouverait, par les mêmes calculs, que le travail strictement nécessaire à dépenser serait de 1885^{km} par seconde; ce qui équivaut à une force

de 24 et $\frac{1}{2}$ chevaux-vapeur environ. On peut croire que, par l'intermédiaire d'une machine à pistons, analogue aux pompes à incendie, le moteur devrait développer le travail d'au moins 30 de ces chevaux ; c'est-à-dire, qu'il faudrait employer une machine à vapeur de cette force, au moins, pour mettre la pompe en mouvement et produire l'effet désiré.

On remarquera que la vitesse de l'eau, à sa sortie de l'orifice, et le volume qui s'en écoule uniformément dans chaque seconde de temps, étant donnés, les dimensions de cet orifice et la grosseur du jet à sa sortie, ne sont pas arbitraires, et doivent être calculées suivant les règles de l'hydraulique qui seront enseignées dans la seconde année de ce Cours. On trouve, par exemple, que, si l'orifice est percé dans une paroi plane et mince du réservoir, et qu'il soit à une distance convenable des parois latérales, son diamètre devra être d'environ 28 millim. dans le premier cas, et de 52 millim. dans le second.

151. *Observations particulières sur les jets verticaux et inclinés.* Au moyen de la formule $V^2 = 2gH$ du n° 118, qui donne $H = \frac{V^2}{2g}$, on trouvera sans peine, qu'avec la vitesse de 15 mètres, relative au premier cas, l'eau pourrait s'élever *verticalement* à la hauteur de $11^m,47$, qui est celle des étages supérieurs des maisons ordinaires, dans ce pays; et qu'avec la vitesse de 30^m qui répond au second cas, elle s'élèverait à une hauteur de $48^m,88$; mais, à cause de la résistance de l'air, le jet atteindrait véritablement des hauteurs un peu moindres. Il faudrait recourir à d'autres principes, que nous exposerons par la suite, pour calculer la distance et la hauteur auxquelles le jet parviendrait dans le cas où on lancerait l'eau sous une certaine inclinaison; néanmoins, comme il conviendrait peu alors de revenir sur les applications particulières qui font le sujet de cet article, et que non-seulement ces applications sont utiles pour apprécier les effets des pompes à incendie, mais qu'elles ont trait encore à des questions d'une haute importance pour la défense des places de guerre, nous ajouterons, en faveur des lecteurs qui voudraient approfondir de telles questions, quelques remarques qui ne seront peut-être pas sans utilité.

Nous avons vu (118), qu'il est impossible qu'une nappe d'eau

retombe, même d'une hauteur médiocre, sans se diviser en parties plus ou moins fines; or c'est un effet qu'on doit chercher à éviter quand on se propose de concentrer l'eau en masse sur un point déterminé. Car, non-seulement la divergence naturelle du mouvement des parties ainsi désunies augmentera avec le chemin parcouru dans la descente, de sorte que l'effet sera disséminé sur une grande surface; non-seulement la résistance de l'air aura alors (116) plus d'action pour retarder le mouvement et diminuer le chemin décrit; mais encore cet air absorbera ou s'appropriera, en vertu d'une de ses propriétés physiques bien connues, une portion beaucoup plus grande de la masse de l'eau; de sorte que, si le trajet doit être tant soit peu long, il pourra, dans certains cas, arriver que rien n'atteigne le but. Ces considérations prouvent donc qu'il est indispensable de diriger l'eau sous un angle tel que le sommet de la courbe qu'elle suit dans son mouvement s'élève très-peu au-dessus du point qu'on veut atteindre : la résistance de l'air ayant nécessairement peu de prise sur la portion ascendante du jet, on pourra la négliger, et calculer toutes les circonstances du mouvement, comme s'il avait lieu dans le vide, d'après les méthodes connues et que nous exposerons en leur lieu.

Dans le cas ci-dessus, par exemple, où la vitesse de l'eau, à son point de départ, est seulement de 30^m, on trouve que, la hauteur du but au-dessus de ce point étant de 15 mètres, la distance horizontale parcourue ou la *portée* atteindrait à peine 30 à 32 mètres; et que, si le but se trouvait de très-peu élevé au-dessus du point de départ, sa distance à ce point ne devrait pas surpasser de beaucoup 35^m, sans quoi la dispersion du fluide deviendrait considérable. Pour obtenir des portées plus grandes, doubles par exemple, il faudrait d'ailleurs augmenter la vitesse de projection de façon qu'elle fût de 42 mètres au lieu de 30; on trouverait alors que la force de la machine propre à lancer, dans chaque seconde, les 40 litres d'eau à cette distance, devrait être d'au moins 60 chevaux-vapeur; de sorte que, si on ne pouvait réellement disposer que de la moitié de cette force, il faudrait aussi se résoudre à ne lancer qu'un volume d'eau de 20 litres par seconde.

152. *Réflexions sur l'influence de l'inertie.* Les exemples qui précèdent donnent une idée de l'influence qu'exerce l'inertie des corps dans certains travaux industriels, et des cas où il est permis de la

négliger ainsi que les variations de la force vive : on voit bien, par exemple, que, dans le mouvement lent des corps, le travail que représente cette force vive, a, presque toujours, une valeur très-faible même pour des masses considérables; ce qui tient, ainsi que nous l'avons déjà dit, à ce que ce travail croît ou décroît comme le carré de la vitesse.

En général, lorsqu'un moteur est employé à faire mouvoir, pendant un certain temps, des corps ou machines quelconques pour produire du travail mécanique, ou pour vaincre des résistances autres que l'inertie propre de ces corps, on peut, sans inconvénient, ne pas tenir compte de cette inertie, toutes les fois que le mouvement sera constamment uniforme pendant la durée du travail, ou qu'il ne variera qu'entre des limites plus ou moins resserrées; car, dans l'un et dans l'autre cas, la dépense de travail, pour vaincre l'inertie, se réduira (141 et suiv.), une fois pour toutes, à celle qui répond à la différence des forces vives possédées par les corps au commencement et à la fin de l'action du moteur ; différence qui sera nulle toutes les fois que ce moteur prendra ou laissera les corps dans le même état de mouvement, et qui sera généralement une fraction très-faible du travail total, quand le mouvement sera longtemps continué.

N'oublions pas néanmoins que cela suppose expressément que les pièces, qui agissent les unes sur les autres pour communiquer le travail du moteur aux résistances, n'éprouvent point d'altérations intérieures ou moléculaires sensibles pendant le mouvement (103), et surtout qu'il n'y ait pas de chocs plus ou moins violents, plus ou moins répétés qui, presque toujours, entraînent de pareilles altérations (139).

Comme jusqu'ici nous n'avons parlé de la communication du mouvement par le choc que d'une manière générale, il convient de nous y arrêter quelques instants, et de montrer comment on peut, dans plusieurs des cas de la pratique, estimer, d'une manière suffisamment exacte, la perte de force vive qui en résulte et les circonstances particulières qui l'accompagnent.

DE LA COMMUNICATION DU MOUVEMENT PAR LE CHOC DIRECT DES CORPS.

153. *Considérations générales.* Quand deux corps, en mouvement, réagissent l'un sur l'autre par leurs vitesses acquises ou se choquent,

ils présentent en général plusieurs circonstances qui permettent de partager en trois époques distinctes la durée entière du phénomène : dans la 1re, les corps se compriment, se refoulent ou bien se tirent mutuellement s'ils sont liés entre eux par des traits, des barres non tendues avant le choc ; dans la 2me, leur déformation est devenue la plus grande possible, et ils ont nécessairement acquis la même vitesse aux points de leur action réciproque ; dans la 3me, enfin, les corps reviennent à leur forme primitive, et tendent, de plus en plus, à se séparer en vertu de l'énergie plus ou moins grande de leurs forces de ressort.

Comme les phénomènes du choc des corps se reproduisent, d'une manière analogue, dans tous les cas possibles, nous nous bornerons à étudier, avec quelques détails, l'un des plus simples d'entre eux, et qui se présente le plus fréquemment dans les applications de la Mécanique à l'industrie : c'est celui où un corps en repos est choqué par un autre corps déjà en mouvement ; il sera très-facile ensuite d'étendre les raisonnements à des cas plus compliqués ou présentant des circonstances différentes.

154. *Principe relatif au choc direct des corps.* Il ne peut être ici question encore que du *choc direct* des corps, c'est-à-dire de celui où deux corps (A) et (A'), fig. 35, réagissent continuellement l'un sur l'autre dans la direction propre de leurs mouvements, de telle sorte que la perpendiculaire ou normale AA', qui est commune à leur surface au point de contact T où se fait le choc, soit précisément la direction de la vitesse de chaque corps, et cela pour tous les instants de ce choc. C'est ce qui aurait lieu, par exemple, dans le cas où deux boules sphériques marcheraient *parallèlement à elles-mêmes* avant le choc, et de façon que leurs centres A, A' demeurassent continuellement sur une ligne droite LN. Or on peut établir, pour ce cas, un principe général qui demeure applicable, quels que soient et l'intensité et le sens du mouvement de chacun des corps aux divers instants du choc ; il suffit, pour cela, de se rappeler ce qui a été dit au n° 131.

En effet, il naîtra de la réaction mutuelle des deux corps, une force de pression mesurable, à chaque instant (63), par un certain nombre de kilogrammes, et qui agira, dans le sens de la droite AA', pour repousser le corps (A) de T vers L, et une autre force de pression égale et précisément contraire (64), qui agira pour re-

pousser le corps (A') de T vers N. Nommant donc F la valeur commune de ces forces à un instant quelconque du choc, v le petit degré de vitesse perdu ou gagné, au même instant, par le corps (A), v' celui que perd ou gagne le corps (A'), enfin P et M, P' et M', étant respectivement les poids et les masses des deux corps (A) et (A'), on aura, d'après le principe du n° 131,

$$Mv = M'v';$$

c'est-à-dire *que les quantités de mouvement, perdues ou gagnées par les deux corps, seront égales entre elles pour chaque instant infiniment petit du choc :* et la même égalité aura lieu aussi entre les quantités de mouvement totales imprimées, à chaque corps, entre deux instants quelconques de leur réaction mutuelle, c'est-à-dire entre les quantités de mouvement totales, soit perdues, soit gagnées par chaque corps en particulier.

155. *Du choc des corps pendant la compression.* Nous supposerons ici que le corps (A') était au repos à l'instant où l'autre (A) est venu le rencontrer avec une vitesse finie et précédemment acquise, que nous nommerons V; ces corps se comprimeront donc réciproquement en vertu de l'inertie de (A') qui tend à s'opposer au mouvement de (A), et, dès lors, la force de pression F agira pour diminuer, à chaque instant, la quantité de mouvement MV du premier corps, de quantités qui seront égales à celles qu'elle fera naître dans l'autre. Les choses continuant ainsi tant que (A) conservera, dans le sens de L vers N, une vitesse supérieure à (A'), on voit bien qu'il arrivera un instant où, la compression, la déformation des corps étant au *maximum*, ces corps auront acquis la même vitesse et marcheront, en quelque sorte, de *compagnie*, du moins pendant un très-petit instant.

156. *Vitesse des corps au moment de leur plus grande compression.* Nommons U la vitesse commune dont il s'agit, la quantité de mouvement gagnée ou acquise par (A') sera, au même instant, M'U, et celle qui a été perdue par (A) sera MV — MU, laquelle, d'après ce qui précède, devra être égale à la première M'U. La quantité de mouvement totale MV, primitivement possédée par le système des corps, se trouvant donc être augmentée, d'une part, et diminuée, de l'autre, de quantités égales, celle MU + M'U = (M + M')U

qui leur reste à l'instant dont il s'agit, sera aussi égale à la quantité de mouvement primitive MV ; de sorte qu'on aura

$$(M + M')\,U = MV;\ \text{d'où}\ U = \frac{MV}{M + M'}.$$

Ainsi, sans connaître la manière dont les corps se compriment et dont varie l'intensité de F à chaque instant du choc, on n'en peut pas moins calculer la vitesse qui a lieu à l'instant de la *plus grande compression : cette vitesse est égale à la quantité de mouvement possédée par* (A) *avant le choc, divisée par la somme des masses des deux corps.*

157. *Du choc pendant le retour des corps vers leur forme primitive.* La plupart des corps tendant à revenir (19 et 97), avec une énergie plus ou moins grande, vers leur forme primitive, quand ils ont été comprimés à un certain degré, on voit que les ressorts moléculaires vont, en se débandant, forcer (A) et (A′) à réagir de nouveau l'un sur l'autre, mais pour s'écarter mutuellement, ce qui tend nécessairement à augmenter le mouvement déjà acquis de (A′), et à diminuer au contraire, de plus en plus, celui de (A) ; et, comme l'action est toujours égale à la réaction, il est clair, d'après ce qui précède (154) que les quantités de mouvement gagnées par (A′) seront sans cesse égales à celles qui sont perdues par (A). Les choses continuant ainsi tant que la force de réaction F n'est pas nulle, on voit bien qu'il pourra arriver un instant où la quantité de mouvement MV, primitivement possédée par (A), soit entièrement détruite, après quoi la force F, qui continue à repousser ce corps, lui imprimera, en sens contraire, un mouvement de plus en plus rapide, et qui ne cessera d'augmenter que quand F sera nulle ; ce qui arrivera nécessairement à l'instant où les deux corps, ayant pris une forme telle qu'ils puissent la conserver naturellement sans qu'aucune force extérieure leur soit appliquée, se sépareront, l'un de l'autre, en vertu de leurs vitesses respectivement acquises.

158. *Du mouvement des corps après le choc.* Il est clair, d'après ce qui précède, que ce mouvement ne peut, en général, se calculer, puisque nous ne connaissons pas non plus, en général, la loi que suivent les forces de compression F pendant la réaction des corps. Cependant le calcul est possible dans deux circonstances principales qui servent comme de limites à toutes les autres, et qui répondent,

l'une, au cas où les corps seraient entièrement privés d'élasticité, l'autre, au cas où, au contraire, ils seraient parfaitement élastiques.

Premier cas, des corps non élastiques. Nous avons vu (17) qu'il n'existe réellement pas de corps qui soient entièrement privés d'élasticité, ou qui ne tendent, jusqu'à un certain point, à retourner vers leur forme primitive, quand ils ont été comprimés. Toutefois on doit remarquer que, non-seulement les corps mous, les liquides, etc., sont extrêmement peu élastiques quand ils ne sont pas maintenus, dans tous les sens, par des enveloppes solides; mais qu'aussi la plupart des corps, qu'on regarde comme plus ou moins élastiques, peuvent perdre entièrement (20) cette élasticité par suite de la grande compression, de la grande déformation qu'ils éprouvent pendant le choc; or, pourvu qu'ils ne se divisent, ne se rompent ou ne se séparent pas à l'instant de la plus grande compression, ils continueront à *cheminer ensemble*, en vertu de leur vitesse acquise, sans réagir désormais l'un sur l'autre; de sorte que cette vitesse sera donnée, par la formule ci-dessus, toutes les fois que l'un des corps se trouvera au repos à l'instant où le choc arrive.

Deuxième cas, des corps parfaitement élastiques. Toutes les fois que les corps seront suffisamment élastiques pour revenir exactement à leur forme primitive, après l'instant de la plus grande compression, la force de réaction F reprenant, dans le débandement des corps, les mêmes valeurs (97) pour les mêmes positions relatives de ces corps, il est clair que les vitesses imprimées ou détruites seront précisément égales à celles qui l'ont été pendant la compression, et comme on le suppose ordinairement, les corps se séparent à l'instant même où ils ont repris leur forme primitive. Or de là résulte un moyen de calculer, à l'avance, la vitesse des deux corps après le choc.

Pour le cas qui nous occupe, par exemple, la vitesse perdue par le corps (A) à l'instant de la plus grande compression, étant (156) V — U, il perdra de nouveau (157), dans le débandement, une vitesse égale à V — U, et par conséquent la vitesse qu'il conservera, après le choc, sera U — (V — U), ou 2U — V, si V — U est moindre que U, ce qui indique que (A) continue à marcher dans le même sens après le choc, ou (V — U) — U = V — 2U, si V — U surpasse U, ce qui indique que (A) retourne en arrière après le choc. Quant au corps (A'), la force F lui a d'abord communiqué (156) la vitesse U; elle lui imprimera donc, après l'instant

de la plus grande compression, un nouveau degré de vitesse égal à U, c'est-à-dire que sa vitesse, après le choc, sera 2U. Mais nous savons calculer (156) la vitesse U ; donc nous saurons aussi calculer celle des corps parfaitement élastiques au moment où ils se séparent après le choc.

Nommant W et W′ respectivement, ces vitesses des corps (A) et (A′), on aura, selon les cas spécifiés,

$$\left.\begin{array}{ll} W = 2U - V, & W' = 2U, \\ W = 2V - U, & W' = 2U, \end{array}\right\} \qquad U = \frac{MV}{M + M'}.$$

159. *Remarques relatives à l'application des formules.* Il est une infinité de circonstances où les corps marchent forcément de *compagnie,* avec la *même vitesse,* après le choc, sans que, pour cela, ces corps aient été entièrement privés d'élasticité avant le choc, ou qu'ils la perdent complétement par l'effet de ce choc : c'est ce qui arrive, par exemple, quand une balle d'argile ou de cire molle, lancée contre un corps résistant et élastique, demeure collée après ce corps, ou quand une balle dure et élastique, lancée contre un bloc de bois suspendu librement au bout d'une corde ou d'une barre, demeure enfoncée dans l'intérieur de ce bloc. Or il est bon de remarquer que les conséquences qui précèdent, relatives au cas des corps totalement privés d'élasticité, demeurent alors exactement applicables, parce qu'elles ne supposent uniquement que l'égalité de la vitesse U conservée, par ces corps, à la fin du choc. Quelle que soit en effet la *cause* ou la *force* qui oblige ces corps à demeurer réunis, comme cette force ne peut agir sur l'un d'eux, sans qu'une force égale et directement contraire agisse au même point et en même temps sur l'autre (64), on conçoit que, pendant toute la durée du choc, les quantités de mouvement perdues ou acquises par chaque corps, seront les mêmes pour tous deux ; de sorte que finalement (A′) aura encore gagné précisément ce que (A) aura perdu (156).

Quant au cas où les corps se séparent après le choc, on ne peut jamais affirmer que les choses se passent comme le supposent les calculs ci-dessus, même pour des corps qui seraient parfaitement élastiques et qui reprendraient exactement leur forme primitive après ce choc ; car il peut bien arriver, par exemple, que, pendant le débandement des ressorts, les corps soient retenus momentané-

ment, l'un contre l'autre, par leur adhérence réciproque ou par toute autre force qui empêcherait que les quantités de mouvement, imprimées alors, soient aussi grandes que celles qui l'ont été en premier lieu. Enfin il peut aussi arriver que les corps aient subi, dans leur intérieur, des altérations moléculaires plus ou moins sensibles, sans qu'aucune trace ne s'en manifeste quant à leur forme extérieure, etc.

Ces considérations, jointes à ce qu'il n'existe, en réalité (17 et suiv.), qu'un très-petit nombre de corps qu'on puisse regarder comme parfaitement élastiques, expliquent pourquoi généralement les valeurs de la vitesse, à la fin du choc des corps solides, diffèrent toujours plus ou moins de celles que donnent les calculs, et se rapprochent plus ou moins de celles qui sont relatives au cas où les corps sont entièrement privés d'élasticité. Cependant il est des corps élastiques, telles que les billes de verre, d'ivoire, etc., qui, dans certaines circonstances de leurs chocs, présentent des phénomènes et acquièrent des vitesses qui s'accordent, à peu de chose près, avec ce qu'indiquent les calculs.

160. *Exemples particuliers.* Faisons maintenant connaître quelques-unes des conséquences de nos formules. Supposons, par exemple, que la masse M′ du corps choqué (A′), fig. 35, soit très-petite par rapport à celle M du corps choquant (A) ; la valeur de U sera sensiblement égale à $\frac{MV}{M} = V$, c'est-à-dire que la vitesse de M sera très-peu altérée à l'instant de la plus grande compression ; et, comme, dans le cas des corps parfaitement élastiques (158), on a $W = 2U - V$, $W' = 2U$, on voit qu'à la fin du choc, elle ne le sera pas davantage, mais que le petit corps s'éloignera de l'autre avec une vitesse W′ double. Supposons, au contraire, que la masse M du corps choquant soit très-petite par rapport à celle M′ du corps choqué ; on voit que le dénominateur $M + M'$ de U sera aussi très-grand par rapport au facteur M de son numérateur, et que par conséquent la vitesse U, à l'instant de la plus grande compression, sera également une très-petite fraction de la vitesse V que possédait le corps choquant ; de sorte que, si M′ est, pour ainsi dire, infiniment grand par rapport à M, la vitesse U pourra être considérée comme sensiblement nulle. Si donc les deux corps étaient doués d'une élas-

ticité parfaite, la vitesse W′, acquise par le corps choqué, serait elle-même infiniment petite, tandis que celle $W = V - 2U$ du corps choquant serait V ; c'est-à-dire précisément égale et contraire à celle qu'il possédait avant le choc.

Ceci explique, entre autres, pourquoi les cordonniers placent, sur leurs genoux, une forte pierre pour recevoir les coups du marteau dont ils frappent les semelles de souliers, et comment il est possible de forger du fer sur une forte enclume posée sur le corps d'un homme ou sur le plancher fléxible d'un étage supérieur, sans blesser cet homme, sans endommager sensiblement ce plancher et les murailles de la maison. On voit, en effet, que la vitesse communiquée à la pierre ou à l'enclume, et par suite aux corps qui les supportent, est extrêmement faible comparativement à celle que possède le marteau ; de sorte que la flexibilité, l'élasticité naturelle de ces corps suffit pour amortir les effets du coup sans qu'il survienne d'accidents.

On s'expliquera aussi facilement une infinité de phénomènes, relatifs aux corps élastiques ou non élastiques, qui se passent journellement sous nos yeux : il n'est personne, par exemple, qui n'ait observé que, quand une bille de billard vient à en choquer une autre *directement*, c'est-à-dire de la manière dont nous l'avons entendu précédemment (154), il arrive qu'elle s'arrête tout à coup dans la place même qu'occupait cette autre, tandis que celle-ci chemine avec toute la vitesse de la première ; or, c'est ce que montrent très-bien nos formules. Les masses M et M′ de deux corps sont ici égales, l'élasticité, est pour ainsi dire, parfaite, de sorte que la vitesse U, commune aux deux corps à l'instant de la plus grande compression, égale $\frac{MV}{2M} = \frac{1}{2}V$, celle W de M après le choc égale $2U - V = 0$, et enfin celle W′ de la bille choquée égale 2U ou V.

161. *De la force vive des corps après le choc.* D'après ce que nous avons déjà dit, nos 97 et 139, on peut prévoir que, dans le choc des corps parfaitement élastiques, la force vive perdue pendant la compression doit être précisément égale à celle qui est restituée dans le débandement, tandis que, dans le choc des corps qui ne reprennent pas exactement leur état primitif après l'instant de la plus grande compression, la somme des forces vives doit être altérée

d'une quantité précisément égale au double de la quantité de travail nécessaire pour produire l'altération de forme ou de constitution éprouvée par les deux corps ; quantité qu'on pourrait directement calculer (136 et 137) si l'on connaissait, pour chaque instant du choc et pour chaque corps, la valeur moyenne de la force de réaction F et celle du petit *enfoncement* qu'elle produit dans ce corps. Il est évident, en effet, que le travail, relatif à cet instant, serait mesuré (72 et 86) par le produit de F et de la somme des enfoncements qui lui correspondent dans les deux corps. Mais, comme on ne connaît ni la loi que suit cette force, ni celle de l'enfoncement, on n'a d'autre moyen de mesurer, soit le travail, soit la force vive développés ou perdus dans le choc des corps, qu'en les déduisant directement des vitesses que possèdent ces corps avant et après l'instant du choc, vitesses qu'on ne peut calculer rigoureusement d'ailleurs (139) que dans un petit nombre de cas.

Par exemple, ayant appris, dans les cas ci-dessus (136) où un corps en choque un autre au repos, à calculer la vitesse U qui leur est commune à l'instant de la plus grande compression, nous pourrons aussi trouver la force vive qu'ils possèdent à cet instant, et la perte de force vive due à la réaction de leurs ressorts moléculaires. En effet, la force vive totale (122 et 126) était, avant le choc, MV^2, et, à l'instant que l'on considère, elle est $MU^2 + M'U^2$ ou $(M + M')\,U^2$; donc la perte de force vive a pour valeur

$$MV^2 - (M + M')\,U^2.$$

Mais on a trouvé (136)

$$U = \frac{MV}{M + M'} ; \text{ donc } (M + M')\,U^2 = (M + M')\,\frac{M^2V^2}{(M + M')^2} = \frac{M^2V^2}{M + M'}.$$

D'une autre part, MV^2 est la même chose que

$$\frac{(M + M')\,MV^2}{M + M'}, \quad \text{ou que} \quad \frac{M^2V^2}{M + M'} + \frac{M'MV^2}{M + M'} ;$$

donc enfin la perte de force vive est égale à

$$\frac{M'MV^2}{M + M'}, \quad \text{ou} \quad \frac{M'}{M + M'} \cdot MV^2,$$

c'est-à-dire à *la force vive que possédait la masse* M *avant le choc*,

multipliée par le quotient de la masse M′ *et de la somme de ces masses* *.

La moitié de cette valeur sera donc aussi (138) la mesure du travail développé, par la force de réaction F, pour opérer la compression des deux corps.

Si le choc finit à l'instant de la plus grande compression, que les corps soient ou non sans élasticité (139), la quantité ci-dessus donnera encore la perte de force vive occasionnée par le changement d'état ou de forme de ces corps.

Mais, si le choc continue après l'instant dont il s'agit, une portion de cette force vive sera restituée dans le débandement des ressorts moléculaires; et, si les corps étaient parfaitement élastiques, cette même force vive serait entièrement restituée. C'est, en effet, ce qu'on trouve par des opérations analogues à celles ci-dessus, appliquées aux valeurs des vitesses qui, selon le n° 158, ont lieu alors après le choc.

162. *Conséquences particulières.* Supposons que la masse M′ du corps choqué (A′), fig. 35, et qui est au repos avant le choc, soit très-petite par rapport à celle M du corps choquant (A), M′ sera aussi très-petit par rapport à M + M′; et par conséquent la perte de force vive $\frac{M'}{M+M'}$ MV², relative au cas où ces corps ne sont pas élastiques, se réduira à une très-petite fraction de celle MV² qu'ils possédaient avant le choc. On peut, dans des circonstances semblables, négliger une telle perte dans le calcul des résistances d'une machine, pourvu que le choc ne soit pas fréquemment répété (95); mais il en est tout autrement quand la masse M′ du corps en repos est très-grande par rapport à celle M du corps choquant; car la fraction $\frac{M'}{M+M'}$ pourra approcher beaucoup de l'unité, et par conséquent la perte de force vive, de la force vive MV² possédée par ce dernier corps avant le choc. Supposant seulement M′ = M, la valeur de cette fraction sera $\frac{1}{2}$, et la perte s'élèvera déjà à la

* Nous engageons les lecteurs peu accoutumés aux calculs avec des lettres, à répéter la série des raisonnements sur un exemple particulier, en se rappelant (125) que la *masse* d'un corps est le quotient de son poids par g ou 9m,8088 = 9m,81 environ.

moitié de MV^2. On voit donc combien il est essentiel d'éviter, dans la construction des machines, qu'un corps vienne inutilement choquer un autre corps en repos, dont le poids est comparable au sien propre.

Nous disons *inutilement*, parce qu'en effet, il est quelquefois utile d'opérer par le choc sur la matière à confectionner; c'est ainsi, par exemple, que procèdent les forgerons pour donner différentes formes aux métaux, et que les cordonniers parviennent à étendre les semelles de cuir et à augmenter leur densité, leur roideur ou leur force de ressort; mais alors même un ouvrier, qui a l'expérience de son art, ne manque jamais d'employer des marteaux, des enclumes bien aciérés et trempés, ou tout autre corps plus ou moins élastique, conformément à la remarque qui en a déjà été faite n° 98; de sorte que la consommation de force vive qui a lieu alors (159), est, du moins en très-grande partie, employée à produire le changement de forme de la matière à confectionner.

C'est encore ici le lieu de rappeler (98) qu'il ne suffit pas que les corps soient élastiques pour qu'on puisse affirmer qu'il n'y ait pas eu consommation inutile de travail; car il faut encore que la force vive, qui est restituée par les ressorts moléculaires après le choc, soit utilement employée. C'est bien ce qui arrive, par exemple, à l'égard du marteau des forgerons, puisque l'élasticité, en *renvoyant le coup*, sert à élever le marteau contre l'action de la pesanteur, et aide la main de l'ouvrier habile qui sait en profiter; mais le contraire peut aussi arriver, si, par exemple, l'enclume est assise sur un terrain mou : la force vive qu'acquiert cette enclume est alors, en partie, consommée à produire l'enfoncement du sol; aussi les maîtres de forge entendus ont-ils soin de placer de gros blocs de bois ou des charpentes très-élastiques sous leurs enclumes. Il n'est pas moins indispensable aux ouvriers de tous les autres états, de choisir, pour leurs chantiers et établis, des corps à la fois élastiques et peu flexibles; il faut en outre qu'ils soient suffisamment lourds, car alors ils prendront peu de mouvement (160), et, acquérant une force vive très-faible, ils auront très-peu d'action pour comprimer le sol; de sorte que, malgré le peu de ressort que ce dernier possède, il se comportera néanmoins alors (19) comme un corps parfaitement élastique.

163. *Formules relatives au cas le plus général du choc direct.* Ins-

qu'ici nous nous sommes uniquement occupés du cas où l'un des deux corps est en repos; mais il n'est pas inutile de montrer comment on peut étendre immédiatement les raisonnements à celui où les corps seraient animés de vitesses quelconques avant le choc.

A cet effet, nommant M, M′ les masses, V, V′ les vitesses respectives des deux corps avant le choc, et U leur vitesse commune à l'instant de la plus grande compression, on observera que, quand les corps cheminent dans le même sens, fig. 36, la force de réaction F (154), diminuant la quantité de mouvement MV du corps (A) de quantités égales à celles qu'elle ajoute à la quantité de mouvement M′V′ de (A′), la somme MV + M′V′ des quantités de mouvement primitives, reste encore la même à toutes les époques du choc. On a donc, à l'instant où la vitesse est U pour les deux corps,

$$MU + M'U \text{ ou } (M + M')\,U = MV + M'V'; \text{ d'où } U = \frac{MV + M'V'}{M + M'},$$

tandis que, dans le cas où les deux corps (A) et (A′) vont à la rencontre l'un de l'autre, fig. 37, animés des quantités de mouvement MV, M′V′, la force de réaction diminuant chacune d'elles de la même valeur (154), leur différence absolue MV − M′V′ ou M′V′ − MV demeure aussi la même à tous les instants; de sorte qu'en supposant que MV surpasse M′V′, on aura, à l'instant où la vitesse est U pour les deux corps,

$$MU + M'U \text{ ou } (M + M')\,U = MV - M'V'; \text{ d'où } U = \frac{MV - M'V'}{M + M'},$$

la vitesse U étant nécessairement dirigée dans le sens de celle V, qui répond à la plus grande quantité de mouvement primitive MV.

Quant aux forces vives possédées ou perdues au moment de la plus grande compression, on les calculerait aisément au moyen de la vitesse U, mais on peut arriver immédiatement à la valeur de cette perte, qu'il est souvent essentiel de connaître, en observant que, dans les deux cas dont il s'agit, la réaction des corps s'opère uniquement en vertu des vitesses *relatives* (46 et 85) dont ces corps sont animés avant le choc; de sorte que les valeurs de F et les changements d'état ou de forme qui lui correspondent sont, à chaque instant, les mêmes que si, le corps (A′), par exemple, étant au repos, le corps (A) venait le choquer avec une vitesse V − V′ égale à la différence des deux vitesses pour le premier cas, et avec

une vitesse $V + V'$ égale à la somme des mêmes vitesses pour celui où les corps marchent en sens contraire.

La perte de force vive, qui dépend uniquement (139) de l'intensité de la réaction des deux corps à chaque instant du choc, sera donc (161), au moment de la plus grande compression, pour le cas où les corps marchent dans le même sens,

$$\frac{MM'(V - V')^2}{M + M'},$$

et, pour celui où les corps marchent en sens contraire,

$$\frac{MM'(V + V')^2}{M + M'}.$$

Cette dernière quantité est, comme on voit, de beaucoup supérieure à la première; cela prouve combien il est surtout essentiel, dans la construction des machines, d'éviter que des corps se choquent inutilement avec des vitesses contraires.

Enfin, si les corps étaient parfaitement élastiques, on trouverait tout aussi facilement les vitesses qu'ils conservent à la fin du choc: il suffirait, pour cela, de reprendre les raisonnements du n° 158, relatifs au cas où l'un des corps est en repos au commencement de ce choc. Mais, comme on aura rarement occasion d'appliquer ces résultats à la pratique, nous ne nous y arrêterons pas, non plus qu'aux diverses conséquences qu'on pourrait, dès à présent, déduire des formules qui précèdent.

164. *Remarques relatives aux applications numériques.* On devra se rappeler que, lorsqu'il s'agit de calculer, en nombres, les valeurs des forces vives perdues ou conservées par les corps après le choc, il conviendra toujours de prendre (145 et suiv.), pour chaque masse, le quotient du poids du corps par $g = 9^m,8088$, tandis qu'on pourra s'en dispenser dans le cas où l'on n'aura que les vitesses simples à calculer. Il est aisé de voir, en effet, qu'on pourra alors remplacer les *masses* par les *poids mêmes* des corps, dans les fractions qui donnent ces vitesses, attendu qu'en supprimant la division de ces poids par g, cela reviendra tout simplement à multiplier à la fois le numérateur et le dénominateur de la fraction dont il s'agit par cette même quantité, ce qui ne change pas le résultat comme on sait. Ainsi, on aura, dans le cas général ci-dessus (163), P, P' étant

les poids des deux corps dont les masses ont été nommées M et M',

$$U = \frac{PV + P'V'}{P + P'} \quad \text{ou} \quad U = \frac{PV - P'V'}{P + P'},$$

selon le sens du mouvement des corps avant le choc.

C'est d'après de tels exemples, qu'on se croit quelquefois autorisé à prendre généralement le poids d'un corps pour sa masse (125); mais on commettrait une erreur grave si l'on en agissait ainsi dans les calculs relatifs à la force vive des corps.

Par exemple, dans les cas ci-dessus (163) de deux corps qui se choquent en marchant dans le même sens, nous avons trouvé que la perte de force vive, à l'instant de la plus grande compression, qui répond à la fin du choc quand les corps ne sont pas élastiques, avait pour valeur

$$\frac{MM'(V - V')^2}{M + M'},$$

tandis que, selon l'autre manière de voir, elle serait

$$\frac{PP'(V - V')^2}{P + P'}.$$

Or il est facile de s'assurer que, par la suppression de la division des poids P, P' pour obtenir les masses M, M', on aurait multiplié réellement deux fois le numérateur de la fraction par g et seulement une fois le dénominateur; de sorte que le véritable résultat se trouverait en effet multiplié par g. Si donc on voulait obtenir ce véritable résultat en se servant des poids, il faudrait diviser la dernière des fractions ci-dessus par g ou $9^m,8088$, ce qui donnerait

$$\frac{PP'(V - V')^2}{g(P + P')}.$$

Ainsi on pourra, dans la vue de simplifier un peu les calculs, se servir de cette dernière formule au lieu de celle qui contient les masses; quant à la précédente, on doit bien voir maintenant qu'elle est absolument fautive. On pourra d'ailleurs appliquer des simplifications analogues aux diverses autres formules ou résultats des calculs concernant le choc des corps.

165. *Comparaison des effets des chocs et des pressions simples.* On

a quelquefois essayé de mesurer directement les chocs par les pressions ou les poids : ainsi l'on a dit, d'une manière absolue, qu'un *certain poids, tombant de telle hauteur sur un corps, équivalait à une pression de tant de kilogrammes, exercée sur ce corps ;* or, il est bien évident que ces deux choses sont tout à fait distinctes, et ne peuvent se rapporter à la même unité de mesure, dans le sens absolu dont il s'agit. Mais il en est tout autrement quand on entend parler des effets mêmes que peuvent produire les chocs et les poids ou pressions simples qui agissent sur les corps *sans vitesse acquise;* car un poids posé, par exemple, sur une certaine substance, s'y enfonce ou la comprime plus ou moins (63), et développe, dans sa descente, une quantité de travail (89) qui est tout à fait comparable à la force vive que perdrait un autre corps (161), pour produire la même compression, le même effet.

Dans les deux cas, on a à considérer une suite de pressions variables à chaque instant, et qui se succèdent, *sans interruption quelconque,* tout en produisant le changement de forme du corps. Or cette succession n'est pas une pression simple et unique ; on ne peut pas non plus la mesurer en kilogrammes par une somme de pressions, puisque cette somme est infinie, même pour un très-petit temps de l'action des forces et pour un mouvement extrêmement lent; mais, comme il y a à la fois pression ou effort et chemin décrit dans chaque instant très-petit, il y aura aussi un petit travail développé dans cet instant; et c'est la somme finie de ces travaux partiels qui, dans tous les cas, mesure l'effet produit.

Il est bon de remarquer d'ailleurs que les mêmes géomètres qui mesurent les effets du choc par des sommes de pressions, nomment ces sommes des *forces de percussion*, et les considèrent comme égales aux quantités de mouvement qui ont été imprimées ou détruites dans l'acte du choc; tandis que, d'après l'autre manière de voir, qui est aussi simple et d'ailleurs parfaitement d'accord avec les résultats de l'expérience, nous sommes conduits naturellement à mesurer ces mêmes effets du choc par la force vive directement employée à les produire.

APPLICATIONS PARTICULIÈRES RELATIVES AU CHOC DIRECT.

166. *Exemple du choc d'un corps qui tombe, d'une certaine hauteur, sur une substance plus ou moins molle.* Supposons qu'on laisse

tomber, d'une certaine hauteur, un corps cubique et très-résistant P, fig. 38, tel qu'un cube de fer pesant 300 kil., sur une substance plus ou moins molle, terminée par un plan de niveau AB, et dans laquelle il pénètre par une de ses faces *ab*, parallèle à ce plan. Soit $1^m,30$ la hauteur *b'c* d'où le cube est tombé avant d'atteindre AB, et $0^m,02$ la quantité totale *bc* de l'enfoncement à l'instant où le choc est terminé ; il sera donc descendu réellement de la hauteur $1^m,30 + 0^m,02 = 1^m,32$, et la quantité de travail développée par la pesanteur, dans cette descente, sera mesurée par le produit $300^k \times 1^m,32 = 396^{km}$; c'est donc là aussi la mesure du travail nécessaire pour produire l'enfoncement des $0^m,02$ avec des circonstances semblables, ou pour produire un effet identiquement égal.

Cette conséquence résulte immédiatement de ce qui a été dit précédemment (158 et suiv.) sur le choc des corps durs qui rencontrent des corps mous ou privés d'élasticité ; car ici le corps P atteint le plan AB avec une force vive égale à $2 . 300^k . 1^m,30 = 780$ (122), et cette force vive peut être considérée comme presque entièrement consommée (162) pour produire le changement de forme de AB, attendu que l'altération du cube est négligeable, et que la masse de la substance AB qui reçoit le choc, étant ici censée très-grande par rapport à celle de P, ou étant censée faire partie du sol, soit directement, soit par l'intermédiaire des corps qui la supportent, la vitesse, et par conséquent la force vive conservée après le choc, sera extrêmement petite (160 et suiv.), de sorte qu'on pourra la négliger par rapport à celle que possédait P avant le choc. Or cette dernière force vive se convertit, à partir de l'instant où le corps atteint le plan AB, en une quantité de travail égale (136) à la moitié de sa valeur, c'est-à-dire à 390^{km} ; de plus, la gravité y ajoute, pendant que le corps s'enfonce, une quantité mesurée par le produit du poids 300^k de ce corps et de la hauteur *bc* de l'enfoncement ; donc, au total, la résistance qu'éprouve le cube pendant qu'il pénètre dans la substance AB et de la part de cette substance, développe bien réellement, contre le mouvement, une quantité de travail égale à $390^{km} + 300^k . 0^m,02 = 390^{km} + 6^{km} = 396^{km}$, quelle que soit d'ailleurs la manière dont varie l'intensité propre de cette résistance aux divers instants de l'enfoncement.

Maintenant, si l'on pose doucement, sur AB, un prisme vertical R de même base que le cube, et dont la hauteur et le poids soient

tels qu'au bout d'un temps plus ou moins long, il s'enfonce des mêmes 2 centimètres *bo*, la quantité d'action que la pesanteur aura développée, sur le prisme, pendant sa descente de cette hauteur, et qu'aura consommée la résistance de AB, sera le produit de $0^m,02$ par le poids R de ce prisme, c'est-à-dire $0^m,02 \times R$. Mais, comme les effets produits par le prisme et par le cube sont identiques, les quantités de travail que ces effets supposent, de la part de la résistance de AB, doivent être regardées aussi comme égales, et partant on a

$$R \times 0^m,02 = 396^{km}; \quad \text{d'où } R = \frac{396}{0,02} = 19800^{kil}.$$

Tel est donc le poids qui pourrait produire, dans un temps plus ou moins long, un effet égal à celui qui résulte, dans un temps généralement très-court, d'un poids 66 fois moindre, lancé avec la *vitesse* de $8^m,05$ *due à la hauteur* de $1^m,30$ (118).

167. *Calcul hypothétique de la durée de l'enfoncement produit par le choc.* La valeur effective du temps que le corps P met à s'enfoncer des $0^m,02$ ci-dessus, ne peut s'obtenir qu'autant que l'on connaîtrait, par des expériences spéciales, la loi que suit la résistance du sol aux divers instants, ce qui n'est pas. Mais, pour offrir un exemple de calcul, nous supposerons la résistance constante, ou plutôt nous la supposerons remplacée, dans les divers instants, par sa *valeur moyenne* (73); de sorte qu'elle sera censée (107 et 112) retarder uniformément le mouvement du prisme ou du cube.

Or nous savons que, pendant la durée du choc, elle développe une quantité de travail égale à 396^{km}, donc (73) elle a pour valeur moyenne $\frac{396}{0,02} = 19800^{kil}$; c'est-à-dire qu'elle est précisément égale au poids du prisme qui produit le même enfoncement ou le même effet; ce à quoi on devait bien s'attendre en la supposant toute fait constante *. Cette résistance étant directement opposée à l'action du poids des 300^{kil} du cube, ce dernier sera sollicité, pendant l'en-

* Puisque la résistance est ici égale au poids du prisme, ce dernier ne s'enfoncera pas, conséquence qui prouve assez que l'hypothèse d'une résistance constante n'est point admissible; cette résistance croît nécessairement à partir de l'instant où l'enfoncement commence, et c'est ce qui paraît évident en soi, vu la facilité qu'a alors la matière de se déplacer latéralement ou sur les côtés du cube et du prisme.

foncement, par une force motrice constamment égale à

$$19800^{k} - 300^{k} = 19500^{kil},$$

et agissant, *de bas en haut*, pour retarder son mouvement primitivement acquis, ou pour détruire la vitesse de $5^{m},05$ qu'il possède à l'instant où il atteint AB.

Avec ces données, il ne sera pas difficile de trouver le temps que la résistance mettrait à éteindre complétement la vitesse en question ; car puisqu'on la suppose constante, elle imprimerait, au bout de l'unité de temps, une vitesse V_{1} qui sera donnée par la formule

$$F = MV_{1} \text{ ou } V_{1} = \frac{F}{M}, \text{ du n° 132 : or ici } F = 19500^{kil},$$

$M = \frac{300^{k}}{9^{m},81} = 30,58$; donc $V_{1} = \frac{19500}{30,58} = 637^{m},67$. Mais, puisque la force constante est capable d'imprimer la vitesse de $637^{m},67$ au bout d'une seconde, il est évident (110) qu'elle mettra, à imprimer ou détruire la vitesse de $5^{m},05$, un temps t qu'on obtiendra au moyen de la proportion $637^{m},67 : 1'' :: 5^{m},05 : t$; d'où

$t = \frac{5,05}{637,67} = 0'',008$, ou $\frac{1}{125}$ de seconde à peu près.

Les mêmes résultats s'obtiendraient immédiatement d'ailleurs au moyen de la formule $F = M\frac{v}{t}$ du n° 130, en observant qu'ici les raisonnements sont applicables à une vitesse et à un temps quelconque ; car elle donne pour le temps t qui répond à la vitesse de $5^{m},05$, $t = \frac{M \times 5,05}{F} = \frac{30,58 \times 5,05}{19500} = 0'',008$ environ, comme ci-dessus.

168. *Cette durée est d'autant moindre que le corps choqué est plus roide.* Nous venons de trouver que, dans l'hypothèse d'une résistance constante, le temps nécessaire pour produire l'enfoncement des 2°, est de 8 millièmes de seconde environ. Si la substance qui reçoit le choc était assez résistante, assez dure pour que l'enfonce-

ment fût seulement de $0^m,001$, dans les mêmes circonstances, on trouverait, en recommençant les calculs qui précèdent, que le poids R du prisme qui produirait cet enfoncement, serait de

$\frac{396}{0,001} = 396000^{kil}$, et que la force de réaction qui agit pendant le choc, aurait pour valeur moyenne ces mêmes 396000^k diminués de 300^k ou 395700^{kil}, qu'enfin la durée de l'enfoncement serait seulement de $0'',00039$, ou environ vingt fois moindre que dans le premier cas; par quoi l'on voit combien doit être excessivement courte la durée du choc des corps roides tels que le marbre, l'acier, l'ivoire, dont les dépressions sont quelquefois si faibles qu'il est comme impossible de les apprécier par des moyens directs.

A la vérité, nous avons supposé, pour parvenir à ces résultats, que la résistance des corps à l'enfoncement était constante; mais la même conséquence peut se déduire de nos principes quelle que soit la loi de la résistance; car la force vive détruite, par exemple, pendant la première période (156) du choc de deux corps quelconques ou pendant leur compression, étant généralement très-comparable à celle qu'ils possédaient avant le choc, il en sera de même (156) du travail développé par leur force de réaction réciproque F. L'enfoncement étant donc extrêmement petit, il faut nécessairement (97) que la courbe du travail $Oa'b'c'\ldots.$ (pl. I, fig. 26), s'éloigne considérablement de l'axe OB des abscisses, du moins à compter d'une petite distance de l'origine; de sorte que les ordonnées, qui mesurent les valeurs de la force de réaction F, devront aussi être extrêmement grandes. Or de là on conclut, sans difficulté, soit par la formule $t = \frac{Mv}{F}$ déjà citée, soit par la construction de la courbe des vitesses (134, fig. 22), que le temps, nécessaire pour produire l'enfoncement ou la compression, doit être, de son côté, d'autant plus petit que les valeurs de F sont elles-mêmes plus considérables et l'enfoncement total moindre. Mais, attendu que l'aire comprise entre cette dernière courbe et l'axe des abscisses mesure effectivement les espaces décrits ou les enfoncements, il n'est pas même nécessaire de recourir à la courbe des pressions, fig. 26, pour voir que, si l'enfoncement total est extrêmement petit tandis que la vi-

esse conserve une grandeur donnée, la durée du mouvement doit elle-même être extrêmement courte.

169. *Observations générales sur la communication du mouvement par le choc.* C'est à cause de l'excessive petitesse de la durée du choc des corps très-résistants, que les mécaniciens se sont crus autorisés à regarder généralement comme entièrement nulle cette durée, et que, par suite, ils ont été conduits à supposer infinies les forces de réaction qui se développent pendant la compression réciproque des corps. Mais nous voyons bien clairement maintenant que, puisqu'il n'existe pas de corps infiniment durs, on ne peut dire, non plus, en termes absolus, qu'il y ait changement brusque ou *instantané* de leur vitesse; la communication du mouvement par le choc ne diffère, en effet, de celle qui a lieu par les forces motrices ordinaires, telles que la pesanteur, etc., que parce que généralement cette communication s'opère dans un temps réellement très-court, et que la force de réaction acquiert ainsi une très-grande valeur. Encore devons-nous remarquer qu'il arrive souvent que des corps réagissent, l'un sur l'autre, par leurs vitesses acquises, sans que la pression soit excessive, sans que la durée de la réaction soit très-courte; et que réciproquement des forces motrices, qu'on ne peut se refuser de regarder comme des pressions ordinaires, telles que celles qui résultent, par exemple, du ressort des gaz de la poudre, etc., communiquent cependant aux corps une vitesse très-grande dans un très-petit temps, attendu la grande intensité de leur action. La distinction qu'on voudrait établir entre des phénomènes qui ont autant de connexion entre eux, ne pourrait donc servir qu'à compliquer l'étude de la Mécanique, en y introduisant, sans utilité immédiate, un ordre de considérations qui n'y est point indispensable.

170. *Utilité du choc dans les arts; battage des pilots de fondation.* Maintenant on doit bien concevoir comment il est possible de comparer les effets des chocs, sur les corps, à celui des pressions ordinaires qui produisent des mouvements plus ou moins lents; on conçoit très-bien aussi que, le choc produisant, dans un temps extrêmement court, un travail ou un effet comparable à celui que produisent, dans un temps généralement beaucoup plus long, les pressions ordinaires, il y ait souvent avantage, nécessité même

d'employer ce mode d'action dans les arts, malgré les inconvénients qui y sont attachés (162). Car, toutes les fois que la pression ou l'effort direct dont on pourra disposer pour produire un travail mécanique, sera au-dessous de la résistance à vaincre, il faudra recourir au choc qui développe des pressions considérables et toujours en rapport avec la force de réaction.

On s'expliquera encore aisément le but qu'on se propose en plaçant, sous les fondations des édifices très-lourds, tels que les piles de ponts, les palais, les remparts, etc., de forts *pieux* ou *pilots* affûtés vers le bas et enfoncés, sous le sol, à *coups de mouton*. Le poids dont est chargé verticalement chaque tête de pilot par les constructions établies directement au-dessus, représente celui R du prisme dont il a été question au n° 166, et le mouton remplace également le cube ; seulement ici ce n'est pas l'enfoncement de la tête du pilot qu'il s'agit de produire, mais bien celui de sa pointe inférieure, dans le sol ; c'est pourquoi on cherche à éviter le premier enfoncement, qui consommerait, en pure perte, une partie notable de la force vive du mouton, et l'on a soin de consolider la tête du pilot par une forte frette, quand la violence du choc pourrait la déformer rapidement ; et, comme il ne s'agit pas davantage d'en briser la pointe, on a l'attention de la durcir au feu ou de la coiffer d'un *sabot en fer*. Enfin on dresse, on arrondit, le mieux possible, les côtés du pilot pour diminuer les résistances qui s'opposent à son enfoncement : de cette façon, la plus grande portion de la force vive du mouton est transmise à l'extrémité inférieure du pilot, et sert immédiatement à l'enfoncer dans le sol jusqu'à ce que, arrivée sur le roc, le tuf ou quelque autre terrain solide, les coups redoublés du mouton ne puissent plus la faire descendre, d'une manière sensible, auquel cas on dit que le pilot est parvenu *au refus*.

171. *Conditions du battage de pilots et conséquences qui en résultent.* On exige ordinairement, pour un pilot de $0^m,25$ de diamètre et de 3 à 4^m de longueur, que l'enfoncement produit par chacune des dernières *volées* de 30 coups, d'un mouton de 300 à 400^{kil}, tombant d'une hauteur de $1^m,30$, soit, au plus, de 4 à 5 millimètres ; moyennant quoi il devient permis, d'après les observations du célèbre Perronet, de charger chaque tête de pilot jusqu'à 25000^{kil}, sans qu'on ait à craindre aucun accident fâcheux pour la solidité des constructions.

Pour comparer cette donnée de l'expérience avec les résultats du calcul, nous observerons qu'ici les 30 coups de mouton équivalent (166) à une quantité de travail de $30 \times 300^{k} \times 1^{m},3 = 11700^{km}$ au moins. Ce travail produisant un enfoncement de $0^{m},005$ au plus, le poids qui, placé sur la tête des pilots, produirait le même enfoncement, serait d'au moins $\frac{11700}{0,005} = 2340\,000^{kil}$: ce poids est environ 94 fois celui que Perronet assigne comme limite de la charge des pilots; mais il faut observer 1° que les bois sont susceptibles de s'altérer plus ou moins à la longue, de sorte qu'ils peuvent alors s'écraser ou s'affaisser sous une charge moindre que celle qu'ils seraient capables de supporter momentanément; 2° que l'élasticité naturelle du bois et du sol qu'on frappe à coups de mouton, empêche que toute la force vive soit employée contre les résistances de ce sol, et tend même à diminuer la profondeur de l'enfoncement, en relevant, à chaque coup, le pilot d'une certaine quantité; 3° enfin qu'il ne convient pas non plus que l'on statue sur un abaissement de $0^{m},005$, pour les fondations d'un édifice qui doit présenter les caractères de la plus grande solidité, tel qu'un pont, etc. C'est pourquoi l'on peut admettre, d'après la règle posée par Rondelet, qu'en général, quand il s'agit de constructions monumentales, on ne doit prendre, pour charge des pilots, que la 94^{me} partie du poids qu'assigne la théorie.

Les calculs qui précèdent supposent d'ailleurs que la force vive du mouton soit tout entière consommée contre les résistances du sol, qui s'opposent à l'enfoncement, tandis que, dans la réalité (170), une portion plus ou moins grande de cette force vive est consommée pour écraser la tête du pilot : on peut même admettre que le ressort du bois est tout à fait négligeable dans les circonstances actuelles où le choc s'opère avec violence; de sorte que ce choc finit à l'instant même (158) de la plus grande compression éprouvée par la tête du pilot. Il est aisé de juger, d'après cela, que les observations du n° 162 sont applicables au cas actuel; c'est-à-dire que, pour diminuer, le plus possible, la perte inutile de force vive sur la tête du pilot, il convient de donner au mouton un poids qui excède de beaucoup celui de ce pilot; on doit par conséquent employer des moutons d'*autant plus lourds*, que les pilots à chasser le sont eux-mêmes davantage. Dans la pratique, le poids du mouton

est assez ordinairement compris entre deux fois et trois fois celui du pieu, de sorte que (162) la perte de force vive est aussi comprise entre le $\frac{1}{3}$ et le $\frac{1}{4}$ de celle qui opère le choc : en se servant de moutons encore plus pesants, la perte diminuerait, mais la manœuvre deviendrait embarrassante dans bien des cas, et occasionnerait d'autres consommations inutiles du travail moteur.

La perte de force vive, provenant de la déformation de la tête des pilots, étant donc généralement une fraction assez faible, et d'ailleurs à peu près constante, de celle qui est imprimée au mouton, il résulte, de ce qui précède (166), que les *enfoncements* ou *effets* du choc de divers moutons doivent être *proportionnels à leurs poids ainsi qu'à leurs hauteurs de chute,* ou *aux carrés des vitesses qu'ils acquièrent au bas de ces chutes ;* ce que confirme parfaitement l'expérience, non-seulement dans l'opération du battage des pieux de fondation, mais encore dans une infinité d'autres circonstances où les effets sont directement comparables, comme lorsqu'on laisse tomber un corps dur sur une pièce de bois, de fer, etc., posée horizontalement sur deux appuis.

DE LA COMMUNICATION DU MOUVEMENT PAR LE RESSORT DES GAZ, OU DU TIR DES PROJECTILES.

172. *Observations générales.* Nous avons déjà donné un aperçu (138) de la manière dont l'élasticité de l'air, comprimé fortement dans le réservoir d'un fusil à vent, peut servir à lancer des balles ou à convertir une certaine quantité de travail, accumulé dans cet air, en force vive. Or, en admettant, comme on le fait ordinairement, que la tension des fluides élastiques suive exactement la loi de Mariotte (16) quelle que soit la manière dont s'opère leur compression ou leur débandement, c'est-à-dire leur *détente,* non-seulement on pourra calculer la vitesse totale imprimée à la balle à l'instant où elle sort du canon, au moyen de la quantité de travail développée, sur elle, par les pressions successivement décroissantes du volume d'air qu'on laisse échapper, à chaque coup, de l'intérieur du réservoir, mais encore on sera en état (129 et suiv.) de calculer toutes les autres circonstances de son mouvement pendant le temps où elle chemine dans l'âme du canon, et de résoudre plusieurs questions intéressantes telles que de trouver la *vitesse de recul* du fusil, le temps que la balle met à parcourir l'âme, la lon-

gueur de cette âme qui donne le plus *grand effet* ou la plus grande vitesse de sortie, vitesse qu'on nomme aussi la *vitesse initiale* des projectiles dans l'art de la *Balistique*.

Nous n'entreprendrons pas de résoudre ici toutes ces questions, parce que le fusil à vent est d'un usage très-borné de nos jours, et que nous avons à traiter divers sujets, plus ou moins analogues, qui sont d'un intérêt plus immédiat et également très-propres à servir d'exemples de l'application des principes. Nous ferons seulement remarquer, relativement à la recherche du *maximum* d'effet, que la plus grande vitesse imprimée à la balle, répond à l'instant même où la pression de l'air intérieur est, par suite de sa détente, réduite à la pression de l'air atmosphérique extérieur (37), augmentée du frottement qu'éprouve la balle de la part des parois du canon : pression et frottement qu'il n'est permis de négliger qu'autant que l'âme aurait peu de longueur, ou que ces résistances demeureraient constamment, et de beaucoup, inférieures à la force motrice qui pousse la balle en avant : or, c'est ce qui a lieu précisément dans le tir ordinaire des projectiles, par le moyen de la poudre, dont nous allons maintenant nous occuper avec quelques détails. Nous reviendrons plus tard sur ce qui concerne l'air en particulier.

173. *De la communication du mouvement par les gaz de la poudre.* Le tir des balles et des boulets, par l'inflammation d'une certaine quantité de poudre enfermée dans le fond de l'âme d'un canon, et à laquelle on a mis le feu, présente des circonstances tout à fait analogues à celles qui sont relatives au fusil à vent; car ce tir consiste encore (99) à employer le ressort des gaz de la poudre, qui sont le résultat de sa combustion, pour imprimer progressivement la vitesse au projectile : ces gaz, en se dilatant, par l'action de la chaleur (26), remplissent ici, en effet, la fonction d'un ressort véritable : ils pressent le boulet avec des forces qui, partant de zéro, croissent d'une manière extrêmement rapide, jusqu'à un certain terme qui s'approche plus ou moins de l'instant où la poudre est entièrement enflammée, puis décroissent ensuite à mesure que les gaz se refroidissent ou que leur température baisse (21 et suiv.) par le contact des corps environnants, à mesure que les *pertes* ou *fuites* de ces gaz augmentent de plus en plus, par l'effet du *vent* ou *jeu* du boulet dans la pièce et de l'ouverture assez forte de la lumière, à

mesure enfin que le boulet, cheminant en avant, agrandit, de plus en plus, l'espace occupé par les différents gaz (16).

Quoiqu'on ne connaisse ni la loi de ces pressions ni celle de l'inflammation *nécessairement progressive* de la poudre, on peut, cependant, déduire, de nos principes, plusieurs conséquences conformes aux résultats bien connus de l'expérience; car le cas est ici tout à fait semblable à celui de la communication du mouvement par le choc des corps (154 et suiv.), où l'on ne connaît aucunement la loi que suit la force de réaction, et où l'on parvient néanmoins à diverses conséquences rigoureuses et utiles. Aussi doit-on s'attendre à voir reparaître un ordre de considérations analogues, et qui se présente généralement toutes les fois qu'il s'agit de la communication du mouvement par la réaction mutuelle des corps.

Comme on ne saurait trop insister sur les principes de pareilles applications, je pense qu'il ne sera nullement superflu de revenir sur les démonstrations très-simples qui en ont déjà été données précédemment, nos 131 et 153.

Soit F, à un instant donné, la force motrice qui pousse en avant le boulet et qui presse, en sens contraire et avec une intensité égale (14), le fond de l'âme de la pièce; soient P et P′ les poids du boulet et de la pièce y compris son affût, etc.; soient v et v' respectivement les petits degrés de vitesse qui leur sont imprimés à un instant quelconque et dans la durée du très-petit temps t; on aura (130) la proportion

$$F : P :: v : gt, \quad \text{ou} \quad Pv = F \times gt.$$

On aura, de même, pour la pièce et son affût,

$$F : P' :: v' : gt, \quad \text{ou} \quad P'v' = F \times gt;$$

ainsi

$$Pv = P'v', \quad \text{ou} \quad v : v' :: P' : P,$$

comme on le conclurait immédiatement des résultats du n° 131. Par conséquent *les degrés de vitesse imprimés au boulet et à la pièce, dans un très-petit temps, sont réciproquement proportionnels aux poids de ce boulet et de cette pièce.*

Puisque le produit $P \times v$ répond au petit temps t, la somme des produits partiels, relatifs aux divers instants écoulés depuis le point de départ du boulet jusqu'au moment où, quittant la pièce, il a acquis toute sa vitesse V, aura pour valeur le produit du poids P

par la somme des degrés de vitesse v, successivement imprimés, ou par la vitesse totale V, c'est-à-dire $P \times V$. La somme des produits $P' \times v'$, pour le même intervalle de temps, sera pareillement $P' \times V'$, V′ étant la vitesse finie communiquée à la pièce et à l'affût quand celle du boulet est V. Mais les petits produits $P \times v$ et $P' \times v'$, relatifs aux divers instants écoulés, sont continuellement égaux entre eux d'après ce qui précède; donc aussi $P \times V = P' \times V'$; c'est-à-dire que

Les vitesses finies, imprimées à la pièce et au boulet à l'instant où celui-ci a acquis tout son mouvement, sont réciproquement entre elles comme les poids de cette pièce et de ce boulet.

174. *Observations sur la vitesse du recul des pièces.* Les gaz de la poudre continuant à agir sur le fond de l'âme après l'instant où le boulet a quitté la pièce, on voit que la *vitesse totale* de cette pièce ou du *recul* sera un peu plus forte que ne le suppose la proportion ci-dessus. On voit aussi pourquoi le recul est beaucoup moindre quand on tire à poudre seulement, que quand on tire à boulet. On se rappellera d'ailleurs (172) qu'il faudrait, pour rendre plus exacts les raisonnements ci-dessus, diminuer F de toute la pression exercée, dans le sens opposé au mouvement, par l'air atmosphérique, sur la surface extérieure du boulet, ainsi que du frottement qu'il éprouve de la part de l'âme de la pièce, pression et frottement qui sont toujours, comme on le verra ci-dessous, très-faibles par rapport à la pression totale de la poudre. Enfin on remarquera que, le poids P du boulet étant généralement très-petit par rapport au poids P′ de la pièce et de l'affût, la vitesse V′ est aussi très-petite par rapport à V : dans la plupart des cas, P′ est au moins 300 fois P; ainsi la vitesse du recul surpasse rarement le 300^{me} de la vitesse communiquée au boulet, à sa sortie de la pièce.

175. *Mesure du travail total développé par la poudre contre la pièce et le boulet.* Pour calculer directement cette quantité de travail, il faudrait (72) connaître, par expérience, la loi ou la courbe qui lie les pressions F aux chemins correspondants décrits par le boulet dans l'âme de la pièce, ce qui n'est pas jusqu'à présent. Mais, comme nous savons (136) que cette quantité de travail est la moitié de la force vive imprimée, nous pourrons l'obtenir au moyen des vitesses V et V′ acquises effectivement par le boulet et la pièce; ce qui sup-

pose toujours qu'on néglige les résistances étrangères à l'inertie, vu leur peu d'influence. En effet, la force vive du boulet étant (126) égale à $\frac{1}{2}$ MV², et celle de la pièce à $\frac{1}{2}$ M'V'², la quantité de travail totale, dépensée par la poudre, a pour mesure (136),

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 + \frac{1}{2}\frac{P'}{g}V'^2.$$

Considérons, par exemple, une pièce de 24, dont le boulet pèse environ 12^{kil}, et dont la charge ordinaire est approchante de 4^{kil}; on sait, par expérience, que la vitesse totale V de ce boulet s'éloigne peu de 500^m par seconde; $\frac{1}{2}\frac{P}{g} \times V^2$ sera donc égal, g étant environ 9^m,81, à 152955^{km}. Pour trouver $\frac{1}{2}\frac{P'}{g} \times V'^2$, nous admettrons que le poids P' soit seulement 300 fois le poids P ou égal à 3600^{kil}; et, puisqu'on a $P \times V = P' \times V'$, on en tire $V' = \frac{1}{300}V = \frac{1}{300}500^m = 1^m,67$, pour la vitesse du recul. Ainsi, on aura pour la valeur de la quantité de travail développée par la poudre contre l'affût, ou pour $\frac{1}{2}\frac{P'}{g} \times V'^2$, 503^{km} environ; c'est-à-dire $\frac{1}{300}$ de celle qui a été dépensée sur le boulet, comme on pouvait l'apercevoir sans calcul.

176. *Conséquences relatives aux vitesses initiales des projectiles, leur accord avec l'expérience.* Le travail consommé par la pièce et son affût, étant très-petit par rapport à celui qu'exige le boulet, on peut le négliger, et se *contenter, dans la pratique,* de mesurer simplement les effets de la poudre d'après la quantité de travail nécessaire pour imprimer la vitesse au boulet; d'autant plus que la force vive du recul est, dans la réalité, bien moindre que ne le supposent les calculs, vu que la pièce n'est pas entièrement libre, et qu'elle éprouve, de la part du terrain, des essieux, etc., des résistances absolument comparables aux pressions exercées par la poudre. Or, les effets de cette poudre devant, dans des circonstances semblables d'ailleurs, être proportionnels à sa quantité, c'est-à-dire à son poids, on voit que *les charges seront sensiblement proportionnelles aux forces vives imprimées aux boulets, ou aux produits du poids de ces derniers,*

par le carré de leurs vitesses initiales ; de sorte que *les vitesses initiales seront aussi entre elles comme les racines carrées des charges et inverses des racines carrées des poids du boulet.*

Ces résultats de notre théorie sont parfaitement d'accord avec les expériences faites en Angleterre, par Hutton *, non-seulement pour des pièces d'un même calibre, mais encore pour des pièces de calibres différents, considérées dans les circonstances ordinaires de la pratique. Ces expériences ont prouvé toutefois qu'en allongeant l'âme des pièces, la vitesse initiale du boulet, pour des charges égales, se trouvait aussi un peu augmentée ; ce qui doit être, puisqu'alors les gaz de la poudre développent, par leur détente prolongée, une plus grande quantité de travail, et par conséquent de force vive (138) ; mais il paraît que cette augmentation est, en général, très-faible par suite des causes déjà énoncées, n° 173. Nous reviendrons bientôt sur les effets de la détente prolongée des gaz pour augmenter la vitesse des projectiles.

Ces mêmes considérations prouvent encore que la *force vive totale* ou la *vitesse finale,* imprimée au boulet par une même charge de poudre, *reste à très-peu près la même,* soit qu'on empêche tout à fait le recul par un obstacle solide, soit qu'on suspende librement la pièce ; car nous venons de voir que, dans ce dernier cas, la force vive communiquée à la pièce et à l'affût est réellement une très-petite fraction de celle qu'acquiert le boulet ; de sorte que l'action de la poudre est presque tout entière consommée contre ce boulet, comme cela arrive quand le recul est empêché. Cette nouvelle conséquence de la théorie est exactement conforme encore aux résultats des expériences de Hutton, qui, de plus, ont appris que la manière de *bourrer* n'avait aucune influence sensible sur la vitesse initiale : c'est qu'en effet, le bourrage ne fait qu'augmenter un peu les frottements, au premier instant, sans diminuer le vent du boulet, et que la résistance occasionnée par ce frottement est excessivement faible comparativement à la pression totale des gaz sur le boulet. On remarquera que le bourrage se fait ordinairement avec des substances très-légères, et que, s'il en était autrement, l'inertie de ces substances consommerait une grande portion de la quantité de travail développée par la poudre, au détriment de celle

* *Nouvelles expériences d'artillerie,* traduction due à M. O. Terquem, de Metz, docteur ès sciences, officier de l'université, etc. ; Paris, 1826, chez Bachelier.

qui est transmise au boulet ; connaissant le poids de la bourre, on pourrait même déterminer exactement la diminution de force vive éprouvée par ce dernier, etc., etc.

177. *Du travail de la poudre comparé à celui des machines à vapeur; son effort moyen et absolu*, etc. D'après les calculs ci-dessus, la quantité de travail totale, développée par la poudre sur le boulet et sur la pièce, est d'environ $152\,955^{km} + 503^{km} = 153\,458^{km}$; la force du cheval des machines à vapeur étant (82), pour chaque seconde, de 75^{km}, on voit qu'une telle force motrice emploierait $\frac{153458}{75} = 2046'' = 34'$ environ, pour lancer le boulet avec la vitesse de 500^{m} ; ou, si l'on veut, il faudrait une machine de 2046 chevaux de force pour lancer un pareil boulet à chaque seconde. Attendu qu'il faut un certain temps pour charger la pièce et pour la pointer, etc., on compte seulement 1 coup par 5 minutes, ou par $300''$ dans le service ordinaire des pièces avec la poudre ; ainsi la machine à vapeur, pour fournir à ce service, devrait être d'environ $\frac{2046}{300} = 6{,}82$ chevaux, en supposant d'ailleurs qu'il n'y eût pas de perte de force motrice et que tout fût transmis au boulet ; ce qui ne peut avoir lieu quelle que soit la machine ou les dispositifs qu'on adopte pour communiquer le mouvement à ce boulet (103).

Comme la longueur de l'âme des pièces de 24 est d'environ $3^{m},10$ et son diamètre de $0^{m},15$ ou 15 centimètres, il sera facile de calculer (73) *l'effort moyen et constant* que les gaz de la poudre devraient exercer, contre le boulet et le fond de la pièce, pour développer la quantité d'action ci-dessus 153458^{km}, pendant que le boulet parcourt la longueur de l'âme, longueur que nous réduirons à $2^{m},75$ environ à cause de la place occupée par la poudre, etc. En divisant 153458^{km} par $2^{m},75$ on trouvera, en effet, 55803^{kil} environ pour cette pression moyenne ; comme elle est répartie, avec la même intensité, sur la surface du cercle de section de l'âme, qui a $0^{m},15$ de diamètre, ou sur la surface $3{,}1416 \times \frac{(15)^2}{4} = 176$ centimètres carrés environ ; on voit que chacun de ces centimètres carrés sera pressé avec un effort de $\frac{55803}{176} = 317^{kil}$. La pression, exercée par

l'air atmosphérique sur chaque centimètre carré de la surface d'un corps, étant de $1^k,033$ environ dans les circonstances mentionnées au n° 87, l'effort moyen ci-dessus équivaut donc, à très-peu près, à 307 *atmosphères ;* l'effort réel et moyen des gaz de la poudre est au moins de 308 atmosph., attendu qu'indépendamment de l'inertie du boulet, cet effort doit vaincre aussi la pression de l'air extérieur.

En calculant, comme on l'a fait dans le n° 167, à l'occasion du choc des corps, le temps que mettrait cet effort moyen censé constant, à imprimer la vitesse de 500^m au boulet, on le trouvera égal à

$$\frac{12^k \times 500^m}{9^m,81 \times 55803^k} = 0'',011,$$ ou $\frac{1}{19}$ de seconde environ. Mais il serait aisé de prouver, d'après la rapidité avec laquelle croît la pression dans les premiers instants de l'inflammation de la poudre, que la durée du temps que le boulet met à parcourir l'âme de la pièce doit être moindre encore.

Il faut distinguer *l'effort moyen* de *l'effort réel* exercé, par la poudre, dans chaque position du boulet ; ce dernier effort est nécessairement variable, suivant cette position. D'après ce qui a été dit n° 172, on peut juger que, dans les cas ordinaires, il est au-dessous de l'effort moyen, à l'instant où l'inflammation commence et à celui où le boulet sort de la pièce ; qu'il le surpasse de beaucoup vers le moment de l'inflammation complète de la poudre ; qu'enfin cet effort moyen diffère considérablement de *l'effort absolu* et total que peuvent exercer les gaz de la poudre, lorsqu'ils sont contenus dans l'espace très-étroit occupé par le volume même de cette poudre, et qu'ils ne peuvent s'étendre en aucune manière. D'après Rumfort, cette pression absolue surpasserait 50000 atmosphères, d'après d'autres, elle serait beaucoup plus faible. M. Brianchon, savant professeur à l'école d'artillerie de Vincennes, a trouvé, par des calculs basés sur des considérations de physique et de chimie très-ingénieuses et très-plausibles, que la pression absolue de la poudre ne s'élève pas au delà de 4,000 atmosphères ; mais on conçoit que la manière dont on essaye la poudre et dont on entend sa pression, doit exercer une très-grande influence sur les résultats. Suivant les calculs hypothétiques de Hutton, par exemple, qui a fait ses expériences avec des canons ordinaires, la plus forte pression exercée sur le boulet serait environ 2000 fois celle de l'atmosphère ; mais, comme, suivant d'autres expériences directes (13), une pièce

de bronze de trois pouces d'épaisseur éclate avant que la pression soit de 1000 atmosphères, tandis que des pièces, de moindre épaisseur, ne sont pas même endommagées après un grand nombre de coups tirés à poudre, on peut présumer que ce résultat de Hutton est de beaucoup trop fort *.

178. *Examen et prix comparés du travail de la poudre et de la vapeur d'eau.* Si on voulait remplacer l'action de la poudre par celle de la vapeur d'eau introduite directement dans l'âme de la pièce, ainsi qu'on l'a proposé dans ces derniers temps, il faudrait, selon ce qui précède, employer, dans le cas d'une pièce de 24, cette vapeur sous une *pression constante* d'au moins 308 atmosphères, pour lancer le boulet avec la vitesse de 500^{m}, la longueur d'âme parcourue par ce boulet étant de 2^{m},75. En donnant à l'âme environ 8,8 fois cette longueur ou 24^{m},2, il suffirait d'employer la vapeur à une tension de 35 atmosphères, comme le propose l'ingénieur anglais Perkins ; mais il faudrait qu'elle affluât constamment avec cette force derrière le boulet, et que, par conséquent, elle ne subît aucun refroidissement (172) pendant qu'il parcourt la longueur de la pièce. Si le boulet devait être lancé seulement avec une vitesse moitié moindre ou de 250^{m}, il suffirait évidemment d'une pression moyenne égale au quart de 308^{at} ou de 77 atmosphères, en conservant la longueur d'âme ordinaire, et d'une longueur d'âme de 6^{m}, si la pression constante de la vapeur n'était que de 35 atmosphères; car les effets étant mesurés par la force vive imprimée dans chaque cas, sont entre eux comme les carrés des vitesses initiales du boulet.

On voit donc que l'emploi direct de la vapeur ne serait pas sans inconvénients dans les circonstances dont il s'agit, même en mettant de côté les dangers de toute espèce qu'il présente, parmi lesquels il faut surtout citer celui qui provient de la facilité qu'a la vapeur de passer, d'une tension déjà considérable, à une tension double ou triple, par suite d'une légère élévation de la température.

Du reste, on peut démontrer que la force motrice de la vapeur

* Le calcul de l'effort moyen exercé sur le boulet est indépendant de toute hypothèse, et, si l'on connaissait, par des expériences bien faites, cet effort ou la vitesse initiale correspondante pour des pièces de même calibre et de différentes longueurs d'âme, on en déduirait aisément la loi même des pressions exercées par les gaz de la poudre sur le boulet, car le frottement du boulet étant extrêmement faible, il n'y a pas lieu d'en tenir compte dans les calculs.

serait d'un usage beaucoup plus économique que celle de la poudre. Car, en admettant que le kilogramme de poudre de guerre coûte seulement 2 francs au gouvernement, chaque coup d'une pièce de 24, revient à $4 \times 2 = 8^{fr}$. Or les machines à vapeur les plus désavantageuses n'exigent guère que 5 à 6 kilogrammes de houille par heure et par chaque cheval de force ; et nous avons vu ci-dessus (177) qu'il faudrait 34 minutes, environ une demi-heure, de travail d'une telle force, pour lancer le boulet avec la vitesse de 500^{m} ; donc il en coûterait moins de 3^{kil} de houille par coup, c'est-à-dire moins de 9 centimes, en comptant la houille à 30^{fr} les 1000^{k}, tandis qu'on dépense actuellement, en employant la poudre, une somme environ 90 fois aussi forte.

179. *Aperçus sur les moyens d'utiliser l'action de la vapeur pour lancer les projectiles.* Il ne sera peut-être pas impossible de mettre à profit, un jour, cette grande économie de la force motrice de la vapeur, pour la défense des places de guerre ou des côtes ; mais il faudra probablement renoncer à l'emploi direct de la vapeur à de hautes tensions ou pressions, et l'on devra se borner à rechercher les moyens d'utiliser directement la force des machines à vapeur actuelles pour imprimer la vitesse aux projectiles. Le ressort de l'air atmosphérique paraît, sous ce rapport, offrir des avantages tout particuliers ; on conçoit, en effet, très-bien comment, dans l'état de perfection actuel des arts industriels, il serait possible, en se servant de la force des machines à vapeur ordinaires, de comprimer fortement (15) un certain volume d'air atmosphérique, de manière à lui faire occuper un espace beaucoup moindre ; et comment cet air, ainsi comprimé, pourrait être employé à lancer les boulets avec des canons ordinaires, un peu modifiés, de la même manière qu'on lance les balles avec le fusil à vent. Il suffirait de comprimer cet air dans un grand cylindre de fer d'une capacité de 1 à 2 mètres cubes, par exemple, et absolument semblable à celui des chaudières de machines à vapeur, puis de mettre momentanément l'intérieur de ce cylindre en communication avec l'espace compris entre le boulet et le fond de l'âme de la pièce, et de fermer cette communication à un instant convenable.

Supposons, pour offrir une nouvelle application de nos principes, que la capacité du cylindre servant de réservoir d'air comprimé, soit de $1^{mc},6$ ou de 1600 litres ; ce volume sera environ 29 fois

celui de l'âme du canon de 24 ; car, d'après les données ci-dessus (177), ce dernier volume $= 3^m,1 \times 0^{mq},0176 = 0^{mc},0546$ ou 55 litres, à très-peu près. Si donc on laisse échapper, de l'intérieur du réservoir, contre le boulet, une portion du volume total égal à 55 litres, ou plutôt, si on laisse ouverte la communication entre le réservoir et l'âme, jusqu'à l'instant où le boulet quitte la pièce, l'air occupant, à ce même instant, un volume égal à $1 + \frac{1}{29} = \frac{30}{29}$ de son volume primitif, la tension de cet air sera, d'après le principe de Mariotte (16), aussi réduite aux $\frac{29}{30}$ de sa valeur primitive ; et par conséquent, si cette tension était d'abord de 315 atmosphères, par exemple, elle se trouverait réduite à $315 . \frac{29}{30} = 304,5$ atmosphères au moment où le boulet quitterait la pièce. Or on peut présumer que, puisque les valeurs extrêmes de la tension diffèrent peu entre elles dans la supposition actuelle, l'effort moyen (73) de l'air, contre le boulet, différera aussi très-peu de celui qui répond à la *moyenne arithmétique* ou à la demi-somme $\frac{1}{2}(315 + 304,5) = 309,75$ atmosphères de ces valeurs extrêmes : cette moyenne surpassant l'effort moyen qui a été trouvé plus haut (177) pour le boulet de 24, chassé par la poudre, il est clair aussi que, abstraction faite des pertes, la pression qui lui correspond suffirait pour imprimer, à ce boulet, la vitesse de 500^m ; et que, s'il s'agissait seulement de lui communiquer une vitesse de 250^m, on pourrait se borner à comprimer l'air à 78 atmosphères seulement.

Néanmoins, attendu le frottement du boulet contre l'âme de la pièce, mais surtout à cause du *jeu* ou du *vent* qui laisserait échapper, en pure perte, une portion notable du fluide, il conviendrait d'augmenter de quelque chose la tension de l'air dans le réservoir, et mieux encore on ne préférait y faire arriver, par la machine à vapeur, de nouvel air pour remplacer celui qui se perd à chaque instant, de manière à rendre la tension à très-peu près constante ; car on voit bien, par les raisonnements qui précèdent, que, dans le cas contraire, la pression diminuerait, à chaque coup, d'un 30^{me} environ de la valeur qu'elle avait à la fin du coup précédent ; de sorte qu'après un certain nombre de coups, il s'en faudrait considérablement que la vitesse de 500^m fût transmise au boulet. C'est précisément là l'inconvénient attaché au fusil à vent ordinaire, et qui, joint à d'autres, a fait renoncer à son emploi malgré les avantages qu'il possède sous d'autres rapports.

Enfin, au lieu de procéder de l'une ou de l'autre de ces manières,

on pourrait aussi, mais non sans augmenter beaucoup les difficultés et les dangers d'explosion, se contenter de mettre en usage de très-petits réservoirs en bronze, d'une capacité égale, par exemple, à celle de la *gargousse* employée dans le tir ordinaire à poudre, laquelle, comme on vient de voir, occupe, dans les pièces de 24, un *espace cylindrique* d'environ 6 litres, tout compris, ou du 9^{me} de celui de l'âme entière. En se servant d'un aussi petit réservoir, il faudrait comprimer l'air à une tension de beaucoup supérieure à 300 atmosphères, et telle que, dans sa *détente* graduelle, il développât, contre le boulet et pendant que ce boulet parcourt la longueur de l'ame, la quantité de travail nécessaire pour lui imprimer la vitesse de 500^{m}. Nous n'avons pas d'ailleurs à examiner comment ces petits réservoirs, indépendants de la pièce comme les gargousses elles-mêmes, pourraient s'adapter solidement au fond de l'ame, ou dans le renflement de la culasse, et jouer absolument le rôle de la poudre lorsqu'on viendrait à lâcher la détente qui retient l'air; il nous suffit ici que l'hypothèse soit assez plausible, en elle-même, pour exciter quelque intérêt, et appeler l'attention du lecteur sur les applications des théories de la Mécanique.

C'est, au surplus, l'occasion de faire connaître la méthode de calcul que nous avons promise n° 72, méthode due au géomètre anglais Thomas Simpson, et par laquelle on peut évaluer, d'une manière très-approchée, le *travail mécanique variable*, ou, plus généralement, l'*aire superficielle* des figures planes limitées par des contours quelconques.

MÉTHODE GÉNÉRALE DES QUADRATURES POUR CALCULER L'AIRE SUPERFICIELLE DES COURBES PLANES.

180. *Démonstration géométrique de la méthode.* Soit $a'd'g'ga$ (fig. 39) une aire plane limitée par une portion de courbe $a'd'g'$, par la droite OB, servant d'axe des abscisses (51), et par les deux ordonnées extrêmes aa', gg', perpendiculaires à cet axe. Supposons qu'on ait divisé la distance ag, de ces ordonnées, en un *nombre pair* de parties égales, par exemple en 6 parties, aux points b, c, d, e, f, et qu'on ait élevé, en ces points, les nouvelles ordonnées bb', cc', ... ff', terminées à la courbe; on aura une première valeur approchée de l'aire mixtiligne $aa'd'g'ga$, en calculant les surfaces de chacun des trapèzes rectilignes $aa'b'b$, $bb'c'c$, ... $ff'g'g$, dont

elle se compose, puis ajoutant entre eux tous les résultats ; ce qui revient à remplacer la courbe par le polygone rectiligne $a'b'c'd'....g'$ qui lui est inscrit. Mais on obtient, sans être obligé de multiplier davantage les points de division, une valeur beaucoup plus approchée de l'aire cherchée en procédant comme il suit.

Ayant numéroté le rang des diverses ordonnées, comme on le voit sur la figure 39, on considérera, à part (fig. 40), l'aire mixtiligne $cc'd'e'ec$, limitée aux deux ordonnées impaires quelconques cc', ee', qui se suivent et qui comprennent entre elles l'ordonnée dd' de rang pair ; la surface totale des trapèzes rectilignes correspondants $cdd'e'$, $dee'd'$, aura pour mesure, puisque $de = cd$,

$$\tfrac{1}{2} cd\,(cc' + dd') + \tfrac{1}{2} de\,(dd' + ee') = \tfrac{1}{2} cd\,(cc' + 2dd' + ee').$$

Mais on obtiendrait évidemment une valeur plus approchée de l'aire $cc'd'e'e$, si, partageant cette aire en trois autres aires trapézoïdes $cmm'c'$, $mnn'm'$, $nee'n'$, par des nouvelles ordonnées équidistantes mm', nn', c'est-à-dire telles que $cm = mn = ne = \frac{1}{3} cd$, on prenait, pour cette valeur, la somme de trois trapèzes rectilignes inscrits correspondants, c'est-à-dire

$$\tfrac{1}{2} cm\,(cc' + mm') + \tfrac{1}{2} mn\,(mm' + nn') + \tfrac{1}{2} ne\,(nn' + ee'),$$

ou, attendu que $\frac{1}{2} cm = \frac{1}{2} mn = \frac{1}{2} ne = \frac{1}{6} ce = \frac{1}{3} cd$,

$$\tfrac{1}{3} cd\,(cc' + 2mm' + 2nn' + ee').$$

Or, pour s'éviter la peine de tracer les nouvelles ordonnées mm', nn', et pour obtenir néanmoins une approximation égale ou même supérieure, on remarquera que la corde $m'n'$ vient couper l'ordonnée intermédiaire dd', qui est à égale distance de mm' et de nn', en un point o tel que $od = \frac{1}{2} (mm' + nn')$, et que, par conséquent, $4od = 2mm' + 2nn'$; la valeur de l'aire rectiligne $cc'm'n'e'e$ devient donc simplement $\frac{1}{3} cd\,(cc' + 4od + ee')$.

Nous n'avons pas, il est vrai, l'ordonnée od immédiatement, mais elle diffère extrêmement peu de l'ordonnée véritable dd' de la courbe, que nous connaissons ; en remplaçant donc od par dd' dans les calculs, nous obtiendrons une mesure très-approchée, quoique un peu trop forte, de l'aire polygonale dont il s'agit. Mais, puisque cette aire est elle-même un peu plus faible que la véritable aire cor-

minée à la courbe, il se fera une sorte de compensation * si nous prenons, pour mesure de cette dernière, la quantité

$$\tfrac{1}{3}\,cd\,(cc' + 4dd' + ee').$$

On aura de même, (fig. 39),

$acc'a' = \tfrac{1}{3}\,cd\,(aa' + 4bb' + cc')$, $egg'e'e = \tfrac{1}{3}\,cd\,(ee' + 4ff' + gg')$; donc la surface totale $agg'd'a'$ qu'il s'agit de calculer, a, pour mesure,

$$\tfrac{1}{3}\,cd\,(aa' + 4bb' + cc' + cc' + 4dd' + ee' + ee' + 4ff' + gg'),$$

ou $$\tfrac{1}{3}\,cd\,[aa' + gg' + 4(bb' + dd' + ff') + 2(cc' + ee')],$$

c'est-à-dire *le tiers du produit qu'on obtient en multipliant, par l'intervalle constant compris entre les ordonnées de la courbe, la somme des ordonnées extrêmes, augmentée de deux fois celle des autres ordonnées de rang impair, et de quatre fois celle des ordonnées de rang pair.*

Les mêmes raisonnements demeurant applicables quel que soit le nombre des ordonnées équidistantes, pourvu qu'il soit *impair*,

* Il est évident qu'en prenant dd' pour od, on augmente l'aire polygonale de $\frac{1}{3}cd \,.\, 4od'$; mais, en traçant les nouvelles cordes $m'd'$, $n'd'$, il sera aisé de voir que la surface du triangle rectiligne $m'n'd'$ a pour mesure $\frac{1}{2}\,mn \times od'$; car il se compose des triangles $m'od'$, $on'd'$, dont la somme des surfaces

$$= \tfrac{1}{2}od' \,.\, md + \tfrac{1}{2}od' \,.\, dn = \tfrac{1}{2}od'(md + nd) = \tfrac{1}{2}od' \,.\, mn;$$

et comme $mn = \frac{2}{3}\,cd$, la surface du triangle $m'd'n'$ sera $\frac{1}{2}\,\frac{2}{3} \,.\, cd \,.\, od' = \frac{1}{3}cd \,.\, od'$. On a donc augmenté l'aire du polygone rectiligne $cc'm'n'e'ec$ de 4 fois le triangle $m'd'n'$, tandis qu'il faudrait l'augmenter de la somme des aires des segments compris entre la courbe et les cordes $c'm'$, $m'n'$ et $n'e'$. Par conséquent, si cette somme équivaut à 4 $m'd'n'$, la compensation sera exacte et la méthode rigoureuse; dans tous les cas, on ne risquera de se tromper que de la différence de cette somme et de 4 $m'd'n'$, différence qui ne sera généralement qu'une petite fraction de chacune d'elles, excepté pour quelques points *singuliers* de la courbe.

On voit, d'après cela, que, quand il s'agit de calculer, avec une grande exactitude, l'aire d'une figure plane limitée par des contours quelconques, il convient, non-seulement de multiplier beaucoup les ordonnées et de bien choisir l'axe des abscisses pour éviter la trop grande obliquité de ces ordonnées par rapport aux courbes, mais encore de partager l'opération en plusieurs opérations distinctes, soit qu'on multiplie davantage les ordonnées dans certaines parties, soit qu'on rapporte les courbes à plusieurs axes différents; en un mot, il faudra éviter que les trapèzes rectilignes ne diffèrent nulle part, d'une trop grande quantité, de trapèzes curvilignes correspondants. Il paraît bien clair d'ailleurs que, par la formule de Simpson, on approche, dans les circonstances ordinaires, non-seulement plus de la vérité qu'en calculant les valeurs des trapèzes rectilignes inscrits et limités aux ordonnées simples, mais même davantage encore que si l'on calculait celle des trapèzes relatifs à des ordonnées plus rapprochées d'un tiers.

on voit que la règle est générale; mais il est clair qu'elle ne donnera des résultats très-approchés, pour les parties de la courbe qui s'écarteraient considérablement de la forme d'une ligne droite, qu'autant qu'on divisera les intervalles, compris entre les ordonnées extrêmes, en un nombre pair de parties égales, assez grand pour que les trapèzes rectilignes inscrits ne diffèrent nulle part beaucoup des trapèzes véritables, ou qu'autant qu'on resserrera convenablement les ordonnées vers les parties dont la courbure est très-prononcée.

Il est également essentiel de remarquer que le calcul donnera des résultats un peu trop petits pour les parties de la courbe qui présentent leur concavité à l'axe des abscisses (*voyez* fig. 39, et un peu trop grands pour celles où cette courbe tourne sa concavité vers cet axe, comme cela a lieu pour la courbe de la fig. 41, par exemple.

DU TRAVAIL PRODUIT PAR LA DÉTENTE DES GAZ.

181. *Exemple de la manière de calculer ce travail.* Reprenons maintenant la dernière des questions du n° 179, et appliquons-y la méthode qui précède, en négligeant d'ailleurs, comme nous l'avons fait alors, le recul de la pièce qui est (175) presque toujours insensible. Cherchons, à cet effet, la loi que suivent les pressions de l'air à mesure qu'il se développe ou se *détend* en poussant le boulet en avant, c'est-à-dire (50) formons la *table* qui donne, pour chaque chemin parcouru par ce boulet dans l'intérieur de la pièce, la pression correspondante. Soit Oi (fig. 41) la longueur totale de l'âme, Oa la portion de cette longueur occupée primitivement par l'air, supposé comprimé à 1200 atmosphères; d'après ce qui a été admis à la fin du n° 179, Oa sera le $\frac{1}{9}$ de Oi, et le $\frac{1}{8}$ de l'espace ai parcouru par le boulet; divisant donc ai en 8 parties égales aux points b, c, d.... h, elles seront aussi toutes égales à Oa, et représenteront chacune des volumes cylindriques de l'âme, égaux à celui qu'occupe l'air comprimé. Ainsi, quand le boulet sera successivement arrivé en b, en c, en d, en e,.... en i, le volume primitif Oa de cet air, sera double, triple, quadruple.... nonuple. Donc, suivant la loi de Mariotte (16), la pression exercée par cet air, sur le boulet, qui d'abord était de 1200 atmosphères, n'en sera plus que la $\frac{1}{9}$

le $\frac{1}{8}$, le $\frac{1}{9}$, ... le $\frac{1}{9}$; c'est-à-dire qu'elle sera respectivement

de.	1200,	600,	400,	300,	240,	200,	171,	150,	133 atmosph.
aux points.	*a*,	*b*,	*c*,	*d*,	*e*,	*f*,	*g*,	*h*,	*i*,
ayant pour nos. . .	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,

Élevant les perpendiculaires aa', bb', cc', ... ii', sur Oi, et portant, sur ces perpendiculaires, des longueurs proportionnelles aux pressions correspondantes, on formera la courbe $a'b'c'$....i', nommée *hyperbole équilatère*. La surface de cette courbe, limitée aux ordonnées aa', ii' et à l'axe ai, représente, d'après le n° 72, la valeur du travail variable développé par le ressort de l'air contre le boulet; mais il n'est pas nécessaire de tracer la courbe elle-même pour obtenir la valeur de ce travail; le tableau ci-dessus suffit, en y appliquant la méthode du n° 180, car l'intervalle total ai se trouve justement divisé en un nombre pair de parties égales par les diverses ordonnées.

On a ici, en effet, pour

la somme des ordonnées extrêmes, ...	1200 + 133	= 1333^{atm}
2 fois celle des autres ordonnées impaires, .	2(400 + 240 + 171)	= 1622
4 fois celle des ordonnées paires, .	4(600 + 300 + 200 + 150)	= 5000
TOTAL		7955^{atm}

Il faudrait multiplier ce résultat (177) par 1^k,033, puis par la surface de 176 centimètres carrés du cercle de section de l'âme, c'est-à-dire par 181^k,81, pour avoir la somme des pressions véritables. Pour obtenir le travail total résultant de ces pressions, il faudra, de plus, multiplier cette somme par $\frac{1}{3}$ $ab = \frac{1}{3}$ Oa; le résultat sera donc $\frac{1}{3}$ $Oa \times 7955^{at} = 2651^{at},7 \times Oa$ multipliés encore par 181^k,81, ce qui donne finalement 482105^k,6 $\times$ Oa.

La courbe des pressions tournant sa convexité vers l'axe OB des abscisses, il est clair (180) que le résultat obtenu doit surpasser un peu le véritable; on voit aussi que la courbe diffère beaucoup d'une ligne droite dans la partie qui répond aux points b, c, d, e; il y a donc lieu de craindre que l'excès dont il s'agit soit assez considérable pour qu'on ne puisse le négliger; en conséquence, il conviendra de multiplier davantage les opérations vers les points b, c, d, e. Pour ne pas être obligé de recommencer tous les calculs, nous considérerons, à part, la portion de courbe comprise depuis aa' jusqu'à ee', et nous subdiviserons les intervalles primitifs des ordonnées en

deux parties égales aux nouveaux points m, n, p, q ; chacune d'elles sera donc égale à $\frac{1}{2}$ Oa, et les espaces occupés successivement par le volume primitif Oa de l'air, seront respectivement $Oa + \frac{1}{2} Oa = \frac{3}{2} Oa$ en m, $(2 + \frac{1}{2}) Oa = \frac{5}{2} Oa$ en n, $(3 + \frac{1}{2}) Oa = \frac{7}{2} Oa$ en p, enfin $\frac{9}{2} Oa$ en q. Par conséquent, d'après la loi de Mariotte, les pressions correspondantes seront les $\frac{2}{3}$, les $\frac{2}{5}$, les $\frac{2}{7}$ et les $\frac{2}{9}$ de la pression de 1200^{et} relative au point a ; en joignant à ces pressions, celles déjà calculées plus haut relativement aux points b, c, d, e, on formera, pour la portion ae, la nouvelle table qui suit :

pressions.	1200,	800,	600,	480,	400,	343,	300,	267,	240 atmosph.
points.	a	m	b	n	c	p	d	q	e
nos.	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Par conséquent,

somme des pressions extrêmes.	$1200 + 240 = 1440$ atm
2 fois celle des pressions impaires.	$2(600 + 400 + 300) = 2600$
4 fois celle des pressions paires. . .	$4(800 + 480 + 343 + 267) = 7560$
TOTAL.	11600 atm

qu'il faut d'abord multiplier par $\frac{1}{2} am = \frac{1}{6} Oa$, ce qui donne pour résultat $\frac{1}{6}$ $11600 \times Oa = 1933^{at},3 \times Oa$, et ensuite par $181^{k},81$. Mais, comme cette dernière multiplication se reproduirait à la fin de chaque résultat, et que nous ne voulons ici que comparer entre eux les chiffres de ces résultats, nous négligerons de l'effectuer, dans ce qui va suivre, afin d'abréger les calculs ; seulement on devra se ressouvenir, dans les applications particulières, que, pour obtenir le travail véritable, il restera encore à multiplier chaque nombre trouvé, par la pression totale qui répond à la surface de section de l'âme et à la pression atmosphérique moyenne.

En recherchant, comme on vient de le faire pour la partie $aa'e'e$, le surplus $ee'i'i$ de la surface de la courbe, et bornant simplement les opérations aux points de divisions f, g, h, qui donneront alors une approximation suffisante, on la trouvera égale à

$$\frac{1}{3} Oa\,[240 + 133 + 2 \cdot 171 + 4(200 + 150)]$$
$$= \frac{1}{3} 2115 \cdot Oa = 705^{at} \times Oa.$$

Le total général est donc $1933^{at},3 \cdot Oa + 705^{at} \cdot Oa = 2638^{at},3 \cdot Oa$, quantité très-peu moindre que celle $2651^{at},7 \cdot Oa$ trouvée précédemment ; ce qui prouve toute l'excellence de la méthode.

182. *Pression moyenne de l'air, vitesse imprimée, etc.* Puisque $ai = 8\,Oa$ représente la longueur d'âme $2^m,75$ décrite par le boulet, il est clair que $2638^{at},3 \,.\, Oa$, divisé par $8\,Oa$, ou $329^{at},8$, est précisément (177) la *pression moyenne*, sur chaque centimètre carré de surface, qu'exerce l'air dans sa détente contre ce boulet. On voit donc, sans aller plus loin, que la vitesse imprimée à ce dernier surpasserait 500^m dans les suppositions actuelles, puisque l'effort moyen de la poudre, pour imprimer cette vitesse, s'élève, au plus, à 308 atmosphères (177).

Il est très-facile, au surplus, de calculer quelle est la tension que devrait recevoir le volume ou la charge d'air, représentée par Oa, pour imprimer au boulet la vitesse juste des 500^m, tout restant le même d'ailleurs et la pression des 1200^{at} étant seule changée; il est évident, en effet, que les résultats partiels et totaux des opérations ci-dessus demeurent proportionnels à la pression primitive. On posera donc la proportion

$$329,8 : 1200 :: 308 : x = \frac{1200 \,.\, 308}{329,8} = 1121 \text{ atmosphères},$$

qui est la tension demandée. Pour obtenir un tel degré de tension à l'aide d'une machine à compression ou d'une pompe foulante, (179), il faudrait, d'après la loi de Mariotte, coercer, dans le petit espace représenté par Oa, un volume d'air, pris à la tension atmosphérique moyenne, qui serait égal à 1121 fois Oa; et, comme les densités sont *proportionnelles* aux pressions (36), on voit que le mètre cube de l'air ainsi condensé, pèserait aussi 1121 fois celui de l'air ordinaire dont le poids est, à peu près (40), de $1^k,3$, c'est-à-dire 1457^{kil} : la densité de l'air du réservoir devrait donc égaler presque $1\frac{1}{9}$ fois celle de l'eau, et son poids, qui serait (179) de

$$0^{mc},006 \times 1457^k = 8^k,742,$$

surpasserait même le double du poids de la charge dans le tir avec la poudre (177). Or il pourrait bien se faire que, par suite d'un tel rapprochement des parties, l'air se convertit en un liquide véritable, ainsi qu'il arrive pour plusieurs autres corps gazeux et notamment pour les vapeurs (3 et 5), lorsqu'on les comprime seulement de quelques atmosphères.

Quoi qu'il en soit, il paraît difficile d'admettre qu'on puisse, de longtemps encore, obtenir l'air à un pareil état de condensation,

et il y a lieu de croire par conséquent que la poudre, qui nous représente également un grand volume de gaz coercés dans un petit espace, et dont la tension est *neutralisée* par la force d'affinité ou d'agrégation des parties, que la poudre, qui est si facilement transportable, continuera, à moins de découvertes chimiques majeures, à remplir dans les combats le rôle qu'elle y joue depuis tant de siècles, malgré l'élévation de son prix comparé à celui des autres moteurs, et malgré l'inconvénient, quelquefois très-grave, qu'elle présente de rendre inhabitables les lieux clos où l'on en fait usage.

183. *Des avantages de la détente prolongée et de sa limite utile.* Nous avons supposé la pièce de la longueur ordinaire, mais on gagnerait nécessairement quelque chose, sur la tension primitive de l'air, en augmentant cette longueur; car ici les effets du refroidissement (177) ne paraissent pas, à beaucoup près, avoir autant d'influence que lorsqu'il s'agit des gaz de la poudre. Il n'en serait pas de même évidemment des pertes croissantes dues au jeu du boulet dans la pièce, au frottement, à la résistance de l'air atmosphérique extérieur, et il est probable que, passé un certain terme, on retirerait, en raison de ces pertes, fort peu d'avantages en augmentant les dimensions de l'âme : calculons néanmoins le surcroît d'effet produit par la détente prolongée de l'air, en négligeant tout à fait les pertes dont il s'agit.

Supposons d'abord que Oi (fig. 41) soit augmentée de deux parties ij, jk, égale chacune à Oa ou à $\frac{1}{9}$ de la longueur totale Oi de l'âme, considérée dans le premier cas (183); on trouvera, pour les pressions exercées en i, j, k respectivement,

$$\tfrac{1}{9}\,1200^{at} = 133^{at},\quad \tfrac{1}{10}\,1200^{at} = 120,\quad \tfrac{1}{11}\,1200^{at} = 109^{at}.$$

Donc (80 et 81) la surface de $ii'k'k$ aura, pour mesure $\frac{1}{2}\,Oa\,(133 + 109 + 4 \cdot 120) = Oa \times \frac{1}{2}\,722 = 240^{at},7 \times Oa$ environ; c'est-à-dire qu'en donnant à l'âme une longueur totale de $3^{m},10 + \frac{1}{9}\,3^{m},10 = 3^{m},80$, la quantité de travail de l'air sera augmentée d'à peu près $\frac{1}{10}$ de sa valeur $2638^{at},3 \times Oa$ relative à la longueur de $3^{m},10$.

En prolongeant de nouveau l'âme de $kr = ik = 2\,Oa$, on trouverait, de la même manière, que l'augmentation de travail du fluide serait de $200^{at} \times Oa$; la somme totale du travail développé par la

détente de ce fluide, pour la longueur d'âme de $4^m,48$ qui excède, de près de moitié, la longueur primitive, serait donc

$$(2638,3 + 240,7 + 200)\ Oa = 3079^{at} \times Oa,$$

c'est-à-dire qu'elle surpasserait de $\frac{1}{6}$ celle qui se rapporte à cette dernière longueur; de sorte que la force vive imprimée au boulet serait aussi plus forte de $\frac{1}{6}$. Quant à la pression moyenne, dans le cas actuel, on la trouvera en divisant le travail total $3079^{at} \times Oa$ par $ar = 12\ Oa$, longueur d'âme décrite par le boulet, ce qui donne $\frac{3079^{at} \times Oa}{12 \times Oa} = 256^{at},6$ environ : cette pression est, comme on voit, moindre que celle qui répond au tir ordinaire avec la poudre (177), quoique la force vive imprimée soit réellement augmentée dans le rapport de la quantité de travail $3079^{at} \times Oa$ à celle $308^{at} \times 8\ Oa = 2464^{at} \times Oa$, qui est relative à ce dernier cas, la longueur d'âme étant alors $8\ Oa$.

S'il s'agissait seulement d'imprimer au boulet la vitesse de 500^m, comme dans ce dernier cas il suffirait (182) de comprimer l'air du réservoir à la tension de $\frac{1200 \times 2464 \times Oa}{3079 \times Oa} = 960$ atmosphères environ. Pour une vitesse moitié ou de 250^m, il suffirait (178 et 182) de donner le quart de 1200^{at} ou 300 atmosphères de pression à l'air du réservoir, dans le cas de la pièce courte, et $\frac{1}{4}\ 960 = 240$ atmosphères dans le cas de la pièce longue. En allongeant de plus en plus l'âme, il est clair que le travail, produit par la détente, irait aussi en croissant; de sorte que, pour produire les mêmes effets, la pression absolue dans le réservoir pourrait être progressivement diminuée; mais on remarquera que, passé un certain terme, cet accroissement et cette diminution deviendraient extrêmement peu sensibles, considérés même abstraction faite de toutes les causes de pertes rappelées ci-dessus. Car nous avons trouvé, par nos diverses opérations, que le travail était proportionnel à $1933^{at},3$, pour le point e (fig. 41), à $1933^{at},3 + 705^{at} = 2638^{at},3$ pour le point i, à $2638^{at},3 + 240^{at},7 + 200^{at} = 3079^{at}$ pour le point r; de sorte que, dans la première partie ae de la détente, il est près du triple de celui qui répond à la seconde partie $ei = ae$, et près du quintuple de celui qui est développé dans la troisième

ir = *ae*. A une distance du point *a* égale à 100 fois *ae*, ou à 400 fois O*a*, la pression serait réduite à environ $\frac{1200^{at}}{400} = 3^{at}$, et le travail, sur une longueur égale à *ae* ou 4 O*a*, serait, au plus, 4 O*a* × 3^{at} = 12^{at} × O*a*, ou $\frac{1}{161}$ de celui qui est produit dans le premier intervalle *ae*, etc. Or on conçoit que les résistances et pertes de toute espèce suffiraient alors pour absorber ces faibles augmentations du travail.

En calculant d'ailleurs le travail total développé, par la détente de l'air, dans cette longueur d'âme de 100 fois *ae*, on le trouverait égal à environ 7200^{at} × O*a*, quantité qu'il faut diminuer, tout au moins, de celle 1^{at} × 400 O*a* = 400^{at} × O*a*, qui est absorbée par la pression de l'air atmosphérique extérieur; ce qui la réduit à 6800^{at} × O*a*, qui surpasse très-peu le double de la quantité de travail 3079^{at} × O*a* — 1^{at} × 12 O*a* = 3065^{at} × O*a* relative au point *r*; mais, attendu les autres genres de pertes, cette première quantité de travail serait bien moindre encore.

184. *Examen particulier des différentes causes qui diminuent les effets de la détente des gaz.* Nous avons déjà plusieurs fois remarqué que le frottement du boulet, dans l'âme de la pièce, est une quantité très-faible et qu'on peut toujours négliger, tandis qu'il en est tout autrement de la perte de gaz, occasionnée par le vent du boulet, laquelle tend continuellement à diminuer la densité et la pression intérieures, de manière à les faire différer de plus en plus de celles qui, selon la loi de Mariotte, auraient lieu, sans cette perte, pour chaque position du boulet. Connaissant le jeu de ce dernier dans l'âme, il ne serait pas impossible, à la rigueur, de calculer la perte de gaz dont il s'agit, d'après les lois de l'hydraulique qui seront enseignées dans la seconde année de ce Cours; car cette perte est proportionnelle à la vitesse avec laquelle le fluide tend à s'échapper en vertu de la pression intérieure, et à la surface du vide qui règne au pourtour du boulet, surface qui, à largeur égale, croît à peu près comme le calibre des pièces ou la circonférence du boulet.

Mais il est une autre cause de déchet de la force motrice, et qui exerce une influence peut-être plus grande encore sur la vitesse du boulet : c'est celle qui provient de l'inertie même du fluide. En effet, la force de ressort de ce fluide n'est pas uniquement employée

contre le boulet; une portion sert à imprimer le mouvement à ses propres molécules, et il en résulte une perte de travail mesurée (136) par la moitié de la somme des forces vives qui leur correspondent. Or la vitesse de ces molécules et leur poids total (182) étant généralement très-comparables à la vitesse et au poids du boulet, on conçoit que la perte dont il s'agit est généralement aussi très-appréciable, et mériterait d'être prise en considération, s'il s'agissait de calculer rigoureusement les circonstances du mouvement.

Il résulte de là d'ailleurs, que la pression éprouvée effectivement par le boulet, de la part des gaz, diffère plus ou moins de celle qu'il éprouverait, dans les mêmes positions ou pour les mêmes détentes, s'il était sans mouvement, ainsi que le suppose expressément la loi de Mariotte (16), que nous avons prise pour base de tous nos calculs; et cette remarque s'applique aussi à la tension qu'exerce le fluide sur les différents autres points des parois de la pièce ou sur lui-même, laquelle, d'après le principe de Pascal (14), se trouverait répartie également et en tout sens, s'il y avait repos. Cette tension varie d'un point à un autre de la longueur de l'âme, conformément à la remarque du n° 68 : elle est plus faible là où le fluide éprouve plus de facilité à se mouvoir, c'est-à-dire près du boulet; elle est plus forte, au contraire, là où il éprouve le plus de résistance, c'est-à-dire vers le fond de l'âme, puisqu'elle doit y vaincre à la fois la résistance provenant de l'inertie du boulet et de tout l'air interposé. Enfin il n'est pas moins évident que la vitesse du fluide varie, de son côté, selon la distance du boulet au fond de l'âme, et qu'elle est plus forte près du boulet qu'à la culasse où elle peut même devenir tout à fait nulle quand le recul (174) est empêché.

On voit, d'après cela, qu'il existe une relation nécessaire entre la vitesse et la tension ou la densité (36) des molécules en chaque point; de telle sorte que, cette densité étant précisément la plus faible là où la vitesse est la plus forte et réciproquement, il en résulte nécessairement aussi que la force vive des différentes *tranches* élémentaires du fluide, comprises entre des sections perpendiculaires à l'axe de la pièce, est une quantité toujours très-faible comparativement à celle qu'auraient ces mêmes tranches, si, conformément au principe de Pascal, la densité du fluide était la même partout, et si sa vitesse était aussi, dans les différentes tranches, égale à celle du boulet; c'est-à-dire que la force vive totale possédée par le fluide est, en réalité, une fraction toujours très-petite du pro-

duit de sa masse totale par le carré de la vitesse du boulet. Enfin il paraîtra non moins évident que, puisque la pression contre le fond de l'âme est plus forte que celle qui a lieu contre le boulet, la quantité de mouvement imprimée à la pièce (173) et qui produit le recul quand cette pièce est libre, doit être aussi plus grande que celle que reçoit le boulet ; de sorte que la vitesse du recul est, par un double motif (174), un peu plus forte que ne l'assigne le principe du n° 173.

185. *Réflexions nouvelles sur la déperdition inévitable de travail dans la réaction des corps, et sur les courtes mais rapides détentes des gaz.* Ce ne serait pas ici le lieu d'entrer dans de plus grands développements sur les lois du mouvement et de l'action des fluides élastiques, lois qui se reproduisent, d'une manière analogue, dans le choc ou la réaction plus ou moins brusque (153 et suiv.) des corps élastiques ; nous avons voulu seulement donner une idée de la nature des causes qui empêchent que la détente ait son entier effet, et prouver surtout que l'inertie des molécules des gaz, lorsque cette détente est rapide, peut exercer une certaine influence sur le mouvement transmis au boulet, et occasionner des pertes d'effet tout aussi appréciables que celles qui proviennent des fuites et des diverses résistances. Il est donc bien vrai de dire (140, 103 et suiv.) que la quantité de travail qui a été primitivement dépensée, pour changer la forme, la position ou en général l'état d'un corps, ne peut jamais être restituée d'une manière complète, ou sans qu'il y en ait une certaine portion de consommée, en pure perte, pour l'effet utile ; car il s'agit ici de gaz qui sont des corps éminemment élastiques.

A la vérité, on diminue considérablement les pertes de travail, occasionnées par l'inertie des molécules des gaz, en utilisant leur force de ressort contre des masses ou des résistances plus grandes que celles d'un boulet de canon ordinaire, et qui ne cèdent que lentement ou avec peu de vitesse à leur action ; mais alors les fuites augmentent rapidement avec le temps ; et si, dans la vue d'éviter ces fuites, on cherche à supprimer le jeu du boulet, qui est véritablement indispensable, on augmente considérablement le frottement de ce boulet contre l'âme de la pièce. Enfin, en admettant même que ces différentes causes de perte n'existassent pas, il arriverait encore qu'on ne pourrait utiliser complétement le travail

recélé dans le volume primitif des gaz, puisque le cylindre où se fait la détente, ne saurait recevoir, dans l'exécution, qu'une longueur fort restreinte par rapport à celle que lui assigne la théorie pour le *maximum* d'effet.

Ces dernières réflexions sont principalement applicables à la détente de la vapeur, dont il sera fait mention un peu plus loin; mais il ne faudrait pas en conclure généralement que la détente des fluides élastiques présente peu d'avantages, et que tout son effet est absorbé, dès les premiers instants où elle s'opère; car l'expérience prouve, même pour les gaz de la poudre dont l'action diminue beaucoup (173) par le refroidissement, que, si cet effet a une limite nécessaire dans chaque cas, cette limite n'est pourtant point aussi rapprochée qu'on pourrait d'abord le présumer d'après ce qui précède. On peut admettre, par exemple, que la détente, dans le cas examiné ci-dessus, et quand le vent est réduit à ce qui est strictement nécessaire, ne cesse pas d'être avantageuse tant que le volume occupé par les gaz n'excède pas le 40e ou le 50e du volume primitif. Nous verrons bientôt d'ailleurs que la limite relative aux machines à vapeur ordinaires est beaucoup plus restreinte.

On est obligé, dans l'artillerie, de se servir de pièces très-courtes, telles que les obusiers et mortiers qui servent à lancer des boulets creux; il semblerait donc, au premier aperçu, que les effets de la détente devraient y être à peu près nuls, de sorte qu'à charge égale de poudre, la force vive imprimée au projectile y serait beaucoup moindre que pour les pièces longues, ce qui n'est pas. Mais on doit observer que, dans les premières pièces, la charge est toujours très-faible par rapport au poids de l'obus ou de la bombe, et que le rapport du volume occupé par la poudre au volume total de l'âme, ne diffère pas beaucoup de celui qui est relatif aux pièces longues: or il en résulte que les quantités de travail totales développées par la détente des gaz doivent, à circonstances semblables, être encore à peu près les mêmes dans les deux cas, et que la seule différence doit consister en ce que la force motrice, la pression sur le projectile, est plus grande dans le dernier et opère son effet total dans un temps beaucoup plus court. C'est ce que démontrent, en effet, les principes qui suivent.

186. *Principes relatifs au travail produit par la détente des gaz.* L'un des plus importants d'entre eux consiste, lorsqu'on l'envisage

sous son point de vue le plus général, en ce que, quelle que soit la manière dont on fasse agir un volume donné de gaz comprimé à un certain degré, sur une résistance qui cède à son action, le travail développé sera, toutes choses égales d'ailleurs, constamment le même pour la même détente ou la même augmentation du volume primitif. Comme ce principe a de nombreuses applications dans les arts, nous ne croyons pas inutile de nous arrêter un instant à sa démonstration, en prenant pour exemple le cas des mortiers.

On sait que, dans ces armes, la poudre est enfermée dans une cavité cylindrique particulière ABCD (fig. 42), nommée *chambre*, et dont le diamètre est beaucoup plus petit que celui de l'âme ou du projectile; or, si nous faisons abstraction des propriétés physiques particulières de cette poudre, pour ne nous occuper que des effets de la simple détente des gaz qu'elle produit par son inflammation, si nous supposons, en d'autres termes, qu'elle soit remplacée par un volume égal de gaz comprimé à 1200 atmosphères, par exemple, comme dans le cas examiné plus haut, il nous sera facile de calculer la quantité de travail que, abstraction faite des pertes, ce gaz produira par sa détente dans l'intérieur de l'âme, en concevant toujours, pour la simplicité, le projectile remplacé par une sorte de piston ou cylindre de même diamètre que celui de l'âme, et qui serait terminé par une face plane MN du côté du fluide, hypothèse qui n'altère en rien les résultats, attendu qu'on prouve aisément, par les principes qui seront établis plus tard, que le travail, communiqué par le fluide, est indépendant de la forme du projectile pourvu qu'il remplisse exactement le contour de l'âme. Tout consistera donc encore à déterminer la valeur de la pression totale exercée, par le gaz, pour les diverses positions du plan MN.

Supposons, par exemple, que, le piston étant arrivé en *b*, le volume occupé alors par ce gaz soit égal à 6 fois le volume primitif ABCD; d'après la loi de Mariotte, la pression sur chaque centimètre carré de la surface de la section MN correspondante à *b*, sera aussi $\frac{1}{6}$ de 1200 atmosphères ou 200^{at}; par conséquent la pression totale, sur cette section, dont la surface est $\frac{22}{7} \cdot \frac{MN^2}{4}$, que nous représenterons par A, aura pour valeur A $\times$ 200^{at}, chaque atmosphère valant 1^k,033. Supposons encore que le piston chemine ju-

qu'en b', de telle sorte que le volume devienne les $\frac{1000}{999}$ de ce qu'il était en b, la pression sera donc aussi les $\frac{999}{1000}$ de $A \times 200^{at}$ ou $A \times 199^{at},8$, et la quantité de travail, développée sur MN le long du petit chemin bb' que nous nommerons e, aura pour mesure très-approchée (72),

$$\tfrac{1}{2}\, bb' (A \times 200^{at} + A \times 199^{at},8) = \tfrac{1}{2}\, bb' \,.\, A \times 399^{at},8 = e \times A \times 199^{at},9.$$

Maintenant, si nous considérons ce qui se passerait dans une pièce dont la section de l'âme serait beaucoup plus petite, et pour des positions du boulet répondant aux mêmes volumes du gaz ou aux mêmes degrés de détente; que nous représentions pareillement par a l'aire de cette section, et par E l'espace qui sépare les deux positions consécutives et correspondantes du piston, nous trouverons de même, pour la mesure du travail élémentaire développé par le gaz dans l'intervalle E dont il s'agit, $E \times a \times 199^{at},9$; de sorte qu'elle sera à la précédente dans le rapport de $e \times A$ à $E \times a$. Mais ces produits mesurent les augmentations du volume des gaz dans les intervalles e, E, et nous avons supposé que ces augmentations étaient les mêmes; donc les quantités de travail développées, dans les deux cas, sont aussi égales entre elles; et, comme nos raisonnements sont indépendants du degré de petitesse de l'accroissement égal du volume des gaz, comme ils s'appliquent à tous les accroissements pareils successivement éprouvés par le volume primitif, et quelle que soit la manière dont varient les sections MN ou la forme des vases qui contiennent les fluides moteurs, il en résulte une démonstration générale du principe ci-dessus qu'on peut énoncer ainsi :

Les quantités de travail totales, développées par un même volume de différents gaz sous une tension donnée, sont aussi les mêmes pour des détentes égales de ces gaz, quelle que soit d'ailleurs la manière dont s'opère cette détente par des moyens purement mécaniques, et pourvu que les circonstances soient semblables sous d'autres rapports.

Il est évident, en effet, que, si le jeu, le frottement des pistons et la vitesse de la détente n'étaient pas sensiblement les mêmes de part et d'autre, ou si la perte d'effet qui leur correspond différait beaucoup dans les deux cas, les quantités de travail, transmises à ces pistons, ne seraient pas non plus égales. Mais, quand il sera permis de négliger ces causes de pertes vis-à-vis de l'effet total, ou qu'on en tiendra compte, le principe sera rigoureusement vrai et

applicable, pourvu toutefois que les gaz restent dans des circonstances physiques semblables ; car nous avons vu (26) que leur tension est susceptible de varier avec la température, et que certains d'entre eux peuvent même se condenser ou se liquéfier par le refroidissement et la compression (3, 5 et 182).

La réciproque du principe ci-dessus se démontrerait d'une manière absolument semblable ; et, en admettant les mêmes restrictions, on pourra dire que,

Pour réduire de quantités égales un volume donné de différents gaz pris à une tension déterminée, il faut toujours dépenser la même quantité de travail, quelle que soit la manière dont on s'y prenne pour opérer mécaniquement cette réduction.

Ces principes sont évidemment des extensions de ceux des n^os^ 97 et 98, lesquels supposent également qu'il n'y ait aucun obstacle extérieur, aucune résistance étrangère, autres que ceux qui constituent la force de ressort et la force motrice directement opposée, qui viennent consommer inutilement du travail mécanique. Ces mêmes principes peuvent aussi être considérés comme de simples conséquences de celui de la réaction (64 et 68) ; car, puisque les gaz sont censés des corps parfaitement élastiques, il paraît, en quelque sorte, évident en soi que, pour amener leurs diverses molécules au même degré de tension ou de rapprochement, au même degré de mouvement, ou généralement au *même état*, il faut aussi dépenser la même quantité de travail de quelque façon qu'on opère mécaniquement ; et qu'à l'inverse, un gaz comprimé doit restituer, dans sa détente, une quantité de travail qui est uniquement relative à l'augmentation de son volume ou à la diminution de sa tension, toutes les fois que sa force vive n'a pas été sensiblement modifiée (142 et 184) ; mais c'est ce qui résulte aussi directement des propositions qui seront rigoureusement et généralement démontrées par la suite. Enfin, on conclut encore, de la démonstration ci-dessus, ainsi que des considérations mises en usage aux n^os^ 181 et suivants, que,

Lorsque l'on comprime ou laisse détendre des gaz différents et pris à des tensions différentes, d'une même fraction de leur volume primitif, les quantités de travail développées contre la résistance, ou consommées par la puissance, sont directement entre elles comme les produits de ces tensions et de ces volumes.

Cette proposition se démontre, en effet, aisément par la considéra-

tion géométrique de la courbe du travail relative à la détente des gaz (181, fig. 41), et elle servira utilement pour abréger les calculs dans certaines circonstances dont nous aurons des exemples dans ce qui va suivre.

DU TRAVAIL PRODUIT PAR L'ACTION MÉCANIQUE DE LA VAPEUR.

187. *Première idée du mode d'action de la vapeur dans les machines.* Le calcul du travail produit, par la détente de la vapeur, sur un corps qui cède à son action, s'effectue absolument de la même manière que pour l'air atmosphérique et les gaz permanents, quand on suppose que la vapeur ne subit point de refroidissement sensible pendant sa détente, et que par conséquent elle ne se condense ni en totalité ni en partie, ou ne se convertit pas à l'état liquide (3 et 5). Cette supposition n'est pas permise dans tous les cas, mais elle l'est sensiblement dans celui des machines ordinaires mues par la *vapeur d'eau ;* parce que la détente n'y est jamais poussée très-loin, et parce que, indépendamment des précautions qui sont prises pour empêcher le refroidissement extérieur des cylindres où se fait cette détente, la vapeur les traverse très-rapidement, et se renouvelle fréquemment ; de sorte qu'elle les maintient et les fait parvenir, au bout d'un certain temps, à un degré de chaleur très-peu différent de celui qu'elle possède elle-même. Il est évident que cela n'aurait pas lieu pour des cylindres froids, et pour les premiers instants où l'on y introduirait de la vapeur ; ces cylindres rempliraient la fonction des vases *réfrigérants* qui servent à condenser les vapeurs dans la distillation ordinaire par les alambics ; car, une partie de cette vapeur se trouvant réduite en eau, ce qui en resterait ne remplirait plus autant l'espace vide, et n'aurait plus le même degré de tension ; comme le prouvent très-bien les expériences entreprises par les physiciens, et dont les résultats seront exposés dans la seconde année de ce Cours. Ce que nous en disons ici est seulement pour éviter qu'on fasse de fausses applications des calculs et des principes.

Concevez (fig. 43) un cylindre LMNO, en métal et parfaitement solide, dans lequel se meut verticalement un piston AB parallèle aux fonds inférieur et supérieur NO, ML, et dont la tige CD traverse ce dernier fond, par une petite ouverture bien garnie d'*étoupes* huilées et disposées de manière à empêcher la vapeur de s'é-

chapper. Concevez, de plus, que le fond du cylindre communique, par un bout de tuyau EF, avec une chaudière fermée FJGH, demi-pleine d'eau et sous laquelle se trouve le foyer G, qui sert à chauffer cette eau et à la convertir en vapeur; supposez enfin que le tuyau EF puisse être fermé à volonté par un robinet en E, qui empêche la vapeur de se répandre sous le piston AB, quand cela est nécessaire. Enfin, concevez un second tuyau IQK, muni également d'un robinet en I, et qui serve à faire communiquer le cylindre LMNO avec un second cylindre fermé (X), nommé *cylindre de condensation* ou *condenseur*, quand on veut se débarrasser de la vapeur que le premier contient, et opérer son refroidissement, dans (X), par une gerbe d'eau fraiche, très-divisée, qu'on y fait arriver ou qu'on y *injecte* continuellement; vous aurez ainsi une idée exacte, quoiqu'incomplète, de ce que c'est qu'une machine à vapeur à *simple effet*, mais qui sera suffisante pour comprendre parfaitement l'objet actuel de nos calculs.

188. *Exemple de la manière de calculer le travail produit par la détente de la vapeur.* Nous supposerons que la température, la capacité de la chaudière (26) et la génération de la vapeur y soient telles qu'en ouvrant le robinet en E (fig. 43), la tension de cette vapeur (37 et suiv.) se maintienne constamment à $3\frac{1}{2}$ atmosphères sous le piston AB; de sorte que chaque centimètre carré de sa surface inférieure sera pressé, de bas en haut, avec un effort de $1^k,033 \times 3\frac{1}{2} = 3^k,6155 = 3^k,62$ environ, pendant tout le temps où la communication sera établie entre le cylindre et la chaudière. Supposant, en outre, que le diamètre du piston soit de $0^m,8$ ou 80 cent., sa surface sera de $3,1416 . (40)^2 = 5026,56$ centimètres carrés, et la pression totale qu'il supporte de $5026,56 \times 3^k,6155 = 18174^{kil}$ à très-peu près. En vertu de cette pression, il sera capable de soulever un poids ou de vaincre une résistance égale qui agirait à l'extrémité supérieure D du piston, et par conséquent de transmettre, à cette extrémité, une quantité de travail qui sera mesurée (71) par le produit de cette pression et du chemin parcouru, par le piston, pendant le temps où la communication avec la chaudière reste ouverte.

Par exemple si, à l'instant où le piston est arrivé en AB, à une distance aO du fond du cylindre, égale à $0^m,32$, on ferme le robinet en E, la quantité de travail, produite par la vapeur agissant avec

toute sa tension de $3^{at}\frac{1}{2}$ sur le piston, sera égale à $18174^k \times 0^m,32 = 5816^{km}$ environ. Maintenant, si nous admettons qu'on laisse détendre la vapeur jusqu'à occuper un volume égal à $4\frac{1}{2}$ fois environ son volume primitif représenté ici par Oa, le dessous du piston s'élèvera aussi à une hauteur Oe égale à $4\frac{1}{2}$ fois $Oa = 0^m,32$, ou à $1^m,44$; or il sera facile de calculer, par la méthode du n° 180, quel sera, dans cette hypothèse, le travail total communiqué par la vapeur au piston.

Pour cela, divisons la longueur $ae = 1^m,44 - 0^m,32 = 1^m,12$ de la course du piston, en un nombre pair de parties égales, par exemple en 4 parties, aux points b, c et d; chacune d'elles vaudra donc $\frac{1}{4}\ 1^m,12 = 0^m,28$ ou 28 centimètres. Et, en désignant par P la pression totale au point a, qui est de 18174^k, on pourra former la table suivante des espaces parcourus et des pressions successivement exercées par la vapeur, aux différents points, en se rappelant toujours la loi de Mariotte (16) relative à la compression des gaz, et qui est ici applicable également (186) à la vapeur d'eau :

positions du piston, . . .	a,	b,	c,	d,	e,
espaces parcourus, . . .	32c,	60c,	88c,	116c,	144c,
pressions correspondantes,	P,	$\frac{32}{60}$ P,	$\frac{32}{88}$ P,	$\frac{32}{116}$ P,	$\frac{32}{144}$ P,
ou, simplifiant, ...	P,	$\frac{4}{15}$ 8P,	$\frac{4}{22}$ 8P,	$\frac{4}{29}$ 8P,	$\frac{4}{36}$ 8P,
ou enfin, ...	18174^k,	$9692^k,8$,	$6608^k,7$,	$5013^k,5$,	$4038^k,7$,
n° des pressions, ...	1,	2,	3,	4,	5

Donc on aura

kil

somme des pressions extrêmes, ... $= 18174^k + 4038^k,7 = 22212,7$
2 fois celle des autres pressions impaires, ... $= 2 \times 6608^k,7 = 13217,4$
4 fois celle des pressions paires, ... $= 4(9692^k,8 + 5013^k,5) = 58825,2$
Total 94255,3

Par conséquent la valeur approchée du travail produit par la détente de la vapeur, sera (180) $= \frac{1}{2}\ 0^m,28 \times 94255^k,3 = 8797^{km}$, en nombre rond. En y ajoutant le travail de 5816^{km}, produit, avant l'instant de la détente, comme on l'a trouvé ci-dessus, on aura, pour le travail total communiqué par la vapeur pendant la course entière du piston, $14613^{km} = 146,13 + \frac{1}{3}\ 146,13 = 194,84$ chevaux (82).

189. *Méthodes abrégées de calcul employées dans l'industrie; com-*

duit de sa masse totale par le carré de la vitesse du boulet. Enfin il paraîtra non moins évident que, puisque la pression contre le fond de l'âme est plus forte que celle qui a lieu contre le boulet, la quantité de mouvement imprimée à la pièce (173) et qui produit le recul quand cette pièce est libre, doit être aussi plus grande que celle que reçoit le boulet ; de sorte que la vitesse du recul est, par un double motif (174), un peu plus forte que ne l'assigne le principe du n° 173.

185. *Réflexions nouvelles sur la déperdition inévitable du travail dans la réaction des corps, et sur les courtes mais rapides détentes des gaz.* Ce ne serait pas ici le lieu d'entrer dans de plus grands développements sur les lois du mouvement et de l'action des fluides élastiques, lois qui se reproduisent, d'une manière analogue, dans le choc ou la réaction plus ou moins brusque (153 et suiv.) des corps élastiques ; nous avons voulu seulement donner une idée de la nature des causes qui empêchent que la détente ait son entier effet, et prouver surtout que l'inertie des molécules des gaz, lorsque cette détente est rapide, peut exercer une certaine influence sur le mouvement transmis au boulet, et occasionner des pertes d'effet tout aussi appréciables que celles qui proviennent des fuites et des diverses résistances. Il est donc bien vrai de dire (140, 103 et suiv.) que la quantité de travail qui a été primitivement dépensée, pour changer la forme, la position ou en général l'état d'un corps, ne peut jamais être restituée d'une manière complète, ou sans qu'il y en ait une certaine portion de consommée, en pure perte, pour l'effet utile ; car il s'agit ici de gaz qui sont des corps éminemment élastiques.

A la vérité, on diminue considérablement les pertes de travail, occasionnées par l'inertie des molécules des gaz, en utilisant leur force de ressort contre des masses ou des résistances plus grandes que celles d'un boulet de canon ordinaire, et qui ne cèdent que lentement ou avec peu de vitesse à leur action ; mais alors les fuites augmentent rapidement avec le temps ; et si, dans la vue d'éviter ces fuites, on cherche à supprimer le jeu du boulet, qui est véritablement indispensable, on augmente considérablement le frottement de ce boulet contre l'âme de la pièce. Enfin, en admettant même que ces différentes causes de perte n'existassent pas, il arriverait encore qu'on ne pourrait utiliser complétement le travail

recélé dans le volume primitif des gaz, puisque le cylindre où se fait la détente, ne saurait recevoir, dans l'exécution, qu'une longueur fort restreinte par rapport à celle que lui assigne la théorie pour le *maximum* d'effet.

Ces dernières réflexions sont principalement applicables à la détente de la vapeur, dont il sera fait mention un peu plus loin; mais il ne faudrait pas en conclure généralement que la détente des fluides élastiques présente peu d'avantages, et que tout son effet est absorbé, dès les premiers instants où elle s'opère; car l'expérience prouve, même pour les gaz de la poudre dont l'action diminue beaucoup (173) par le refroidissement, que, si cet effet a une limite nécessaire dans chaque cas, cette limite n'est pourtant point aussi rapprochée qu'on pourrait d'abord le présumer d'après ce qui précède. On peut admettre, par exemple, que la détente, dans le cas examiné ci-dessus, et quand le vent est réduit à ce qui est strictement nécessaire, ne cesse pas d'être avantageuse tant que le volume occupé par les gaz n'excède pas le 40e ou le 50e du volume primitif. Nous verrons bientôt d'ailleurs que la limite relative aux machines à vapeur ordinaires est beaucoup plus restreinte.

On est obligé, dans l'artillerie, de se servir de pièces très-courtes, telles que les obusiers et mortiers qui servent à lancer des boulets creux; il semblerait donc, au premier aperçu, que les effets de la détente devraient y être à peu près nuls, de sorte qu'à charge égale de poudre, la force vive imprimée au projectile y serait beaucoup moindre que pour les pièces longues, ce qui n'est pas. Mais on doit observer que, dans les premières pièces, la charge est toujours très-faible par rapport au poids de l'obus ou de la bombe, et que le rapport du volume occupé par la poudre au volume total de l'âme, ne diffère pas beaucoup de celui qui est relatif aux pièces longues: or il en résulte que les quantités de travail totales développées par la détente des gaz doivent, à circonstances semblables, être encore à peu près les mêmes dans les deux cas, et que la seule différence doit consister en ce que la force motrice, la pression sur le projectile, est plus grande dans le dernier et opère son effet total dans un temps beaucoup plus court. C'est ce que démontrent, en effet, les principes qui suivent.

186. *Principes relatifs au travail produit par la détente des gaz.* Un des plus importants d'entre eux consiste, lorsqu'on l'envisage

paraison de ces méthodes avec la précédente. Si, pour obtenir une première valeur approchée du travail produit pendant la détente, on se fût borné à partager l'intervalle *ae* en deux parties égales au point *c*, on eût trouvé, pour cette valeur, ... $\frac{1}{2}\,ac\,(18174^{k} + 4038^{k},7 + 4 \times 6608^{k},7) = \frac{1}{2}\,0^{m},56 \times 48647^{k},5 = 9081^{km}$, quantité de $\frac{1}{10}$ environ plus forte que celle 8797^{km} trouvée par la première opération, et à laquelle on pourrait, pour la simplicité des calculs, s'arrêter dans l'estimation pratique de la force des machines à vapeur. En effet, si on ajoute ce travail à celui qui a été développé avant l'instant de la détente, on trouvera au total 14897^{km}, qui ne surpasse que de $\frac{1}{51}$ environ le total relatif au premier mode d'opérer, et qui diffère extrêmement peu du véritable, comme on peut s'en assurer en subdivisant encore les intervalles *ab, bc*.... en deux ou trois parties égales.

Les mécaniciens et les constructeurs de machines à vapeur se contentent souvent de prendre, pour la valeur du travail relatif à la détente, le *produit de la demi-somme ou de la moyenne des pressions extrêmes par la longueur de l'espace parcouru pendant cette détente.* Ainsi, dans notre cas, ils obtiendraient

$$\frac{1}{2}\,ae\,(18174^{k} + 4038^{k},7) = 1^{m},12 \times 11106^{k},35 = 12439^{km},$$

quantité qui surpasse de beaucoup celle 8797^{km} qui résulte de nos calculs, et qu'on ne saurait adopter que comme une approximation très-grossière, et d'autant plus insuffisante que, règle générale, il vaut mieux estimer la force des moteurs au-dessous qu'au-dessus de sa véritable valeur, afin de ne pas s'exposer à des mécomptes dans l'établissement des machines de l'industrie.

On voit bien d'ailleurs que cette methode, qui revient à prendre, pour l'aire du trapèze curviligne *aa'c'e'e* (fig. 43), la mesure du trapèze rectiligne *aa'e'e*, ou à supposer que le travail de la détente s'opère en vertu d'une pression constante (171), moyenne arithmétique entre les extrêmes, on voit bien, dis-je, que cette méthode n'est guère plus simple que celle qui consiste à considérer une troisième pression intermédiaire *cc'*, et que nous avons proposée ci-dessus comme suffisamment exacte dans les applications ordinaires.

190. *Notions plus étendues sur les machines à vapeur à simple et*

à double effet. Nous avons laissé ci-dessus (187) le piston au moment où il est parvenu au haut de sa course : or il faut concevoir qu'à cet instant, le robinet en I s'ouvre et laisse passer la vapeur dans le *condenseur* (X) par le tuyau IQK ; le robinet, en E, restant toujours fermé, et la tension diminuant considérablement sous le piston, ce dernier descend par son poids ou par le jeu de la machine qui reçoit le mouvement du sommet de la tige CD. Le dessous du piston étant donc arrivé au bas de sa course en NO, il faut supposer que le robinet, en I, se ferme aussitôt, et que celui, en E, s'ouvre pour laisser arriver, de nouveau, la vapeur de la chaudière sous le piston, et recommencer le même travail que dans l'ascension précédente, et ainsi de suite alternativement. C'est, en effet, là ce qui se passait dans les anciennes machines à *simple effet,* dites de *Newcomen ;* seulement la vapeur n'y agissait pas avec détente ; elle affluait *en plein,* de la chaudière, pendant toute la course du piston ; enfin la condensation de la vapeur s'opérait dans l'intérieur même du cylindre LMNO, ce qui le refroidissait considérablement à chaque *oscillation,* et produisait (187) un déchet énorme de la force motrice.

On doit à Watt, célèbre mécanicien anglais, l'invention et l'usage du *condenseur* séparé (X) ; et on lui doit également l'idée d'avoir fait agir la vapeur aussi bien dans la descente que dans la montée du piston ; ce qui constitue véritablement les *machines* dites *à double effet.* Pour avoir une idée des moyens qu'il employa, afin d'atteindre ce but, il faut concevoir un troisième tuyau TSR, qui mette en communication la chaudière FHGJ avec le dessus du piston, au moment où celui-ci est parvenu au haut de sa course, et qui porte un robinet en R pour intercepter la vapeur à l'instant convenable de la descente du piston ; il faut aussi concevoir un 4e tuyau UVZ avec un robinet en U, qui serve, comme le tuyau IQK, à évacuer la vapeur dans le condenseur (X) au moment où, le piston étant arrivé au bas de sa course, il doit de nouveau remonter par l'action de la vapeur qu'on fait affluer au-dessous, à l'aide du tuyau EF, alors ouvert en E. Enfin il faut concevoir que les mêmes choses, que nous avons expliquées précédemment pour la montée du piston et la vapeur agissant en dessous, se reproduisent, de la même manière, pour sa descente et la vapeur qui agit alors au-dessus ; de telle sorte que les robinets E, U, qui s'ouvrent simultanément pour la montée, restent au contraire fermés pendant toute la descente,

et qu'à l'inverse, les robinets, en I et R, qui se ferment à la fois pour toute la montée, s'ouvrent au contraire à l'instant de la descente.

191. *Du travail effectif des machines à vapeur, à basse pression, sans détente, et des effets de la pompe à air.* Dans les machines qui portent encore, de nos jours, le nom de *Watt*, la vapeur agit en *plein*, ou sans détente, pendant chaque course du piston, c'est-à-dire au-dessous pendant la montée et en dessus pendant la descente, de sorte que sa tension est constamment la même que dans la chaudière; de plus, cette tension ne surpasse que, de très-peu, celle d'une atmosphère (d'un quart environ), ce qui a fait nommer ces machines, *machines à basse pression et sans détente*. On voit, d'après cela, combien leur calcul devient facile à l'aide du principe du n° 71, puisque le travail produit, soit pendant la montée, soit pendant la descente du piston, a pour mesure le *produit de la longueur effective de sa course par la pression totale qu'exerce, sur sa surface*, la vapeur qui afflue de la chaudière, pression que nous savons bien calculer (188).

Toutefois, il est essentiel d'observer que, pendant sa montée comme pendant sa descente, le piston devant chasser, devant lui, la vapeur qui se rend dans le condenseur (X), il éprouve, de la part de cette vapeur, une certaine résistance dont il faut nécessairement tenir compte dans les calculs. En effet, cette vapeur ne se réduit pas instantanément ni complétement à l'état liquide ou en eau; le refroidissement n'est pas assez considérable pour que cela ait lieu; et, quand bien même il le serait assez, l'air atmosphérique, qui est amené continuellement, de la chaudière, avec la vapeur, et qui provient de ce que l'eau ordinaire en contient toujours une petite quantité entre ses molécules, de la même manière que le vin de Champagne mousseux, par exemple, contient du gaz *acide carbonique* (3), cet air, disons-nous, empêcherait encore que le vide (36) fût parfait dans le condenseur, ou que la tension y fût totalement anéantie. Bien mieux, l'eau et l'air s'accumulant sans cesse dans ce condenseur, la tension y croîtrait de plus en plus, de manière à empêcher tout à fait le jeu de la machine; c'est pourquoi on ne manque jamais, d'après Watt, de joindre à cette machine une pompe séparée, dite *pompe à air*, et dont le piston, mis en mouvement par elle, sert à aspirer l'air et l'eau du condenseur (X) au

moyen d'un petit tuyau de communication, débouchant en Y. Malgré cette précaution importante, il reste encore assez de vapeur et d'air dans la capacité (X), pour que la tension, exercée contre le piston moteur AB, s'élève dans les bonnes machines ordinaires, de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{5}$ d'atmosphère ou de $0^k,10$ à $0^k,20$ par centimètre carré de surface; il en résulte donc, qu'il faudra diminuer la quantité de travail mentionnée ci-dessus, de toute celle qui est développée, en sens contraire du mouvement, par la pression dont il s'agit; ce qui ne présente point de difficulté, comme on le verra tout à l'heure (193).

Mais ce n'est pas là tout encore, le piston AB laisse fuir une certaine portion de la vapeur qui produit son mouvement; il frotte contre le cylindre, quelle que soit la perfection avec laquelle son intérieur ait été dressé ou *alésé*, et ce frottement est ici très-considérable; enfin la machine se compose de beaucoup d'autres pièces qui frottent également, et elle doit, en outre, faire mouvoir la *pompe à air*; de sorte qu'il ne parvient réellement à la roue dont l'arbre porte le *volant* de la machine, et de laquelle se prend le mouvement-moteur dans les applications de la vapeur aux diverses machines industrielles, il ne parvient, disons-nous, à cette roue qu'une portion assez faible du travail qui a été directement développé par la vapeur contre le piston *. Dans le cas des bonnes machines à vapeur ordinaires de Watt, de la force effective de 10 à 12 chevaux, on devra compter seulement sur les $0,55 = \frac{11}{20}$ du travail de la vapeur, calculé comme il a été dit plus haut : pour les machines beaucoup plus fortes, les résistances et pertes sont proportionnellement moindres, parce que les plus influentes d'entre elles s'exercent simplement sur le pourtour ou la circonférence des pistons, tandis que la pression motrice agit sur la surface entière de ces mêmes pistons : on peut prendre alors, pour la valeur de la quantité de travail utile, les 0,6 ou $\frac{3}{5}$ de celle que donne le calcul. Enfin, par un motif tout opposé, on devra, pour les machines de 6 chevaux et au-dessous, prendre les 0,5 ou $\frac{1}{2}$ seulement de ce même

* Nous n'avons pas mentionné l'influence qui pourrait être exercée par l'inertie propre les molécules de la vapeur (184), par celle du piston et des diverses autres pièces de la machine; car, d'une part, le mouvement est toujours ici très-lent ou surpasse généralement peu la vitesse de 1^m par seconde (*voy.* la fin du n° cité), et, de l'autre, ce mouvement se rapportant à ceux que nous avons nommés *périodiques* (49), il n'y a, sous ce double rapport (141 et 152), aucun motif d'en tenir compte dans les calculs.

travail. Ces chiffres doivent être considérés d'ailleurs comme des données fondées sur la comparaison des résultats du calcul à ceux de l'expérience ; nous les rapportons ici pour que le lecteur puisse, dès à présent, appliquer utilement ces calculs à la pratique, et sans craindre de commettre des erreurs ou des méprises graves.

192. *Notions relatives aux machines à vapeur, à moyenne pression, avec détente.* On appelle ainsi les machines à double effet dans lesquelles la vapeur agit à une tension de 3 à 4 atmosphères au plus ; ces machines ont pris le nom de *Woolf* qui, le premier, a réalisé et mis à profit les avantages de la détente déjà annoncés par Watt ; elles sont aujourd'hui généralement adoptées en France, où elles ont été introduites, depuis 1815, par M. *Edwards*, mécanicien anglais très-habile, et elles ne diffèrent absolument des machines de Watt, dont il vient d'être question, qu'en ce qu'elles ont deux cylindres et deux pistons moteurs distincts ; de sorte que la vapeur, au lieu de se rendre tout d'abord de la chaudière au cylindre LMNO (fig. 44), n'y parvient qu'après avoir agi, *sans détente*, sous le piston A'B' d'un premier cylindre L'M'N'O', dont la hauteur est à peu près la même, mais dont le diamètre est beaucoup plus petit et ordinairement moitié de celui du grand. Le mouvement des deux pistons AB, A'B' est lié à celui d'une même machine par le moyen de tiges, de balanciers, etc., de façon qu'ils s'élèvent ou s'abaissent, à chaque instant, de quantités à peu près égales.

La vapeur arrive dans le cylindre L'M'N'O', et en sort exactement de la manière qu'il a été expliqué ci-devant (190), si ce n'est qu'en quittant la chaudière, elle se rend d'abord dans un *réservoir* particulier qui enveloppe, de toutes parts, les deux cylindres, et qui est formé d'une sorte de *chemise*, en fonte de fer, exactement fermée : l'objet de ce *réservoir enveloppe* est de garantir la vapeur qui agit sur les pistons des cylindres moteurs, de tout refroidissement extérieur et d'assurer ainsi (184 et 187) les effets de sa détente. Mais comme c'est au détriment du calorique contenu dans la vapeur qui arrive de la chaudière, qu'on obtient un tel avantage, cette disposition, à laquelle Woolf et ses successeurs attachent une certaine importance, n'est pas très-heureuse en elle-même, et il semble qu'il eût été beaucoup plus convenable, dans tous les cas, de faire servir au même objet, la vapeur qui a déjà produit son effet sur les pistons, en la faisant circuler dans le réservoir enveloppe après sa sor-

tie du grand cylindre LMNO. Quoi qu'il en soit, on remarquera que la vapeur arrive, du petit cylindre L'M'N'O', dans le grand cylindre LMNO, par le moyen des tuyaux l'G'L, U'G'O, qui mettent le dessous du piston AB en communication avec le dessus du piston A'B', ou réciproquement ; et qu'après avoir agi par détente sous ce dernier piston, elle se rend directement au condenseur (X), par les moyens déjà expliqués dans le n° précédent.

Il nous suffit ici que l'on comprenne bien le rôle que joue la vapeur dans cette disposition ; nous entrerons dans les détails descriptifs nécessaires quand il s'agira d'étudier spécialement les propriétés de la vapeur considérée comme moteur des machines de l'industrie. Or, d'après ce qui a été dit du cas (190) d'un seul piston, on conçoit très-bien, par exemple, que les robinets en R', I', I, étant fermés, et les robinets en U', U étant ouverts au moment où les pistons A'B' et AB, après être arrivés à la fois au bas ou à la fin de leur course descendante, vont en recommencer une autre nécessairement ascendante ; on conçoit, dis-je, très-bien que le piston A'B', tout en recevant par dessous l'action de la vapeur qui afflue constamment par le tuyau EF, va chasser devant lui la vapeur placée au-dessus et qui y est arrivée dans la course descendante, de manière à en être pressé, en sens contraire, et à la refouler de plus en plus sous le grand piston AB, à mesure que, l'un et l'autre, ils s'élèvent d'un mouvement commun dépendant des résistances de la machine. Le piston AB va donc aussi être poussé, de bas en haut, avec un effort mesuré, à chaque instant, par la tension de la vapeur qui occupe à la fois les deux capacités A'B'L'M', ABON; et cette tension qui, en vertu du principe de Pascal (14), se répartit encore uniformément sur tous les points, attendu que la vitesse du mouvement est ici très-faible (184 et 191), sera, par suite de la loi de Mariotte (16), toujours relative au rapport du volume qu'elle occupait d'abord dans la capacité entière du petit cylindre L'M'N'O', au volume total A'B'L'M' + ABON qu'elle occupe maintenant à la fois, dans les deux cylindres. Enfin on conçoit que le piston AB chassant devant lui, dans le condenseur (X), la vapeur qui est au-dessus, il s'en trouve pressé avec un effort répondant à une tension d'environ (191) $0^k,15$ par centim. carré.

Maintenant, si l'on suppose les pistons arrivés au haut des cylindres, et que les communications qui étaient fermées s'ouvrent, et que celles qui étaient ouvertes se ferment, la vapeur de la chau-

dière affluera au-dessus du piston A'B' par le tuyau TR, et chassera dans le second cylindre, celle qui est au-dessous, de sorte que les mêmes choses s'opéreront en sens inverse.

Quelle que soit cette complication apparente d'effets, le calcul du travail transmis aux pistons ne présente pas plus de difficultés que dans les suppositions très-simples du n° 188; bien mieux, il n'y a absolument rien à y changer; car, en vertu des principes du n° 186, nous sommes sûrs que, si la tension et le volume primitifs de la vapeur, introduite, à chaque oscillation, de la chaudière dans les cylindres, sont les mêmes de part et d'autre, et qu'il en soit ainsi également du volume occupé par cette vapeur à la fin de son action, c'est-à-dire, à l'instant où elle va se rendre dans le condenseur (X), la quantité totale de travail, qu'elle aura transmise à la machine par l'intermédiaire des tiges de pistons, sera aussi la même dans les deux cas *.

* La vérité de cette conséquence particulière est très-facile à établir directement. En effet, soit A la surface, en mètres carrés, du piston AB, A' celle du piston A'B', a, a', les espaces infiniment petits Aa, A'a', décrits, pendant un même instant très-court, par ces mêmes pistons; soit enfin p la moyenne valeur de la pression variable (72) exercée, par la vapeur, dans la durée de cet instant et pour un mètre carré de la surface des pistons, pression qui est la même pour tous deux (14), et qui agit pour augmenter le travail de AB et pour diminuer celui de A'B'; la pression totale sur AB sera pA, et sur A'B', pA'. Par conséquent, le travail total, produit pendant que le volume ABON+A'B'L'M devient abON+$a'b'$L'M', ou augmente de la quantité abBA−$a'b'$B'A', aura pour mesure (72) p . A × a − p . A' × a' = p (A × a − A' × a'); mais les produits A × a, A' × a' sont respectivement égaux aux volumes abBA, $a'b'$B'A'; donc le travail dont il s'agit a, pour valeur, le produit de la pression p par l'augmentation de volume de la vapeur comprise entre les deux pistons. Ce produit étant aussi (186) la mesure du travail qui serait développé, dans le cas d'un seul cylindre (188), par une égale détente d'un volume égal de vapeur pris à la même tension, il est clair que tous les travaux partiels analogues seront aussi égaux, et que conséquemment le travail total sera le même, de part et d'autre, si la tension et le volume sont aussi les mêmes à la fin de la détente.

Cette proposition est, comme on le voit, entièrement indépendante des diamètres et de la longueur de course des divers pistons; et il en résulte, en particulier, que la méthode fort simple que nous avons prescrite, dans le texte, pour calculer le travail des machines à détente et à deux pistons, doit, quant aux résultats, coïncider parfaitement avec la formule approximative qui a été proposée, pour le même objet, par M. de Prony, dans son intéressant *Rapport sur les machines à vapeur du Gros-Caillou*, à Paris, inséré au tome 12 des *Annales des mines*, année 1826. Cette formule basée, comme ses règles de calcul, sur la méthode des quadratures de Thomas Simpson (180), suppose d'ailleurs qu'on partage seulement en deux parties égales l'intervalle relatif aux positions extrêmes de la course des pistons; ce qui conduit naturellement (189) à des résultats un peu plus forts que les véritables, principalement pour les détentes qui excèdent ½ fois le volume primitif de la vapeur.

193. *Calcul de la force des machines à vapeur à moyenne pression avec détente.* Supposons que la tension dans la chaudière soit la même que dans le n° 188, et que le volume de vapeur, à cette tension, introduite, par chaque *demi-oscillation* des pistons AB et A'B', dans le cylindre L'M'N'O', volume qui a pour mesure la surface de A'B' en mètres carrés par la longueur entière de la course, soit précisément égal au volume de vapeur introduit, de la même manière et avant l'instant de la détente, sous le piston AB (fig. 43), du n° 188. Supposons enfin que le volume de la détente soit également $4\frac{1}{2}$ fois le volume primitif dans les deux cas, ce qui revient évidemment à admettre que le volume *cylindrique* de la course du grand piston AB (fig. 44), soit égal à $4\frac{1}{2}$ fois celui de la course du petit piston A'B', et par conséquent aussi égal au volume cylindrique de celle du piston de la fig. 43, il en résultera (188) que la quantité de travail, transmise par la vapeur, à la machine, pendant la demi-oscillation dont il s'agit, aura pour valeur totale 14613^{km}. Mais, attendu (191) que la vapeur du condenseur presse le dessus du piston AB (fig. 44) avec un effort d'environ $0^{k},15$ par centimètre carré, il faudra diminuer la quantité de travail ci-dessus, de toute celle que développe, en sens contraire du mouvement, ce même effort pendant la course entière de AB ; or cette dernière quantité de travail est précisément égale encore à celle que développe la vapeur du condenseur contre le piston de la fig. 43; donc elle a pour valeur, d'après les données du n° 188,

$$0^{k},15 \times 5026,56 \times 1^{m},44 = 1086^{km} \text{ environ};$$

de sorte que le travail de la vapeur se trouve réduit à

$$14613^{km} - 1086^{km} = 13527^{km}$$

pour une demi-oscillation des pistons, et à $2 \times 13527^{km} = 27054^{km}$ pour une oscillation entière, puisque le travail produit pendant la montée est exactement le même que celui qui est produit dans la descente. Partant, si la machine fait régulièrement 15 de ces oscillations entières par minute ou par 60″, le travail produit, dans chaque seconde, sera égal à $\frac{15}{60} 27054^{km} = \frac{1}{4} 27054^{km} = 6763^{km},5$, ce qui équivaut à une force de $\frac{4}{3} 67,635 = 90,18$ chevaux-vapeur.

Les machines de Woolf, à deux pistons moteurs, étant composées d'un plus grand nombre de pièces que celles de Watt, qui n'en ont qu'un seul, le frottement y a aussi plus d'influence, et l'on peut

admettre que le travail de la vapeur y est réduit aux 0,45 de sa valeur pour les machines de la force de 10 à 12 chevaux, aux 0,50 pour celles qui sont beaucoup plus puissantes, et aux 0,40 pour celles qui n'ont que la force de 5 à 6 chevaux. Nous avons trouvé ci-dessus, pour le travail développé, par la vapeur, dans chaque seconde, la quantité de 90,18 chevaux; donc le travail effectivement transmis à l'arbre du volant de la machine (191), équivaudra à la force de $\frac{1}{2}$ 90,18 = 45 chevaux au moins, puisque cette dernière quantité surpasse de beaucoup 12 chevaux.

C'est de cette manière qu'on devra se conduire dans tous les cas où il s'agira de calculer la force d'une machine à vapeur, à détente, quelque compliquée qu'elle soit. On n'aura qu'à s'informer exactement ou à s'assurer, par des mesures directes, 1° de la tension de la vapeur dans la chaudière; 2° du volume de cette vapeur introduit à chaque course des pistons; 3° du rapport de ce volume à celui qu'elle occupe à la fin de la détente; 4° enfin de la tension dans le condenseur, qu'on estimera d'ailleurs approximativement (191), si on manque de mesures directes. Cela étant, on supposera tout simplement que ce même volume de vapeur est introduit sous le piston d'un cylindre unique de diamètre quelconque, et l'on agira comme il est expliqué dans le n° 188 et celui-ci.

194. *Des machines à haute pression, sans condenseur.* Ces machines ne diffèrent des précédentes que parce que la vapeur y agit à une tension de 6 à 10 atmosphères, et qu'on y a supprimé le condenseur, qui n'a d'utilité réelle que quand on peut se procurer sans trop de difficultés, une certaine quantité d'eau fraîche; car cette eau devant être renouvelée à chaque oscillation de la machine, il en faut souvent une masse très-considérable, ainsi qu'on le verra dans la seconde année de ce Cours. L'usage de ces machines s'est principalement borné, jusqu'ici, à mouvoir des chariots sur les chemins de fer, ce qui les a fait nommer *locomotives,* et c'est à l'ingénieur anglais Trevithick qu'on doit cette application. Néanmoins Olivier Evans, dans les États-Unis d'Amérique, les a employées comme moteurs *stationnaires* des autres machines de l'industrie; mais elles sont peu usitées en France, à cause des inconvénients et des désavantages qu'elles présentent. On conçoit, en effet, que les dangers doivent augmenter avec la tension de la vapeur, et que les fuites, les frottements qui ont lieu autour des pistons, doivent y être

aussi plus considérables que dans les machines à basse ou à moyenne pression ; et, comme la face du piston opposée à l'action de la vapeur y est en communication directe avec l'air extérieur par les soupapes U et I (fig. 43 et 44), qui sont alors ouvertes, il résulte, du principe de Pascal (14), que cette face est repoussée, en sens contraire du mouvement, avec une force (37) d'environ $1^k,033$ par chaque centimètre carré de surface ; ce qui occasionne un déchet de travail énorme, qui n'a pas lieu au même degré (191), dans les machines avec condenseur.

D'après cette courte notice sur les machines à haute pression, on comprend que le calcul du travail qu'elles produisent peut s'effectuer absolument de la même manière que pour les autres machines, soit qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas détente, et qu'il s'agit seulement de remplacer la tension $0^k,15$, provenant du condenseur, par $1^k,033$ environ, et de diminuer le résultat obtenu dans une proportion un peu plus forte, vu l'augmentation du frottement des pistons, des fuites de la vapeur et du refroidissement beaucoup plus grand qu'elle éprouve à la haute température qui répond à 8 ou 10 atmosphères. Ce ne sera pas trop, sans doute, de supposer que l'effet utile est réduit aux 0,4 ou même aux 0,35 du résultat donné par le calcul, selon les circonstances plus ou moins favorables de l'établissement de la machine.

Un ingénieur français, M. Frimot, a imaginé, dans ces derniers temps, d'utiliser l'action de la vapeur qui, dans les machines à haute pression s'échappe, en pure perte, dans l'atmosphère, en la faisant passer directement, après sa sortie du cylindre moteur, sous le piston d'une machine à détente ordinaire avec condenseur. Il est évident qu'on n'éprouvera pas plus de difficulté à calculer, pour ce cas, le travail utile de la vapeur, si on connaît bien les conditions de son emploi ; car il s'agit véritablement de deux machines distinctes, dont l'une reçoit directement la vapeur de la chaudière, et l'autre la reçoit de la première machine, sous une tension et un volume déterminés. On appliquera, d'ailleurs, aux résultats séparés des calculs, les différentes corrections qui, selon ce qui précède, sont relatives à chaque genre de machines, et au mode plus ou moins avantageux de l'emploi de la vapeur.

195. *Limite utile de la détente dans les machines à vapeur.* Revenons aux calculs et aux considérations très-simples du n° 188, il

nous sera facile ensuite d'étendre les conséquences de nos raisonnements au cas des machines à deux cylindres. Supposons donc que le cylindre LMNO (fig. 43), étant prolongé indéfiniment vers sa partie supérieure, on laisse la vapeur se détendre, de plus en plus, au-dessous du piston AB ; il est clair que le travail s'accroîtrait sans cesse, si à mesure qu'elle augmente de volume, cette vapeur ne perdait pas de son énergie naturelle, par suite du refroidissement plus ou moins sensible qu'elle éprouve, ou des fuites qui se font toujours entre le piston et le cylindre; négligeons néanmoins ces causes de perte, et voyons jusqu'à quel point la détente peut être prolongée sans inconvénient.

S'il n'y avait pas de frottements dans la machine, ou si ces frottements étaient très-faibles, il conviendrait de laisser la vapeur se détendre jusqu'à l'instant où la pression deviendrait égale à celle, $0^k,15$, qui a lieu dans le condenseur (191) : la tension qui a lieu dans la chaudière, étant (188) de $3^k,6155$, on voit que le volume de la vapeur introduite à chaque demi-oscillation, devrait être les

$$\frac{0^k,15}{3^k,6155} = \frac{1500}{36155} = \frac{1}{24}$$ environ de l'espace cylindrique total décrit par le piston AB, ou, en d'autres termes, la hauteur totale de la course de ce piston, devrait être 24 fois celle qui répond à l'instant où la communication EF se ferme. Mais, comme les résistances de toute espèce, inhérentes à la machine, consomment ici environ la moitié (191 et 193) du travail de la force motrice, on comprend aisément qu'une telle augmentation de la détente serait non-seulement sans utilité, mais même nuisible à l'effet de la machine, vu que ces résistances resteraient à peu près les mêmes pour les diverses positions du piston. En effet, puisque les résistances en question absorbent, à elles seules (193), la quantité de travail $\frac{1}{2}\,13527^{km} = 6763^{km},5$ pendant la longueur de course $Oe = 1^m,44$, leur valeur moyenne $\frac{P}{2}$, qui est sensiblement constante pendant cette même course, sera environ

$$\frac{6763^{km},5}{1^m,44} = 4697^{kil};$$

or on voit, par le tableau du n° 188 et sans aller plus loin, que la pression, exercée par la vapeur, ne serait pas même suffisante pour vaincre cette énorme résistance à l'instant qui répond à la position e du piston, où le volume de la vapeur est devenu $4\frac{1}{2}$ fois son volume primitif répondant au

point *a* de la course. A plus forte raison, serait-elle incapable de communiquer un excès de travail à la tige CD du piston, si sa détente était prolongée au delà du point *e*.

Ce serait donc une disposition très-vicieuse que celle où on laisserait développer la vapeur beaucoup au delà de 4 fois son volume primitif, dans une machine à un seul cylindre. A la vérité, on pourrait, dans la vue de diminuer le travail des résistances nuisibles, diminuer plus ou moins la longueur de course du piston, et se contenter d'augmenter le diamètre du cylindre de façon que le volume de vapeur, primitivement introduit à chaque demi-oscillation, occupât moins de hauteur sous ce piston, par exemple une hauteur égale à la moitié ou au tiers de O*e*, tout en produisant ensuite une quantité égale de travail par sa détente; mais on augmenterait par là beaucoup aussi la surface frottante du piston contre l'intérieur du cylindre, et les pertes dues à l'augmentation des fuites ou à la pression produite par la vapeur du condenseur sur la face opposée de ce piston.

Ces divers inconvénients n'ont pas lieu, au même degré, dans les machines à deux cylindres (fig. 44); car il suffit, pour augmenter la détente, d'augmenter convenablement le diamètre du grand cylindre, sans rien changer au petit; de sorte que la vapeur agit avec les mêmes avantages avant l'instant de sa détente, et n'éprouve une diminution d'effet qu'à partir de son entrée dans le grand cylindre. C'est là probablement un des motifs qui, en France, ont fait, malgré leur complication, accorder la préférence aux machines à deux cylindres sur les autres; d'autant plus que, dans ces machines, la pression varie moins que dans celles-ci, attendu, qu'au moment même où la pression est la plus faible sur le grand piston, elle est la plus forte sur le petit, et réciproquement; ce qui tend à régulariser beaucoup le jeu des pièces de la machine, et fait épargner (95 et 96) une portion plus ou moins grande du travail de la vapeur.

Toutefois l'augmentation de la détente, au delà d'un certain terme, n'en occasionne pas moins, dans les différents cas, un surcroît de pertes de travail, qui absorbe, en totalité, les avantages propres à cette détente, et ceci explique suffisamment pourquoi les artistes habiles, qui construisent les machines à vapeur d'après le système de Woolf, ne prolongent jamais la détente au delà de 4 à 5 fois le volume primitif, malgré l'exagération des promesses que leur font les théories abstraites de beaucoup d'auteurs, qui oublient

de prendre en considération, dans la recherche du *maximum* d'effet de la vapeur, l'énorme réduction qu'il éprouve de la part des résistances de toute espèce. Nous ne pouvons d'ailleurs présenter ici le calcul de ces résistances et du *maximum* d'effet qui y est relatif : il ne serait pas à sa place ; nous y reviendrons, avec quelques détails, dans la partie de ce Cours qui est spécialement destinée à l'examen des moteurs *.

196. *Méthode abrégée pour calculer le travail des machines à vapeur.* Nous avons donné, dans ce qui précède (193), un exemple de la manière dont on doit s'y prendre pour calculer, dans chaque cas, la quantité de travail produite par un volume donné de vapeur agissant sur les pistons d'une machine ; mais il ne sera pas inutile de faire connaître un moyen d'abréger les calculs relatifs à la détente, en se servant du dernier des principes énoncés au n° 186. On voit en effet (192), qu'il suffira de calculer, une fois pour toutes, une table qui donne le travail transmis au piston d'une machine à détente quelconque, par un certain volume de vapeur prise à une tension déterminée, et pour les diverses hypothèses qu'on peut faire sur cette détente ou sur le rapport du volume occupé par la vapeur au moment où elle va se rendre au condenseur, à celui qu'elle occupait à l'instant où elle s'est détendue sous le piston de la machine ; car on en conclura facilement ensuite, dans chaque cas particulier et par une simple proportion, la valeur même du travail que, dans toute autre circonstance, elle serait capable de développer sur les pistons d'une machine différente.

Supposons, par exemple, que nous sachions, d'après la table, qu'un *mètre cube* de vapeur introduite, à la tension *atmosphérique* ordinaire, sous les pistons d'une machine dans laquelle la détente est de $4\frac{1}{2}$ fois le volume primitif, communique à ces pistons, dans une course entière ou demi-oscillation de la machine, une quantité de

* Voilà près de trois années que nous exposons les idées qui précèdent dans nos Cours de l'École d'application de l'artillerie et du génie ; nous avons même tenté, dans les leçons de l'année dernière, de donner la formule complète qui exprime l'effet des machines à deux cylindres avec détente, en tenant compte de tous les genres de résistances. Il en résulte que, pour chaque disposition particulière des pièces et pour une dépense du travail moteur déterminée, cette détente, ou le rapport des volumes du grand et du petit cylindre, a une limite assez rapprochée ; que la vitesse des pistons doit être généralement très-petite, sans nuire à la régularité du mouvement ; que la longueur du balancier doit être au contraire la plus grande possible sans nuire à la solidité et sans entraîner dans de trop fortes dépenses, etc.

travail représentée par F, et qu'il s'agisse de calculer quel travail x produira, pour la même détente, un volume de vapeur de $0^{mc},25$, sous une tension de $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ atmosphères, on n'aura qu'à écrire (186) la proportion

$$1^{mc} \times 1^{at} : \tfrac{7}{2}{}^{at} \times 0^{mc},25 :: F : x; \text{ d'où } x = \frac{7 \times 0,25}{2 \times 1 \times 1} F = \tfrac{7}{4} 0,25 F = 0,875 F.$$

Restera à diminuer cette valeur de x de la quantité de travail que développe, en sens contraire, la vapeur du condenseur, dans une course entière de celui des pistons, qui est en communication directe avec ce condenseur; après quoi on achèvera le calcul comme il a été expliqué nos 193 et suiv. On conçoit très-bien au surplus, d'après tout ce que nous avons dit jusqu'à présent de la détente de la vapeur et des gaz en général, comment on peut former une telle table en prenant pour base des calculs, afin de simplifier les opérations subséquentes, le travail qui serait produit par 1^{mc} de vapeur, agissant à 1^{at} de pression sur un piston dont la surface, d'ailleurs arbitraire (186), serait, pour la commodité, prise égale à un mètre carré. C'est, en effet, ainsi que nous avons obtenu la table suivante.

Tables des quantités de travail totales produites, sous différentes détentes, par 1 *mètre cube de vapeur d'eau prise à la tension de* 1 *atmosphère.*

VOLUME APRÈS LA DÉTENTE.	QUANTITÉ DE TRAVAIL CORRESPONDANTE.	VOLUME APRÈS LA DÉTENTE.	QUANTITÉ DE TRAVAIL CORRESPONDANTE.	VOLUME APRÈS LA DÉTENTE.	QUANTITÉ DE TRAVAIL CORRESPONDANTE.
	km		km		km
1,25	12 635	4,25	25 277	7,25	30 794
1,50	14 518	4,50	25 867	7,50	31 144
1,75	16 111	4,75	26 426	7,75	31 483
2,00	17 490	5,00	26 955	8,00	31 811
2,25	18 707	5,25	27 459	8,25	32 129
2,50	19 795	5,50	27 940	8,50	32 437
2,75	20 780	5,75	28 399	8,75	32 736
3,00	21 679	6,00	28 839	9,00	33 027
3,25	22 506	6,25	29 261	9,25	33 310
3,50	23 271	6,50	29 665	9,50	33 585
3,75	23 984	6,75	30 055	9,75	33 854
4,00	24 650	7,00	30 431	10,00	34 116

Nota. Quand il n'y a pas détente ou que le volume reste égal à 1, le travail produit par l'action directe du mètre cube de vapeur est 10330^{km}.

197. *Application particulière.* Pour montrer comment on doit se servir de cette table, nous prendrons encore pour exemple les données des n^os^ 188 et 193, où la vapeur est introduite dans la machine, sous la tension de $3\frac{1}{2}$ atmosphères, et doit se détendre jusqu'à occuper $4\frac{1}{2} = 4{,}50$ fois le volume primitif. La première chose à calculer est la valeur de ce volume primitif, ce qui est toujours facile quand on connaît bien la constitution de la machine : dans le cas du n° 188, ce volume est évidemment, en mètres cubes, $3{,}1416 \times (0^m{,}4)^2 \times 0^m{,}32 = 0^{mc}{,}16085$; la table donne, pour la même détente du mètre cube de vapeur à 1^at^, la quantité de travail 25867^{km} ; donc, d'après ce qui vient d'être dit (196), celle qui répond à $3\frac{1}{2}$ ^at^ et aux $0^{mc}{,}16085$, sera les $\frac{7}{8}$ $0{,}16085 \times 25867^{km}$ ou $0{,}56297 \times 25867^{km} = 14562^{km}$. Cette quantité est un très-petit peu moindre (de $\frac{1}{257}$ environ) que la valeur qui a été trouvée au n° 188 pour une demi-oscillation du piston ; ce qui doit être (180), attendu que nous avons poussé très-loin le degré d'approximation pour les nombres du tableau.

Connaissant ainsi le travail développé par la vapeur dans une demi-oscillation de la machine, on achèvera le calcul de la manière indiquée n^os^ 191, 193 et 194, c'est-à-dire qu'on aura soin de diminuer les résultats de tout ce qui est consommé par les résistances nuisibles ; il faudra ne pas oublier, d'ailleurs (195), que pour les détentes qui excèdent 5 fois le volume primitif, il s'en faut de beaucoup que les résultats soient aussi forts que l'indiquent les nombres du tableau. On devra généralement supposer, au contraire, que, quand la détente est poussée au delà de 6 ou 7 fois le volume primitif, la quantité de travail utile est plutôt moindre que supérieure à celle qui répond à 5 fois ce volume.

198. *Observations générales.* Avant de terminer le sujet qui vient de nous occuper, je dois encore une fois prévenir les lecteurs que, parlant des principales machines en usage, je n'ai point eu l'intention d'en faire la nomenclature complète ni même une description qui suffise à l'intelligence de leur mécanisme : on les trouvera dans les recueils et traités spéciaux sur ces machines, ainsi que dans le t. III du Cours de M. Dupin, où elles sont décrites avec toute la clarté et les développements nécessaires pour en bien faire saisir l'ensemble. Quant à l'histoire de la découverte des machines à vapeur, on consultera, avec une entière confiance, l'excellente Notice

qui vient d'en être donnée, par M. Arago, dans l'*Annuaire du bureau des longitudes* pour l'an 1829*, et où ce célèbre académicien a rétabli, à l'aide de recherches critiques difficiles et impartiales, les droits que les mécaniciens français, notamment *Salomon de Caus* et *Papin*, ont acquis à cette importante découverte; on y trouvera également une description claire et précise des parties essentielles des machines à vapeur, et des perfectionnèments successifs qu'elles ont reçus jusqu'à nos jours.

On ne doit pas oublier enfin que nous avons entendu nous occuper uniquement de l'action mécanique directe de la vapeur considérée dans l'état où elle parvient de la chaudière aux cylindres : en exposant, par la suite, les qualités physiques de cette vapeur par rapport au calorique qui la produit et dans l'action duquel réside véritablement la force motrice (99 et suiv.), nous ferons connaître quelles sont les autres modifications, les autres déchets que cette force éprouve avant d'être transformée en travail effectif et immédiatement applicable aux besoins de l'industrie. Pour le moment, il nous suffira de dire, comme résultat de l'expérience, que le travail d'un cheval coûte environ 5^{k} de bonne houille, par heure, dans les machines de Watt, bien construites et de force moyenne; qu'elle en coûte moitié moins, ou environ 2^{k},5, dans les meilleures machines de Woolf; qu'enfin les machines à haute pression et à détente, telles que les construisait Olivier Evans, à Philadelphie, consommaient presque autant que les machines de Watt, et qu'on peut présumer que les machines *locomotives* de cette espèce, ou qui servent à traîner les chariots sur les routes en fer, en consomment de 8 à 10^{k}, toujours par heure, par cheval et pour une force de 10 à 12 chevaux.

Quant aux machines à haute pression qui, telles que celles de M. Frimot (194), utilisent en plus grande partie l'action de la vapeur en la faisant détendre sous les pistons de plusieurs cylindres analogues à ceux des machines de Woolf; l'expérience semble démontrer qu'elles offrent, sous le rapport de la consommation du combustible, un avantage à peu près égal à celui de ces dernières machines agissant sous des pressions moyennes de 3 à 4 atmosphères seulement.

* Ce petit ouvrage, qui se vend au prix modique de 1 fr., ne saurait être trop recommandé aux personnes qui n'en ont point encore la connaissance, pour la foule de données et de documents précieux qu'il contient sur les arts et les sciences d'application.

DE LA RÉSISTANCE DES FLUIDES HOMOGÈNES ET INDÉFINIS, OU DE L'ACTION QU'ILS EXERCENT SUR LES CORPS SOLIDES.

199. *Lois générales de cette résistance.* Quand un corps solide se meut, avec une vitesse constamment uniforme (48 et 52), dans un fluide indéfini et en repos, c'est-à-dire dans un fluide dont l'étendue est très-grande par rapport à celle de ce corps, tel que serait, par exemple, l'air atmosphérique relativement aux corps ordinaires qui le traversent, ou la mer, un lac, un étang, une très-large rivière par rapport aux vaisseaux ou aux bateaux qui les parcourent; dans cette circonstance, disons-nous, le corps éprouve, de la part du fluide et dans le *sens* même de son mouvement, une *pression*, une *résistance* mesurable à chaque instant en kilogrammes, et qui varie, comme on l'a déjà dit (113) à l'occasion de l'air, suivant la forme, les dimensions et la vitesse du corps.

Pour faire saisir à peu près les lois que suit cette résistance dans chaque cas particulier, nous supposerons qu'un corps (A), fig. 45, de forme quelconque et qui est plongé dans un fluide indéfini, se meuve *parallèlement à lui-même*, de A vers B, avec une certaine vitesse V et de manière, par exemple, à décrire constamment (48) le chemin $e = V \times t$ dans le très-petit temps t; il est évident que ce corps va pousser devant lui un certain nombre de molécules du fluide, et les forcer à s'éloigner, de part et d'autre de sa surface, avec une certaine vitesse. Or, à circonstances égales d'ailleurs, la somme de ces molécules sera d'autant plus grande que le corps occupera lui-même un plus grand espace dans le sens perpendiculaire au mouvement; c'est-à-dire que, si on projette, par exemple, ce corps sur un plan CD perpendiculaire à AB, ce qui revient à lui circonscrire un cylindre parallèle à la direction du mouvement et à couper ce cylindre par le plan CD, la quantité totale des molécules déplacées ou repoussées croîtra, pour des surfaces ou corps semblables dans toutes leurs parties, et qui seraient mus de la même manière dans le fluide, avec l'étendue de la projection dont il s'agit.

Mais elle croîtra aussi comme l'espace ou le chemin e décrit dans chacun des instants égaux à t; nommant donc Q le volume total, en mètres cubes, de ces molécules entraînées par le corps (A), et A l'aire ou la surface, en mètres carrés, de la projection de (A) suivant CD, on conclura, par un raisonnement analogue à celui qui a

été mis en usage dans les nos 71 et 78, que Q croîtra comme $A \times e$, c'est-à-dire deviendra double, triple, etc., quand Ae sera double, triple, etc., pour le même corps ou pour des corps différents dont la surface serait semblable et semblablement dirigée par rapport au mouvement.

D'un autre côté, le corps (A), en cheminant dans le fluide, imprime aux molécules de Q une vitesse d'autant plus grande que la sienne l'est elle-même davantage : il est clair, par exemple, que, si le corps décrit, dans le même temps élémentaire, un chemin double ou triple, il faut bien aussi, toutes choses égales d'ailleurs, que les molécules de Q décrivent un chemin double ou triple dans ce temps, pour lui faire place ; conséquemment la vitesse de chacune de ces molécules croît comme V, et leur force vive (122) comme V^2. Nommant donc p le poids, en kilogrammes, d'un mètre cube du fluide ou sa densité (33), et observant (35) que le poids total du volume Q de ce fluide est mesuré par pQ, la force vive, qui lui a été imprimée par le corps, sera proportionnelle (122) à $\frac{pQ}{g} \times V^2$ ou à $\frac{pAe}{g} \times V^2$, puisque Q est lui-même proportionnel au produit Ae.

Le corps ayant donc communiqué une telle force vive au fluide qu'il chasse devant lui, il faut bien aussi (135 et suiv.) que l'inertie des molécules de ce fluide ait opposé, au mouvement uniforme du corps et dans le sens de AB, une résistance totale R qui, restant la même pour toute la longueur e du chemin décrit par le corps, ait détruit (71) une quantité de travail $R \times e$ proportionnelle à $\frac{1}{2} \frac{pAe}{g} V^2$; de sorte qu'il faut bien encore que le nombre des kilogrammes, R, contenus dans cette même résistance, soit proportionnel à $\frac{1}{2} \frac{pAe}{g} V^2$ divisée par e, c'est-à-dire à $pA \frac{V^2}{2g}$, ou simplement à $p \,.\, A \,.\, V^2$, puisque $2g$ a la même valeur (117) pour tous les cas. Donc enfin :

La résistance que les fluides, en repos, opposent au mouvement des corps de figures semblables, dirigés de la même manière, croît comme la densité p de ces fluides, comme le carré de la vitesse V de ces corps, et comme l'aire A de la projection de ces mêmes corps sur un plan perpendiculaire au mouvement.

On se rappellera (118 et 119) que la quantité $\frac{V^2}{2g}$ n'est autre chose que la *hauteur* due à la vitesse V du corps; de sorte que le produit de cette quantité par l'aire A, représente le volume d'un prisme ou cylindre qui a $\frac{V^2}{2g}$ pour hauteur et A pour base : $\frac{1}{2}\frac{pA}{g}V^2$ ou $pA \times \frac{V^2}{2g}$ est donc (35) le poids d'un tel volume du fluide; ce qui fait dire ordinairement que *la résistance est proportionnelle au poids d'un prisme de fluide qui a pour base la projection transversale du corps, sur un plan perpendiculaire au mouvement, et, pour hauteur, la hauteur due à la vitesse.*

Nous venons de supposer que le corps seul était en mouvement; mais, s'il restait au repos (fig. 46), et qu'une masse de fluide indéfinie, animée, dans tous ses points, de vitesses égales et parallèles, vînt, à l'inverse, le rencontrer ou le choquer, des raisonnements analogues seraient encore applicables, et conduiraient aux mêmes conséquences relativement à l'intensité de la résistance opposée, par le corps, au mouvement du fluide, ou à l'intensité constante de la pression qu'il supporte de la part de ce fluide. Enfin, si le fluide et le corps étaient à la fois en mouvement suivant une même direction rectiligne AB et avec des vitesses constantes U et V, ces conséquences auraient également lieu, pourvu qu'à la place des vitesses absolues U et V qu'ils possèdent par rapport aux objets fixes (46), on ne considérât que leur *vitesse relative*, c'est-à-dire, la différence U — V ou V — U de leurs vitesses absolues, quand ils marchent dans le même sens, et la somme U + V de ces mêmes vitesses, quand ils marchent en sens contraire; à peu près de la même manière que nous en avons agi (163) dans la question relative au cas général du choc direct des corps.

200. *Modifications que ces lois subissent dans certains cas.* Les expériences faites par les physiciens et les géomètres, sont venues confirmer ces aperçus de la théorie, à quelques restrictions près qui, pour chaque cas, ressortent de la nature même du phénomène, et de la manière dont les choses se passent autour du corps.

1° L'adhérence des molécules fluides (28), soit entre elles, soit avec le corps, produit des effets d'autant plus sensibles que ce corps

a plus de longueur, dans le sens du mouvement, par rapport à sa largeur ou à sa hauteur, et que la vitesse relative est plus faible : elle fait croître alors la résistance un peu plus rapidement que le carré de la vitesse, parce qu'une plus grande masse de fluide participe au mouvement du corps, et agit par son inertie (199), pour le ralentir. Il est clair, en effet, que le nombre des molécules entraînées par la force d'adhésion, augmente avec l'étendue de la surface latérale du corps, et que, quand la vitesse du mouvement est très-faible, cette même force qui unit entre elles les molécules voisines du fluide, a aussi plus de temps (57, 63, 129 et suiv.) pour propager la vitesse, de proche en proche et jusqu'à une certaine distance du corps. On voit également que, plus sera grande la force d'adhésion des molécules fluides soit entre elles, soit avec le corps, plus sera grande aussi la masse des molécules entraînées, à circonstances égales; de sorte que, par exemple, pour une même vitesse, un même corps aura plus de peine à se mouvoir dans un fluide visqueux (2) tel que les huiles, les sirops, etc., dont les molécules ont beaucoup d'adhérence entre elles et avec la plupart des corps, qu'il n'en éprouverait dans l'eau, dont la densité p est néanmoins, à peu près, égale à la leur, ou même un peu plus forte.

2° Ces effets de l'adhérence, qui peuvent être totalement négligés pour des fluides tels que l'air et l'eau quand la vitesse relative surpasse 20 à 30^c par seconde, ce qui est le cas le plus ordinaire de la pratique, ne sauraient l'être, en aucune manière, pour des fluides beaucoup *moins parfaits*, beaucoup *plus consistants*, ou pour des corps mous, analogues aux pâtes, aux terres, aux bois de diverses espèces, etc., qui se laisseraient *pénétrer* avec plus ou moins de facilité par des corps très-durs animés d'une certaine vitesse. L'expérience semble prouver qu'alors, sauf pour les premiers instants de l'enfoncement du corps dans le *milieu* pénétrable, où l'étendue de la surface de contact, suivant laquelle la réaction s'opère, varie nécessairement en augmentant de plus en plus; l'expérience prouve, disons-nous, que cette résistance demeure à très-peu près constante, quelle que soit la vitesse et malgré le ralentissement continuel que cette vitesse éprouve, pourvu que le milieu soit partout homogène, et que les circonstances du mouvement ne changent pas.

Il paraît en effet, que, dans des cas pareils, le corps dur ne fait que refouler, en avant et sur les côtés, les molécules qui s'opposent à son passage, sans les entraîner, sans leur communiquer, dans le

sens de son propre mouvement, une vitesse relative appréciable; de sorte que la résistance dépend bien plus alors du frottement que le milieu exerce sur la surface du corps dur, de la ténacité, de la force de cohésion et de la contexture particulière de ce milieu, que de sa densité ou de la vitesse du mouvement. Nous verrons plus loin comment ces considérations s'accordent avec celles des nos 153 et suiv., sur le choc des corps plus ou moins durs; contentons-nous ici de remarquer que, d'après l'expérience, la résistance, pour des corps durs sphériques, a été trouvée, à très-peu près, proportionnelle à l'aire A de leur projection transversale ou à la surface de leurs grands cercles *, comme cela paraît assez naturel dans ce cas.

3° Pour des corps solides semblables dans toutes leurs dimensions et des fluides parfaits, tels que l'eau et l'air, la résistance, à vitesse égale, paraît croître un peu plus rapidement que la surface A de la projection transversale du corps; ce qui provient, sans doute, de la plus grande difficulté qu'éprouvent les molécules fluides à fuir en avant du corps, et à remplir l'espace en arrière, par suite de la longueur du chemin, de plus en plus grand, qu'elles ont à parcourir: cette augmentation de la résistance n'est, au surplus, très-appréciable que pour les plans et surfaces minces qui, dans le fond, ne peuvent aucunement être considérés comme des corps semblables.

4° Quand un corps est plongé dans l'eau et qu'il se meut parallèlement à sa surface de niveau, la résistance croît un peu plus rapidement que ne l'indique la valeur (199) du produit $\rho A V^2$, à mesure qu'il se rapproche de cette surface. Cette circonstance provient de ce que l'eau *gonfle* ou que son niveau s'élève, de plus en plus, en avant du corps, qu'elle s'abaisse ou se *déprime*, de plus en plus, en arrière, de sorte qu'alors elle pèse aussi sur lui ou le presse par son poids, un peu plus en *amont* qu'en *aval*.

5° Quand le corps *flotte* à la surface de l'eau, il se forme également à la partie antérieure ou d'amont un *remou*, et à la partie postérieure ou d'aval une *dépression*, lesquelles se nomment en général *dénivellation*, et dont l'effet est aussi d'augmenter la pression en

* Voyez l'ouvrage de Hutton déjà cité, n° 176, ainsi qu'un *Mémoire sur la pénétration et l'effet des projectiles*, par M. le chef de bataillon du génie Augoyat, inséré au 7e n° du *Mémorial de l'officier du génie*. Ce Mémoire est un résumé précis et complet des données de l'expérience et de la théorie sur cette importante matière. *Voy.* plus loin nos 216 et suiv.

avant, de diminuer la pression en arrière, et de faire croître la résistance plus rapidement que ne l'indique le produit ρAV^2, A étant toujours la projection de la partie du corps, qui est plongée au-dessous du niveau du fluide.

6° Quand le corps se meut dans un fluide très-compressible, tel que l'air, la densité de ce fluide augmente (36) en avant du corps et diminue en arrière, à mesure que la vitesse devient de plus en plus grande ; ce qui fait croître la résistance plus rapidement que le carré de cette vitesse.

7° Enfin, l'expérience prouve encore que, à circonstances égales d'ailleurs, la résistance n'est pas la même pour un corps qui se meut dans un fluide en repos, et pour un corps immobile dans un fluide en mouvement. Cette résistance est un peu plus forte dans le dernier cas que dans le premier : pour celui-ci, les molécules fluides, en mouvement autour du corps, décrivent des lignes telles que l'indique la fig. 45, et, dans l'autre, ces lignes sont analogues à celles de la fig. 46.

201. *Observations sur la résistance comparée des corps de formes dissemblables.* Ces remarques concernent spécialement la résistance exercée, de la part des fluides, contre un même corps ou des corps semblables ; mais, quand les corps diffèrent totalement, soit par la forme, soit par la manière dont ils reçoivent l'action du fluide, les résistances qu'ils éprouvent, dans des circonstances semblables sous tout autre rapport, ne peuvent nullement se comparer. Ainsi, bien que, pour deux tels corps, la densité ρ du fluide, la section ou projection transversale A de ces corps, et la vitesse relative du fluide et de chaque corps, soient les mêmes de part et d'autre, la résistance n'en est pas moins très-distincte, et il n'y a que l'expérience qui puisse la faire connaître pour chaque forme particulière : néanmoins il paraîtrait que, pour le cas des plans et surfaces minces, la figure du contour exerce peu d'influence, à circonstances égales d'ailleurs ; de sorte que, par exemple, une palette plane et mince de 1^{mq} de surface, qui serait mue avec une vitesse donnée dans l'air ou dans l'eau, éprouverait, à très-peu près, la même résistance, soit que son contour eût la forme d'un triangle, d'un cercle ou d'un carré.

On juge aisément encore, d'après ce qui précède, que la forme de la partie antérieure du corps exerce une très-grande influence selon qu'elle est plus ou moins aiguë, et que sa longueur ou l'étendue

de sa surface, mesurée dans le sens du mouvement, en exerce également une, quoique bien moindre. Il n'est donc pas permis de confondre la résistance d'un plan mince avec celle d'un prisme ou d'un cube, de même base, bien qu'ils soient placés dans des circonstances entièrement semblables sous tout autre rapport; mais, ce qu'il est surtout essentiel de remarquer, et ce qu'on ne prévoirait pas aisément sans le concours de l'expérience, c'est que la face *postérieure* ou d'*arrière* du corps exerce non moins d'influence que les faces latérales, selon qu'elle facilite, plus ou moins bien, le dégagement du fluide à l'instant où il quitte le corps, et qu'elle remplit, plus ou moins bien, *l'espace vide* qui tend à se former vers cette partie. Cet espace croît nécessairement avec la vitesse relative et l'étendue de la section A du corps, et son effet est de supprimer tout à fait, dans certains cas où le mouvement est extrêmement rapide, et de diminuer plus ou moins en général, la pression qu'exercerait naturellement le fluide (14 et 37), par son poids et le poids de l'atmosphère, sur l'arrière du corps, s'il remplissait exactement le vide dont il s'agit comme dans le cas du repos; or, les mêmes circonstances n'ayant pas lieu sur l'avant du corps, on conçoit que cette diminution de pression augmente d'autant l'action qui est opposée au mouvement.

Nous croyons essentiel d'ajouter à toutes ces remarques, qu'il ne s'agit ici que de la résistance qui naît directement du mouvement horizontal relatif des corps solides et des fluides, et nullement de celle qui peut provenir (41) de la différence de leurs densités, ou plutôt de l'action du fluide en vertu de laquelle le corps est poussé, de bas en haut (note de la p. 24), avec une force égale à la différence de son poids absolu dans le vide, à celui du fluide qu'il déplace. Nous verrons bientôt comment cette force influe pour modifier le mouvement du corps quand ce mouvement n'est pas horizontal, et particulièrement quand il se fait suivant la direction de l'aplomb.

RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES FAITES SUR LA RÉSISTANCE DES FLUIDES.

202. *Règle ou formule générale pour calculer cette résistance dans les différents cas.* Nous avons vu plus haut (199), que l'effort R exercé, de la part d'un fluide, contre un même corps, en repos ou en mouvement dans son intérieur, est sensiblement proportionnel à la

quantité $pA\frac{V^2}{2g} = pAH$; p, A, ayant les significations indiquées en cet endroit, et V, H représentant la *vitesse relative* du corps et du fluide ainsi que la hauteur due (119) à cette vitesse. Le rapport de R à pAH est donc, d'après ce qui précède (200), à très-peu près constant pour les fluides parfaits et pour les valeurs ordinaires de p, de A, de H et de V, ou, si l'on veut, le produit $p \times A \times H$ est une fraction déterminée de R; de sorte qu'il suffira, pour obtenir, dans chaque cas spécial, la valeur en kilogrammes de ce dernier, de multiplier celle du produit en question par un certain nombre qui restera à très-peu près le même pour le même corps, ou pour des corps différents mais parfaitement semblables. Désignant donc par k ce nombre, qu'on peut nommer le *multiplicateur de la résistance théorique*, nous aurons la formule

$$R = k \times pA\frac{V^2}{2g} = kpA\frac{V^2}{2g}, \quad \text{ou} \quad R = kpAH,$$

qui nous permettra de calculer la valeur de la résistance R, toutes les fois que nous connaîtrons, par expérience, la valeur du multiplicateur k dont il s'agit. Nous verrons bientôt des exemples de ce calcul.

Voici maintenant, principalement d'après les recherches de M. Navier *, les différentes valeurs que prend le multiplicateur k, dans les cas les plus ordinaires des applications; valeurs qui sont déduites des résultats comparés des expériences faites par divers physiciens français et étrangers, au nombre desquels on doit surtout citer Borda, Dubuat, Bossut et Smeaton.

203. *Plans ou planchettes minces.* Pour des plans minces exposés au choc direct ou perpendiculaire d'un fluide, k augmente avec l'aire A de ces plans, conformément à ce qui a été observé ci-dessus (200), et l'on a, à très-peu près, quand

A = 0,010	mètres carrés, ...	$k = 1{,}40$
A = 0,025	*id.*, ...	$k = 1{,}50$
A = 0,056	*id.*, ...	$k = 1{,}64$
A = 0,100	*id.*, ...	$k = 1{,}90$
A = 5,500	*id.*, ...	$k = 2{,}50$

* Voyez la note (*db*), page 339 de la nouvelle édition de l'*Architecture hydraulique de Bélidor*, due à ce célèbre ingénieur, et que nous avons déjà mise à profit dans ce qui précède.

Ces valeurs de k paraissent (200) devoir être un peu moindres, à circonstances égales d'ailleurs, lorsque c'est le plan qui se meut dans un fluide en repos ; ainsi, par exemple, pour $A = 0^{mq},100$, on aurait, suivant Dubuat, seulement $k = 1,43$, valeur qui paraît un peu trop faible.

Quand le plan MN, fig. 47, fait un certain angle BAN avec la direction AB du mouvement, la résistance, estimée ou mesurée toujours dans le sens AB de ce mouvement, diminue d'autant plus que l'angle BAN est plus petit, ou que la projection CD = A de la surface résistante, sur un plan perpendiculaire à AB, devient elle-même moindre ; mais elle ne diminue pas dans la même proportion. D'après les expériences de Hutton, on a, entre ces quantités, la relation indiquée par la table suivante.

DEGRÉS de BAN.	RAPPORT de CD à MN.	VALEUR de la résistance.	DEGRÉS de BAN.	RAPPORT de CD à MN.	VALEUR de la résistance.	DEGRÉS de BAN.	RAPPORT de CD à MN.	VALEUR de la résistance
1°	0,017	0,003 R	25°	0,42	0,24 R	50°	0,77	0,77 R
5	0,087	0,018 R	30	0,50	0,35 R	60	0,87	0,89 R
10	0,174	0,046 R	35	0,57	0,46 R	70	0,94	0,96 R
15	0,259	0,091 R	40	0,64	0,58 R	80	0,99	0,99 R
20	0,343	0,156 R	45	0,71	0,68 R	90	1,00	1,00 R

La lettre R représente, dans ce tableau, la valeur de la résistance calculée, selon ce qui a été dit ci-dessus, pour le cas où le plan serait perpendiculaire à la direction AB du mouvement.

On se rappellera (201) que la forme du contour de la planchette n'exerce point d'influence sensible sur la valeur de la résistance.

204. *Plans minces avec rebords et surfaces minces.* Quand on garnit le pourtour d'une planchette de petits rebords minces formant saillie du côté où s'exerce principalement l'action du fluide, la résistance est, d'après les expériences de M. Christian, augmentée de $\frac{1}{5}$ ou du $\frac{1}{6}$ de la valeur qu'elle a, selon ce qui précède (203), pour un plan sans rebords ; elle est aussi un peu plus forte pour une portion de surface mince légèrement courbe, et qui présente sa concavité à l'action du fluide, comme les voiles de vaisseaux et les parachutes des ballons, etc. : il paraît que la *flèche* ou le creux d'une

telle surface ne doit pas surpasser le $\frac{1}{3}$ ou le $\frac{1}{4}$ de sa largeur moyenne ou de la distance moyenne mesurée entre les bords, quand on veut que la résistance soit un *maximum*, et l'on peut admettre que cette résistance, comparée à celle d'un plan mince qui aurait la même projection transversale, serait alors à peu près augmentée comme pour les rebords ci-dessus.

205. *Corps prismatiques.* Pour des prismes droits terminés aux deux bouts par des faces planes, fig. 48, et dont l'axe est dirigé dans le sens du mouvement, la résistance diminue, jusqu'à un certain point, avec la longueur, ainsi qu'il suit :

1° Le corps étant en repos et le fluide en mouvement, on a, à très-peu près, quand le carré de la longueur est

$\frac{1}{4}$ de la surface A de la section transversale, . .	$k = 1{,}60$
1 fois A, ce qui est le cas des corps cubiques, . .	$k = 1{,}46$
de 9 à 36 fois A, ...	$k = 1{,}34$

Quand la longueur du prisme surpasse 6 fois sa largeur moyenne, ou que son carré surpasse 36 A, la résistance augmente de plus en plus (200) par suite de l'adhérence du fluide sur les faces latérales du corps.

2° Lorsque le corps est mobile et le fluide au repos, on a seulement, quand le carré de sa longueur est

1 fois environ la surface A, ...	$k = 1{,}20$
de 9 à 36 fois A, ...	$k = 1{,}10$

206. *Corps prismatiques avec proues et poupes.* Une *poupe* ajoutée à la face postérieure ou d'arrière d'un prisme droit (fig. 49) dont la longueur est 5 à 6 fois la largeur, ne diminue la résistance que de $\frac{1}{75}$ environ de ce qu'elle serait sans cette poupe (205) : elle la diminue d'autant plus qu'elle est plus longue et plus aiguë.

En ajoutant, à un corps prismatique, comme on le fait pour les bateaux, pour les piles de ponts, etc., une *proue* sur la face antérieure qui reçoit le choc, la résistance diminue selon la forme et la saillie de cette proue.

1° Quand la proue se compose de deux plans verticaux, fig. 50, dont la saillie *bd* ou *b'c'* égale la largeur *ac* du prisme, la résistance est réduite à environ moitié de ce qu'elle serait pour un prisme, de même longueur, sans proue, ou qui serait terminé *carrément*. La

base horizontale de la proue étant un demi-cercle *abc*, fig. 51, on obtient à peu près la même diminution.

2° La base de cette proue étant un triangle *abc*, fig. 52, dont la hauteur *bd* est double de la largeur *ac* du prisme, la résistance est réduite aux $\frac{5}{8}$ de ce qu'elle serait sans proue.

3° A saillie égale, les proues, fig. 53, dont la base est un triangle mixtiligne *abc*, formé de deux arcs de cercle *raccordés* avec les faces latérales du prisme, sont celles qui diminuent le plus la résistance.

4° Une proue, fig. 54, formée par le prolongement des faces latérales d'un bateau prismatique, et coupée en dessous par un plan incliné au tiers d'un angle droit, réduit la résistance au $\frac{1}{3}$ de ce qu'elle serait sans cette proue, ou si le bateau était terminé carrément.

207. *Vaisseaux.* La figure des grands vaisseaux diffère de celle des bateaux ordinaires en ce que leur proue (fig. 55, plan et élévat.) forme une arête aiguë qui se raccorde aux flancs du vaisseau par des courbes horizontales, telles que *abc*, qui présentent une *inflexion*. La longueur de la coupe *horizontale moyenne abc, a'b'c'*, répondant au milieu de la partie de la carène qui est plongée dans l'eau, doit être de 5 à 6 fois sa plus grande largeur *ac*, et cette plus grande largeur doit se trouver un peu au delà du milieu de la longueur, à compter du point *b*.

Selon les expériences de Bossut, un prisme droit, terminé carrément à ses extrémités, dont la section avait la forme du maître-couple ABC d'un vaisseau, et dont la longueur égalait 5 fois environ la largeur, a donné k un peu plus grand que 1, tandis que, pour un modèle de vaisseau, ayant la même section, k a été trouvé de $\frac{1}{6} = 0{,}17$ seulement : les vaisseaux paraissent approcher beaucoup de la forme qui présente le moins de résistance à l'action des fluides.

208. *Observations relatives au calcul de la résistance des bateaux qui naviguent sur les rivières.* Pour les bateaux et généralement pour les corps flottants dont une partie excède le niveau du fluide, on prend (200,5°), pour A, la surface de la plus grande section transversale de la partie *plongée* ou comprise au-dessous de ce niveau. On néglige ainsi la résistance de l'air extrieur, qui est peu de

chose comparativement à celle de l'eau. Pour calculer d'ailleurs cette dernière résistance, on devra d'abord rechercher celle d'un prisme de mêmes section et longueur que celles du bateau, mesurées au milieu de la partie plongée, puis diminuer cette résistance du $\frac{1}{10}$ si le bateau a une poupe; enfin diminuer encore ce dernier résultat, selon la forme plus ou moins avantageuse de la proue, ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus (206), et comme on en verra bientôt un exemple.

Ces calculs supposent d'ailleurs que le fluide est indéfini, ou a une très-grande étendue par rapport aux dimensions du bateau; ils ne peuvent s'appliquer au cas d'un bateau naviguant sur un canal ou sur une rivière, dont la largeur serait comparable à la sienne propre, et n'excéderait pas 5 à 6 fois au moins cette dernière largeur.

Selon Dubuat, on a, pour un bateau prismatique sans proue, la formule

$$R' = R \times \frac{8,46A}{2A + A'},$$

dans laquelle R est la résistance du bateau pour un fluide indéfini, calculée comme il a été dit précédemment, R′ celle du même bateau dans un canal ou une rivière, A′ l'aire de la section transversale de l'eau dans ces derniers, enfin A l'aire de la plus grande section transversale du bateau.

Lorsque le corps flottant est terminé par une proue, Dubuat représente les résultats de l'expérience par cette autre formule:

$$R'' = RR' \left\{ 1 - 0,183 \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(\frac{A'}{A} - 1\right) \right\}$$

dans laquelle R,R′,A,A′ ont les mêmes valeurs que ci-dessus, R″ est la résistance à calculer, q le rapport de la résistance du corps sans proue, à celle du même corps avec sa proue, calculées l'une et l'autre pour un fluide indéfini, suivant les règles du n° 206.

209. *Résistances des cônes, des sphères, etc.* Concevez une sphère entière, une demi-sphère terminée par un plan diamétral et un cône droit dont la hauteur égale le diamètre de la base circulaire, ces derniers ayant leur base perpendiculaire à la direction du mouvement; on aura, que le fluide soit l'eau ou l'air, et si la vitesse est

médiocre, c'est-à-dire au-dessous de 4m,

pour la sphère entière, ... $k = 0{,}60$
pour la demi-sphère, la convexité étant en avant, . . . $k = 0{,}58$
pour *id.* le plan diamétral en avant, ... $k = 1{,}29$
pour le cône, le sommet étant en avant, ... $k = 0{,}61$
pour *id.* la base en avant, ... $k = 1{,}40$

Selon Hutton, ces nombres, déduits d'expériences pour lesquelles la surface A égalait environ $0^{mq},021$, devraient être un peu diminués pour des valeurs de A beaucoup plus petites ; mais on peut négliger une telle diminution qui est à peine de $\frac{1}{50}$ quand on compare la résistance d'une sphère de 7c de diamètre à celle d'une sphère de 4c. D'après ces mêmes expériences, un plan mince circulaire, qui avait aussi pour surface $0^{mq},021$, et qui était mû dans l'air, perpendiculairement à sa direction, avec la vitesse des corps ci-dessus, donnait, pour k, la valeur 1,43 ; ce qui s'accorde parfaitement avec les nombres consignés au n° 203, et prouve qu'on peut les admettre avec confiance, lorsqu'il s'agit de corps qui se meuvent dans l'air avec une vitesse médiocre.

210. *Loi particulière de la résistance de l'air.* Lorsque la vitesse du corps, dans ce fluide, devient considérable, les valeurs de k, que nous venons de rapporter, et toutes celles qui précèdent augmentent, de plus en plus, avec la rapidité du mouvement (200), suivant une loi qui, pour la sphère, est indiquée par la table ci-dessous déduite des résultats de Hutton. Nous y avons ajouté, pour la commodité des calculs dans certains cas, les valeurs des racines carrées du multiplicateur k de la résistance.

	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
V....	1,	3,	5,	10,	25,	50,	100,	200,	300,	400,	500,	600.
k.....	0,59,	0,61,	0,65,	0,65,	0,67,	0,69,	0,71,	0,77,	0,86,	0,99,	1,04,	1,11,
$\sqrt{k}$..	0,77,	0,78,	0,79,	0,81,	0,82,	0,83,	0,85,	0,86,	0,95,	1,00,	1,02,	1,21.

Au moyen de cette table, on trouvera aisément d'ailleurs les différentes valeurs de k qui répondent à une autre surface que la sphère ; il suffira de multiplier celle que lui assignent, dans chaque cas, les règles précédentes pour une médiocre vitesse, par les quotients des valeurs de k données dans la table et du nombre constant 0,60 qui se rapporte à la sphère.

QUESTIONS PARTICULIÈRES CONCERNANT LA RÉSISTANCE DE L'AIR ET DE L'EAU.

211. *Préparation de la formule pour ce cas, calcul de la densité des gaz.* Les applications les plus ordinaires des règles précédentes concernent l'air et l'eau ; il est donc nécessaire de déterminer d'abord la valeur de la densité p (199) qui leur correspond. Nous avons vu (34) que, pour l'eau, on a sensiblement $p = 1000^k$ dans les cas ordinaires ; quant au poids du mètre cube d'air, il varie (40) selon la température et la pression barométrique, et il est nécessaire de le calculer dans chaque cas particulier, comme il suit. Supposons que la température actuelle de l'air soit de 12° centigrades, et que la colonne de mercure qui, dans le baromètre (38), mesure la tension de cet air, soit de 75^c, ce qui est, à peu près, la température et la pression moyennes qui répondent à l'automne et au printemps dans notre climat. Selon la table du n° 40, la densité ou le poids du mètre cube d'air à 0° de température et à 76^c de pression, est de $1^k,2991$; cherchant donc, d'après la loi de Mariotte (16 et 87), et celle de Gay-Lussac (26), quel volume occuperait cette même quantité d'air à la pression et à la température ci-dessus, nous en conclurons aisément son poids sous l'unité de volume. Supposons d'abord que la pression $0^m,76$ reste la même, et que la température s'élève à 12°, son volume deviendra (26), puisqu'ici le gaz est libre de se détendre sous cette pression,

$$1^{mc} + 12 \times 0^m,00375 = 1^{mc} + 0^{mc},045 = 1^{mc},045.$$

Cherchant, de même, ce que ce dernier volume devient à la pression de $0^m,75$, on aura, d'après la première des lois citées, la proportion

$$75^c : 76^c :: 1^{mc},045 : x = 1^m,045 \times \frac{76}{75} = 1^{mc},059.$$

Mais ce volume d'air pèse $1^k,2991$; donc 1^{mc} d'air pareil pèsera $\frac{1^k,2991}{1^{mc},059} = 1^k,2267$, et par conséquent c'est là aussi la densité de l'air à la température de 12° et sous une pression barométrique de 75^c ; celle de l'eau étant 1000^k, on voit que la première est environ

les $\frac{1,2267}{1000} = 0,001227$ ou $\frac{1}{815}$ de la seconde, tandis qu'à 0° et sous 76ᶜ de pression, elle en est les $\frac{1,2991}{1000} = \frac{1}{770}$ à très-peu près.

Sous une pression plus faible que 75ᶜ, et une température plus forte que 12°, il est clair que la densité de l'air serait encore moindre que nous ne l'avons trouvée. En général, si nous nommons n le nombre des degrés centigrades qui indiquent, à un certain instant, la température de l'air, et h la hauteur barométrique, en centimètres, qui répond à sa tension, on trouvera, en raisonnant absolument comme on vient de le faire dans un cas particulier, que la densité p, ou le poids du mètre cube de cet air, aura pour valeur la quantité

$$p = \frac{h}{76} \times \frac{1^k,2991}{1 + 0,00375\,n}, \text{ ou } p = \frac{0,0171h}{1 + 0,00375\,n},$$

formule qui donnera, de suite, cette densité sans passer par la série des raisonnements qui précèdent, et qui permettra aussi de calculer la densité d'un autre gaz quelconque en y remplaçant le poids $1^k,2991$ de l'air à 0° et 76ᶜ de pression, par celui qui, dans la table du n° 36, répond au gaz dont il s'agit. Il est d'ailleurs entendu, relativement aux vapeurs (3 et 5), que leur quantité est supposée rester la même, c'est-à-dire, que cette quantité n'est ni augmentée par la vaporisation d'une nouvelle portion de liquide, ni diminuée par la condensation d'une portion même de la vapeur.

D'après ces données, la formule générale du n° 202, qui sert à calculer la résistance des fluides, deviendra (118),

pour l'eau ordinaire,

$$R = 1000\,kAH = \frac{1000}{19,618}\,k\,AV^2 = 50,975\,kAV^2 \text{ kilogr.},$$

et, pour l'air à 12° et 75ᶜ,

$$= 1,2267\,kAH = \frac{1,2267}{19,618}\,kAV^2 = 0,06253\,kAV^2 \text{ kilogr.},$$

ce qui diminuera le nombre des opérations à effectuer dans chaque cas particulier.

212. *Exemples concernant la navigation des bateaux sur les canaux et les rivières.* Considérons un des grands bateaux qui naviguent sur la Moselle, et dont la forme, assez avantageuse, est à peu près telle que l'indique la fig. 56, en plan, coupe et élévation.

Supposons que sa plus grande largeur, prise extérieurement et au niveau de l'eau ou de la *flottaison*, soit de 3^m ; que la profondeur du fond au-dessous de ce niveau, ou le *tirant d'eau*, soit de $0^m,70$; l'aire A, de la section plongée dans le fluide, sera un peu moindre que $3^m \times 0^m,7 = 2^{mq},10$, soit $1^{mq},60$ la valeur exacte de cette aire. Les bateaux dont il s'agit ont une longueur qui est environ 5 à 6 fois leur plus grande largeur ; s'ils étaient sans proue ni poupe, ou que ce fussent de véritables prismes terminés par des plans perpendiculaires à leur axe, la valeur du multiplicateur k serait (205) environ 1,10, attendu qu'ici le bateau est censé se mouvoir dans le fluide, et que la longueur AB de la partie plongée se trouve comprise entre 3 fois et 6 fois la largeur moyenne. Mais, comme il y a une poupe, on doit d'abord (106) diminuer ce nombre de $\frac{1}{10}$ de sa valeur, c'est-à-dire de 0,11, ce qui donne $k = 0,99$; en outre, le bateau a une proue dont les faces latérales sont raccordées par des demi-cercles avec les flancs, et dont le dessous est un plan incliné d'environ $\frac{1}{3}$ d'angle droit et raccordé pareillement avec le fond, on peut croire que la résistance ou la valeur de k se trouve réduite, au moins, à $\frac{1}{3}$ de 0,99 ou à 0,33. Nous prendrons donc définitivement $k = 0,33$ pour les bateaux dont il s'agit ; de sorte que la résistance aura (211), pour valeur,

$$R = 50,975 \times 0,33 \times 1^{mq},6 \times V^2 = 25,20V^2 \text{ kilog.}$$

Si le bateau se mouvait dans un canal qui eut moins de 5 à 6 fois sa propre largeur, il faudrait augmenter un peu le multiplicateur 25,20, conformément à ce qui a été expliqué à la fin du n° 208 : le contraire ayant lieu ici, nous conserverons ce nombre tel qu'il est. Supposant donc que le bateau se meuve, dans une eau tranquille, avec la vitesse de 1^m par seconde, on aura

$$V^2 = 1^m \times 1^m = 1^{mq}, \quad \text{et } R = 25^k,20.$$

La quantité de travail que devraient dépenser directement, par seconde, des hommes ou des chevaux, pour faire avancer le bateau avec cette vitesse, serait donc de $25_k,20 \times 1^m = 25^{km},20$: c'est ce qui aurait lieu, à peu près, dans les canaux intérieurs de la ville de Metz, parce que la Moselle n'y a qu'une vitesse insensible. Mais, s'il s'agissait de remonter la rivière dans des endroits où la vitesse de l'eau serait de $1^m,2$ par exemple, en faisant toujours avancer le bateau de 1^m par seconde par rapport aux rives, ce bateau étant

choqué (199) avec la *vitesse relative* de $1^m,2 + 1^m = 2^m,2 = V$, la résistance deviendrait alors $25,20 \times 2^m,2 \times 2^m,2 = 122^k$ environ, et la quantité de travail à dépenser, par seconde, aurait pour valeur 122^{km}. Si, au contraire, le bateau devait descendre le même courant avec la vitesse propre de ce dernier, il n'y aurait point de travail à dépenser, car la vitesse relative V serait nulle aussi bien que R; mais, s'il devait descendre avec une vitesse de $2^m,20$ par seconde, la vitesse relative étant $2^m,20 - 1^m,2 = 1^m$, la résistance et le travail seraient, comme dans le premier cas, égaux à $25^k,2$, et $25^{km},2$ respectivement; par quoi l'on voit toute l'influence qu'exerce la vitesse relative du corps et du fluide.

Ces chiffres montrent aussi combien le transport des marchandises, sur bateaux, est désavantageux quand il s'agit de l'effectuer, avec une certaine vitesse, par l'entremise des canaux et des rivières; car, à circonstances égales d'ailleurs, la résistance croit comme le *carré de la vitesse relative*, et le travail dépensé par seconde comme le produit de ce carré par la vitesse absolue du bateau ou du moteur. Plus le canal sera petit d'ailleurs par rapport à la section du bateau, plus la résistance sera considérable; enfin cette résistance et par conséquent le travail, augmenteront proportionnellement à la largeur du bateau et au *tirant d'eau*.

Ce tirant d'eau se calcule aisément, à l'avance, quand on connait le poids du bateau et de la charge qu'il contient. En effet, nous savons (*voy.* la note de la p. 24) que ce poids total égale celui du volume de fluide déplacé par le bateau, ou 1000^{kil} multipliés par ce même volume qui sera ainsi connu, et d'où l'on conclura, d'après la forme donnée de la carène du bateau, la hauteur de la flottaison au-dessus du fond, ou le tirant d'eau.

A l'inverse, on calculera aisément la charge du bateau quand on connaîtra son propre poids, et qu'on se donnera la hauteur dont son fond doit être abaissé au-dessous du niveau de l'eau. Supposons, par exemple, que, dans le cas ci-dessus, le poids de toute la charpente du bateau soit de 16000^{kil}, et que la longueur réduite de sa carène soit de 25^m vers le milieu de la partie plongée; sa section d'eau A, étant d'ailleurs d'environ $1^{mq},6$, le volume total du fluide déplacé sera $1^{mq},6 \times 25 = 40^{mc}$, et son poids 40000^{kil}; retranchant, de ce nombre, les 16000^k que pèse le bateau, il restera 24000^k pour le poids de la charge utile qui correspond au tirant d'eau de $0^m,70$, supposé ci-dessus.

213. ***Exemples concernant les volants à ailettes.*** Les tournebroches et les horloges, qui reçoivent le mouvement par la descente de contre-poids, sont armés, comme on sait, de volants à ailettes planes et minces, fixées à l'extrémité de tiges ou de bras montés sur les axes de rotation; ces ailettes, en se mouvant circulairement dans l'air, éprouvent, de sa part, une résistance qui croît rapidement avec la vitesse que leur imprime le poids moteur par l'intermédiaire des rouages, et servent ainsi à *régulariser* le mouvement, ou à empêcher qu'il ne s'accélère indéfiniment comme cela aurait lieu (113 et suiv.) si aucune résistance ne s'opposait à la descente du contre-poids, ou si celle que lui opposent directement la broche, les rouages, etc., était constamment au-dessous de l'action qu'il éprouve de la part de la gravité.

Soit $A = 0^m,05 \times 0^m,06 = 0^{mq},003$ l'aire de la surface de la palette, on aura, dans le cas présent (203), la palette étant à peu près perpendiculaire à la direction du chemin qu'elle décrit, $k = 1,4$ pour des vitesses comprises (210) depuis 0 jusqu'à 3^m, $k = 1,4\,\frac{0.62}{0,60} = 1,45$ pour des vitesses comprises depuis 3^m jusqu'à 5 mètres, $k = 1,4\,\frac{0,64}{0,60} = 1,50$, pour des vitesses comprises depuis 5 jusqu'à 10^m, etc. Supposons, par exemple, qu'ayant calculé la vitesse d'après le nombre des révolutions du volant, autour de son axe, en une minute, on ait trouvé $V = 4^m$; on aura donc,

$$\text{à peu près, } k = 1,45,$$

et (211) $R = 0,0625 \times 1,45 \times 0^{mq},003 \times 4^m \times 4^m = 0^k,0044$,

résistance assez faible, mais qui deviendrait (210)

$$\frac{0,68}{0,60}\,0^k,44 = 0^k,48,$$

ou environ 109 fois plus forte, si la vitesse était de 40 mètres au lieu de 4^m, et qu'il faudrait doubler s'il y avait deux ailettes de même surface, octupler au moins (203) si, en outre, les dimensions de ces ailettes étaient elles-mêmes doublées, etc.

214. ***Exemples relatifs au mouvement des moteurs animés,*** **etc.** On voit bien maintenant pourquoi la résistance de l'air peut être négligée toutes les fois que les corps, sans avoir une étendue de sur-

face excessive, ne possèdent pas une très-grande vitesse (90). Ainsi, par exemple, la surface de la projection verticale d'un homme ordinaire debout, étant au-dessous de $0^m,4 \times 2^m = 0^{mq},80$, et le multiplicateur k de la résistance qu'il éprouve, étant nécessairement au-dessous de celui 1,20 qui convient (205) à un prisme très-peu allongé dans le sens du mouvement, puisqu'ici le corps est arrondi en avant et en arrière, la résistance sera aussi moindre que $0,0625 \times 1,20 \times 0,8\ V^2 = 0,06 \times V^2$ kil. Si donc la vitesse de cet homme était de 1^m par seconde, la résistance qu'il éprouverait, de la part de l'air, serait moindre que $0^k,06$; pour 2^m de vitesse, elle serait moindre que $0,06 \times 2 \times 2 = 0^k,24$; par conséquent aussi le travail (71), dépensé par cet homme pour vaincre, à chaque instant, une telle résistance, serait au-dessous de $0^{km},06$ dans le premier cas, et au-dessous de $0^k,24 \times 2^m = 0^{km},48$ dans le second. Mais, si la vitesse était de 6^m, ce qui est à peu près la plus grande vitesse qu'un coureur puisse s'imprimer d'une manière un peu soutenue, la résistance s'élèverait (210) à plus de

$$0^k,06 \times 6^m \times 6^m = 2^k,16,$$

et le travail à plus de $2^k,16 \times 6^m = 12^{km},96$; ce qui est déjà considérable par rapport au travail que peut développer habituellement un homme, même robuste, et nous fait ainsi découvrir l'erreur de chiffres du n° 90 où l'on a écrit 5 à 6^m au lieu de 1 à 2^m.

Les chevaux ne présentent pas, à l'action directe de l'air, une surface beaucoup plus grande que celle de l'homme; et comme leur forme est plus allongée, mieux disposée en tous points, la résistance (206) égale au plus $0,04 \times V^2$ kilogrammes; elle est donc très-faible pour une vitesse de 1 à 2 mètres, c'est-à-dire pour celle du pas et du trot ordinaires; mais il en est autrement pour la vitesse de course qui, dans certains cas fort rares il est vrai, peut s'élever jusqu'à 12 et même 14^m; en effet on a alors

$$R = 0,04 \times 14 \times 14 = 7^k,84,$$

et le travail par seconde $= 7^k,84 \times 14_m = 110^{km}$; ce qui est énorme et approche du double de la quantité de travail que fournissent ordinairement (146) les bons chevaux de rouliers marchant au pas. Aussi les coursiers les plus agiles ne peuvent-ils soutenir un semblable travail pendant plus de 8 à 10 minutes consécutives, tandis que le cheval de roulier soutient le sien, sans se fatiguer à beaucoup près

la même pour un même diamètre, parce qu'elle ne dépend que de la forme et de l'étendue de la surface du corps.

RÉSISTANCE DES FLUIDES IMPARFAITS ET INDÉFINIS, OU PÉNÉTRATION DES CORPS DURS DANS LES CORPS MOUS.

216. *Considérations préliminaires.* Nous avons déjà dit (200, art. 2°) ce qu'on devait entendre par les mots *fluides imparfaits;* nous avons aussi prévenu que leur résistance ne suit pas la même loi que celle des fluides d'une mobilité parfaite, et que les expériences connues portent à la considérer comme tout à fait constante à partir de l'instant où le mobile est convenablement enfoncé dans le milieu; enfin nous avons ajouté que cette même résistance paraît être, notamment pour les corps durs sphériques, proportionnelle à l'étendue de la projection transversale CD (fig. 45) du corps sur un plan perpendiculaire au mouvement; proposition qu'on peut aussi admettre, en attendant de nouvelles expériences, pour les premiers instants de l'enfoncement d'un corps dur dans un milieu résistant qui serait terminé par une surface perpendiculaire à la direction du mouvement, pourvu qu'on ne prenne que la projection transversale de la portion de surface déjà enfoncée dans ce milieu.

Il est certain que ces propositions n'auraient plus lieu pour des corps quelconques, notamment pour des cylindres ou des prismes très-allongés dans le sens du mouvement, parce que l'adhérence et le frottement sur les faces latérales acquerraient une certaine influence (200, 1°); nous avons déjà eu occasion d'en faire la remarque dans le n° 167, et c'est ce que nous démontrerons, d'une manière plus positive, quand nous en serons venus à l'examen particulier de la résistance des outils et de la forme la plus avantageuse à leur donner, selon les circonstances; nous prétendons seulement ici rapporter les résultats principaux des expériences faites sur la pénétration des boulets dans diverses substances consistantes, afin d'offrir de nouveaux exemples de l'application des principes contenus dans les *Préliminaires* et concernant ce mode d'action des forces.

217. *Formule pour calculer la résistance.* Nommant, en général, R la résistance totale exercée, par le milieu, contre le mobile, sup-

posé toujours assez dur pour ne pas être déformé sensiblement pendant toute la durée de la réaction ; appelant d'ailleurs d son diamètre ; cette résistance R, calculée pour un même milieu compressible et homogène, sera donc proportionnelle à

$$\tfrac{1}{4}\,\pi\,d^2 = \tfrac{1}{4}\,3{,}1416\,d^2 = 0{,}7854\,d^2,$$

π étant le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre ; et, en raisonnant comme au n° 202, on trouvera que, pour avoir sa valeur absolue dans chaque cas particulier, il faudra encore multiplier $\frac{1}{4}\,\pi\,d^2$ par un certain facteur k relatif ici au degré de dureté ou de consistance du milieu, et qui représentera, en kilogrammes, la pression sur l'*unité de surface* de la projection transversale du corps, par exemple sur 1 mètre carré, d étant exprimé en mètres linéaires, ou sur un centimètre carré, d étant exprimé en centimètres linéaires.

On remarquera en outre que, si le milieu est tellement consistant que le passage du corps ne se referme pas immédiatement en arrière à mesure qu'il s'y enfonce, ce corps sera de plus pressé, dans le sens du mouvement et par l'air atmosphérique, en vertu d'un effort mesuré (37) par environ $\frac{1}{4}\,\pi\,d^2 \times 10330$ kilog., d^2 étant ici estimé en mètres carrés, ainsi que nous l'admettrons dans tout ce qui va suivre. Mais la valeur de cet effort est, comme nous le verrons à l'instant, tout à fait négligeable par rapport à la résistance qu'opposent la plupart des substances cohérentes au mouvement des corps ; c'est pourquoi nous nous dispenserons d'en tenir compte dans la question dont il s'agit. Nous pourrons donc prendre, pour base de nos calculs et en négligeant d'ailleurs les effets qui se produisent avant l'instant où la résistance a atteint sa valeur maximum, ce qui sera permis toutes les fois que l'enfoncement total excédera 8 à 10 fois au moins le diamètre du projectile, nous pourrons, dis-je, nous servir de la formule générale

$$\mathrm{R} = k \times \tfrac{1}{4}\,\pi\,d^2 = \tfrac{1}{4}\,k\,\pi\,d^2 = 0{,}7854\,kd^2.$$

218. *Résultats des expériences connues.* Il a été fait à diverses époques, sur les enfoncements des projectiles en plomb et en fonte de fer, dans des substances de différentes natures, des expériences qui malheureusement ne sont pas encore assez nombreuses ni assez précises, du moins quant aux milieux très-consistants tels que les

métaux et les maçonneries, pour permettre de déterminer, avec une exactitude suffisante, la valeur du multiplicateur k qui représente la dureté des milieux. Nous rapporterons néanmoins ici, à cause de leur grande utilité, quelques-unes des valeurs qui ont été calculées avec beaucoup de soin, par M. le chef de bataillon du génie Augoyat, dans son important Mémoire cité page 190, en observant que celle qui concerne les balles de plomb n'est applicable qu'autant que la réaction ne serait pas suffisante pour déformer ces balles pendant la durée de l'enfoncement; car leur aplatissement consomme une partie de la force vive qu'elles possédaient avant de pénétrer dans le milieu, et fait croître, en outre, la résistance tout au moins en raison de l'accroissement de la surface variable, qui en résulte. Enfin, nous devons aussi remarquer qu'il s'agit de milieux qui ont de très-grandes dimensions par rapport à celles des projectiles.

Désignation du milieu, etc.	*Résistance pour 1 mètre carré de surface.*		
		kil.	atm.
Terres légères rassises depuis longtemps; balles de plomb non déformées, vitesse de 200m, . . .	$k =$	2002000 —	193,8.
Terres de parapets anciennes; boulets de fer, . .	$k =$	1900000 —	183,9.
Mêmes terres nouvellement remuées et damées,	$k =$	1520000 —	147,1.
Chêne très-sain et très-dur, ...	$k =$	5200000 —	503,4.
Vieux chêne passé, ...	$k =$	4500000 —	435,6.
Orme sain et dur, dans la direction des fibres, . .	$k =$	4930000 —	477,3.
Bois de sapin, ...	$k =$	2850000 —	276,9.
Maçonnerie de briques, ...	$k =$	9040000 —	875,1.
Maçonnerie en moellons avec parements de pierres dures, ...	$k =$	13000000 —	1290,2.

Ce dernier résultat est une réduite ou moyenne entre plusieurs autres et sur laquelle il reste encore beaucoup d'incertitude; il semble, en effet, que, dans de pareils cas, il conviendrait d'estimer séparément la résistance pour le parement dur et pour l'intérieur des maçonneries, attendu que les circonstances du mouvement changent nécessairement dans le passage du projectile, d'un milieu dans un autre. On pourra néanmoins l'admettre en attendant de nouvelles expériences plus précises; et, dans tous les cas, les résultats rapportés dans le tableau serviront à donner une idée de la résistance ou de la dureté comparée de certains corps. Nous verrons bientôt d'ailleurs comment ces mêmes résultats ont pu être déduits

directement, par M. Augoyat, des enfoncements observés dans les diverses circonstances.

219. *Calcul de la durée et de la profondeur de la pénétration.* Maintenant nous remarquerons que la force R, qui produit le ralentissement continuel du mouvement du projectile, étant constante pour un même milieu, il s'ensuit (107) que le mouvement sera uniformément retardé, et qu'on en pourra calculer toutes les circonstances au moyen des principes des nos 110, 112, 130 et suivants. Ainsi on sera en état de calculer le temps que le mobile met à parcourir un espace donné, dans le milieu, ou à ralentir sa vitesse primitive d'une quantité donnée, enfin la durée et la profondeur totales de son enfoncement, etc.; mais, comme nous avons déjà présenté des exemples de ce calcul dans les nos 147, 167, 168, et 177, nous nous contenterons d'ajouter quelques remarques particulières relatives à l'objet dont il s'agit ici.

La question la plus importante qu'on ait ordinairement à se proposer sur l'enfoncement des projectiles, c'est de trouver la totalité de cet enfoncement correspondant à une vitesse donnée du projectile, et pour un milieu dont le degré de consistance ou de résistance se trouve indiqué dans la table. Or cet enfoncement se calculera facilement dans chaque cas, puisque nous savons que la force vive détruite, pendant la pénétration, est précisément égale à la force vive possédée par le projectile à l'instant où il a atteint le milieu, et a, par conséquent, pour valeur (136), le double de la quantité de travail développée, par la résistance constante R, pendant toute la durée du mouvement dans l'intérieur de ce milieu; car nous supposons expressément que la masse de ce dernier soit très-grande par rapport à celle du projectile, auquel cas la vitesse générale imprimée à cette masse est tout à fait insensible (160). En nommant donc, à l'ordinaire, P, M, V le poids, la masse et la vitesse du projectile à son entrée dans la substance pénétrable, E l'enfoncement total de ce projectile, on aura (71 et 137), pour calculer E l'égalité

$$MV^2 = \frac{P}{g}V^2 = 2RE, \quad \text{ou} \quad PV^2 = 2REg.$$

Mais, si nous supposons que le projectile soit un boulet de diamètre d, son volume sera $\frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8}d^3$ ou $\frac{1}{3}d \times \frac{1}{4}\pi d^2$, π étant le rapport de la circonférence du cercle au diamètre, c'est-à-dire 3,1416

environ ; par conséquent son poids aura aussi pour mesure la quantité $\frac{2}{3} d \times \frac{1}{4} \pi d^3 \times D$, D étant la densité (35) de la matière qui le compose. Enfin nous aurons $R = k \times \frac{1}{4} \pi d^2$; donc l'égalité ci-dessus revient, en divisant chacune de ses parties par le double $2 . \frac{1}{4} \pi d^2$ de la surface du grand cercle de la sphère, à celle-ci,

$$\frac{1}{3} d D V^2 = k E g ; \text{ d'où } E = \frac{d D}{3 k g} V^2,$$

dans laquelle $g = 9^m,8088$, comme on sait.

Considérant, par exemple, le boulet de 24, du n° 175, qui est animé d'une vitesse de 500^m, et supposant qu'il s'agisse de connaître son enfoncement dans le bois de chêne dur, on aura (35 et 218), $d = 0^m,15$, $D = 7200^k$, $V = 500^m$, $g = 9^m,81$ et $k = 5200000^{kil}$, en nombres ronds, et par conséquent,

$$E = \frac{0^m,15 \times 7200^k}{3 . 9^m,81 . 5200000^k} \times (500^m)^2 = \frac{0,5 . 72}{9,81 . 52} 25 = 1^m,76.$$

Telle serait donc, à peu près, la profondeur totale de l'enfoncement du boulet dans le bois de chêne.

S'il s'agissait de calculer la profondeur de la pénétration relative à l'instant où le projectile aurait perdu une portion quelconque de sa vitesse, on la trouverait de même, par la formule ci-dessus, en remplaçant V par cette vitesse perdue ; car le principe des forces vives (137) s'applique à un instant quelconque du mouvement.

On conçoit bien d'ailleurs comment M. Augoyat est parvenu à calculer, d'après le résultat des expériences connues, les valeurs du multiplicateur k pour les différentes substances pénétrables ; car l'égalité $\frac{1}{3} d D V^2 = k E g$ donne aussi

$$k = \frac{d D V^2}{3 E g} ;$$

de sorte qu'ayant déterminé exactement la valeur de la vitesse V par les moyens qui seront enseignés plus tard, ainsi que les valeurs de la pénétration correspondante et totale E, il est facile d'en conclure celle de k.

220. *Principe relatif au volume de l'impression.* On remarquera que, puisque la résistance R est proportionnelle à la surface de la projection transversale $\frac{1}{4} \pi d^2$ du mobile, la *quantité de travail* $R \times E$ développée, par cette résistance, contre le mouvement, est, de son

côté, proportionnelle au *volume* $\frac{1}{4}\pi d^2 \times E$ de l'*impression* ou du *vide* laissé, en arrière du boulet, à mesure qu'il chemine dans l'intérieur du milieu; car ce vide peut être considéré, à très-peu près, comme un cylindre droit à base circulaire, en négligeant la petite différence provenant de la portion hémisphérique située en avant, par rapport au surplus de ce vide. Mais on peut démontrer la proposition généralement en admettant, selon ce qui a déjà été observé ci-dessus (216) et conformément à l'opinion de plusieurs savants, qui se trouve également appuyée du résultat de quelques expériences spéciales *, que la résistance demeure proportionnelle à l'étendue de la plus grande section transversale de la surface en contact avec le milieu, même dans les premiers instants de la pénétration.

Il est facile de voir en effet, par un raisonnement analogue à celui du n° 186, que, si le mobile est lancé perpendiculairement à la surface qui limite le milieu, et que e soit, à un instant quelconque, la quantité très-petite dont ce mobile s'y enfonce, et enfin que a soit la moyenne valeur correspondante de la plus grande section transversale de l'impression, $a \times e$ sera aussi la mesure du petit accroissement de volume de cette même impression ou du vide formé par le projectile dans le milieu. Mais le petit accroissement du travail, pendant la durée de l'instant dont il s'agit, est $ka \times e$ (172 et 217); donc *la somme de ces petits volumes, ou le volume total et effectif du vide, est proportionnelle à la somme des quantités de travail partielles correspondantes, ou au travail total développé, dans les divers instants, par la résistance variable du milieu, contre le projectile.*

Le même raisonnement serait d'ailleurs applicable aux corps d'une forme quelconque, symétriques par rapport à un axe, et qui seraient mus dans la direction de cet axe, si on pouvait admettre, pour de tels corps, le principe relatif à la loi de la résistance; ce qui, je le répète, ne serait pas exact dans tous les cas.

221. *Méthode pour calculer la profondeur et la durée des petites impressions.* En supposant vrai le principe ci-dessus, pour les corps

* *Voyez*, dans la nouvelle *Architecture hydraulique* de M. de Prony, tom. I, p. 213 et dans la note (*x*) de l'*Architecture hydraulique* de Bélidor, tom. I, p. 76, nouvelle édition de M. Navier, une théorie particulière du choc, d'après D. G. Juan, savant espagnol qui a écrit sur les applications de la Mécanique à l'art maritime.

sphériques, comme il paraît effectivement l'être alors, on voit qu'on n'aura pas beaucoup plus de difficulté pour calculer la profondeur de l'impression, dans le cas où le projectile pénétrerait très-peu dans le milieu résistant, que dans celui où il s'y enfoncerait d'une quantité très-appréciable, et telle qu'on pût considérer sensiblement le volume du vide comme un cylindre de même section que la projection transversale du mobile, et ayant pour longueur la profondeur totale de l'impression.

En effet, si nous nommons B le volume de cette impression, le travail correspondant aura pour valeur kB; de sorte que, selon le principe précédent, on aurait aussi

$$\frac{P}{g}V^2 = 2kB\,;\ \text{d'où}\ B = \frac{PV^2}{2kg}\,;$$

formule qui donnera le volume de l'impression *maximum* relative à une vitesse initiale V du projectile, et d'où l'on déduira ensuite aisément la profondeur de la pénétration totale par les principes de la Géométrie élémentaire; car on apercevra tout d'abord si le volume B surpasse ou non le volume de la demi-sphère antérieure du projectile ou $\frac{1}{12}\pi d^3$. Dans le premier cas, B se composera d'une portion cylindrique, de diamètre d, et de l'hémisphère qui la termine; retranchant donc le volume de cette hémisphère, de B, on aura le volume et par suite la longueur de la portion cylindrique; augmentant cette longueur de $\frac{1}{2}d$, on obtiendra la profondeur totale de l'enfoncement. Dans le second cas, l'impression se réduira à un *segment sphérique* ayant une seule base et dont la *flèche* se calculera, par tâtonnement, selon les règles de la Géométrie : c'est-à-dire qu'on fera diverses suppositions sur la valeur de cette flèche, et qu'on calculera les volumes des segments sphériques correspondants pour les comparer au volume B de l'impression, qui a été trouvé par les premières opérations.

Considérons, par exemple, le boulet de 24 dont il a été question ci-dessus, et supposons qu'il soit lancé avec une vitesse de 250^m seulement, dans le même milieu; on aura, en supposant $P = 12^k$ comme au n° 175,

$$B = \frac{12^k \times (250^m)^2}{19^m,62 \times 5200000^k} = \frac{2 \times 625}{3,27 \times 52000} = \frac{62,5}{327 \times 26} = 0^{mc},00735.$$

Le volume de la sphère entière du projectile a été trouvé (215)

de $0^{mc},00176$, lequel est beaucoup au-dessous de la valeur de B; retranchant donc, comme nous venons de le dire, $\frac{1}{2}\,0^{mc},00176$ ou $0^{mc},00088$, de $0^{mc},00735$, le reste $0^{mc},00647$ sera le volume de la partie cylindrique de l'impression; divisant ensuite ce volume par la surface $0^{mq},0176$ du cercle de base de ce cylindre (177), on obtiendra, pour sa longueur, $0^{m},368$, à quoi il faudra ajouter la moitié du diamètre $0^{m},15$ du boulet, pour obtenir la profondeur totale de l'enfoncement, ce qui donne $0^{m},443$.

Si le volume B de l'impression eût été, au contraire, moindre que $0^{mc},00088$, il eût fallu opérer par tâtonnement ainsi qu'on l'a expliqué; mais nous ne saurions nous arrêter ici à donner un exemple de ce calcul qui ne présente guère plus de difficulté, et qui sera principalement utile dans les cas où le projectile sera animé d'une faible vitesse, ou viendra choquer directement un corps dont la dureté sera comparable à la sienne propre, tel que du fer forgé, de la pierre, etc. Ce même calcul servira aussi à déterminer, d'après des expériences bien faites, la résistance k du milieu sur l'unité de surface : il ne s'agira que de mesurer, avec une grande précision, le volume B de l'impression pour chaque cas, ainsi que la vitesse V du projectile à l'instant où il va frapper normalement la surface qui limite extérieurement le milieu.

Quant à la durée de l'impression, il faudrait, pour l'obtenir, calculer séparément sa valeur pour l'intervalle où la résistance R varie, et pour celui où cette valeur reste constante. Ce dernier cas ne présente pas de difficulté, ainsi que nous l'avons déjà observé (219), et l'autre se traiterait par la méthode du n° 134; mais, comme nous aurons occasion, un peu plus loin, de résoudre des questions absolument analogues, nous nous contenterons d'y renvoyer le lecteur *.

* On trouve, par les principes des calculs transcendants, que, quand le volume total de l'impression est très-petit par rapport à celui du projectile, ce qui arrive dans beaucoup de circonstances, on a, en nommant e la profondeur de l'impression, à un instant qui répond au nombre t de secondes écoulées depuis le commencement de la résistance, à la vitesse v conservée par le projectile, on a, dis-je, en conservant d'ailleurs aux autres lettres la même signification que dans les numéros précédents, et nommant a^2 le rapport donné de $d^2\mathrm{D}$ à $6kg$,

$$t=a\times arc\left(\sin=\frac{e}{aV}\right),\quad v^2=V^2-\frac{e^2}{a^2},\ e^2=\frac{MV^2-Mv^2}{k\pi d^2}=a^2(V^2-v^2);$$

d'où il sera aisé de déduire, soit au moyen des tables connues, soit par une extraction de racine carrée, la valeur des quantités t, v ou e, quand on se donnera l'une quelconque d'entre elles. On aura de même, en nommant T, E la durée et la profondeur totale

222. ***Observations concernant la dureté du projectile et l'épaisseur du milieu.*** On ne doit pas perdre de vue que nos calculs supposent au projectile une dureté telle qu'il ne change pas de forme, d'une manière sensible, en s'enfonçant dans le milieu résistant. Dans le cas contraire, une portion plus ou moins notable de la force vive, dont il était animé avant son entrée dans ce milieu, serait employée (161 et 218) à produire ce changement de forme; il arriverait aussi, dans le même cas, que l'aplatissement du projectile ferait, comme nous l'avons déjà observé, croître la surface, sur laquelle s'opère la résistance et par suite cette résistance elle-même, suivant une loi qu'on ne pourrait apprécier sans des expériences spéciales sur la dureté propre de la matière du projectile : ce cas arrive, en particulier, pour les balles de plomb qui s'aplatissent à mesure qu'elles pénètrent plus avant dans l'intérieur des terres, des bois, etc.; aussi faudra-t-il bien se garder d'y appliquer les calculs ci-dessus, sauf pour de très-faibles vitesses, ou pour des milieux peu résistants.

Nous avons également supposé que l'épaisseur du milieu, dans le sens du mouvement, était assez grande pour qu'il ne fût pas traversé entièrement par le projectile; lorsqu'il en est autrement et que ce milieu est limité par deux faces perpendiculaires au mouvement, la force vive du projectile est seulement, en partie, employée à vaincre la résistance de ce même milieu, et celle qu'il en conserve, après en être sorti, sert à le faire cheminer plus avant dans l'air. Connaissant l'épaisseur du milieu et la valeur de k qui lui correspond,

de l'impression,

$$T=\frac{\pi a}{2}=\frac{\pi E}{2V}, \quad e=aV, \quad \text{dans lesquelles } a=\sqrt{\frac{Dd^2}{6kg}}, \quad g=9^m,8088, \quad \pi=3,1416.$$

La formule, qui donne T au moyen de a, montre que, quand le volume de la plus grande impression est, comme on le suppose, négligeable par rapport au volume du projectile, la durée de cette impression devient sensiblement indépendante de sa profondeur, ainsi que de la vitesse primitive V du même projectile. Cette conséquence, qui s'étend aisément au choc de deux corps quelconques, quand l'impression est infiniment petite, est analogue à celle qui concerne les faibles oscillations du pendule, dont il sera fait mention plus tard, et dont la durée est également indépendante de l'amplitude de l'arc parcouru, etc. La valeur de T montre d'ailleurs que la durée de l'impression est d'autant plus petite que la résistance ou la dureté de la matière du corps choqué, représenté ici par k, est plus grande, conformément à ce qui a déjà été remarqué n° 168. Dans la réalité et qu'elle que soit la petitesse de l'impression, sa durée est toujours un peu moindre que ne l'indique la formule; de sorte que celle-ci ne donne véritablement qu'une limite supérieure de cette durée, d'autant plus exacte que l'impression est plus faible.

de $0^{mc},00176$, lequel est beaucoup au-dessous de la valeur de B; retranchant donc, comme nous venons de le dire, $\frac{1}{6}$ $0^{mc},00176$ ou $0^{mc},00088$, de $0^{mc},00735$, le reste $0^{mc},00647$ sera le volume de la partie cylindrique de l'impression; divisant ensuite ce volume par la surface $0^{mq},0176$ du cercle de base de ce cylindre (177), on obtiendra, pour sa longueur, $0^{m},368$, à quoi il faudra ajouter la moitié du diamètre $0^{m},15$ du boulet, pour obtenir la profondeur totale de l'enfoncement, ce qui donne $0^{m},443$.

Si le volume B de l'impression eût été, au contraire, moindre que $0^{mc},00088$, il eût fallu opérer par tâtonnement ainsi qu'on l'a expliqué; mais nous ne saurions nous arrêter ici à donner un exemple de ce calcul qui ne présente guère plus de difficulté, et qui sera principalement utile dans les cas où le projectile sera animé d'une faible vitesse, ou viendra choquer directement un corps dont la dureté sera comparable à la sienne propre, tel que du fer forgé, de la pierre, etc. Ce même calcul servira aussi à déterminer, d'après des expériences bien faites, la résistance k du milieu sur l'unité de surface : il ne s'agira que de mesurer, avec une grande précision, le volume B de l'impression pour chaque cas, ainsi que la vitesse V du projectile à l'instant où il va frapper normalement la surface qui limite extérieurement le milieu.

Quant à la durée de l'impression, il faudrait, pour l'obtenir, calculer séparément sa valeur pour l'intervalle où la résistance R varie, et pour celui où cette valeur reste constante. Ce dernier cas ne présente pas de difficulté, ainsi que nous l'avons déjà observé (219), et l'autre se traiterait par la méthode du n° 134; mais, comme nous aurons occasion, un peu plus loin, de résoudre des questions absolument analogues, nous nous contenterons d'y renvoyer le lecteur[*].

[*] On trouve, par les principes des calculs transcendants, que, quand le volume B de l'impression est très-petit par rapport à celui du projectile, ce qui arrive dans beaucoup de circonstances, on a, en nommant e la profondeur de l'impression, à un instant qui répond au nombre t de secondes écoulées depuis le commencement de la résistance, à la vitesse v conservée par le projectile, on a, dis-je, en conservant d'ailleurs aux autres lettres la même signification que dans les numéros précédents, et nommant a^2 le rapport donné de d^2D à $6ig$,

$$t=a\times arc\left(\sin=\frac{e}{aV}\right),\quad v^2=V^2-\frac{e^2}{a^2},\quad e^2=\frac{MV^2-Mv^2}{kxd}=a^2(V^2-v^2);$$

d'où il sera aisé de déduire, soit au moyen des tables connues, soit par une extraction de racine carrée, la valeur des quantités t, v ou e, quand on se donnera l'une quelconque d'entre elles. On aura de même, en nommant T, E la durée et la profondeur totale

222. *Observations concernant la dureté du projectile et l'épaisseur du milieu.* On ne doit pas perdre de vue que nos calculs supposent au projectile une dureté telle qu'il ne change pas de forme, d'une manière sensible, en s'enfonçant dans le milieu résistant. Dans le cas contraire, une portion plus ou moins notable de la force vive, dont il était animé avant son entrée dans ce milieu, serait employée (161 et 218) à produire ce changement de forme; il arriverait aussi, dans le même cas, que l'aplatissement du projectile ferait, comme nous l'avons déjà observé, croître la surface, sur laquelle s'opère la résistance et par suite cette résistance elle-même, suivant une loi qu'on ne pourrait apprécier sans des expériences spéciales sur la dureté propre de la matière du projectile : ce cas arrive, en particulier, pour les balles de plomb qui s'aplatissent à mesure qu'elles pénètrent plus avant dans l'intérieur des terres, des bois, etc.; aussi faudra-t-il bien se garder d'y appliquer les calculs ci-dessus, sauf pour de très-faibles vitesses, ou pour des milieux peu résistants.

Nous avons également supposé que l'épaisseur du milieu, dans le sens du mouvement, était assez grande pour qu'il ne fût pas traversé entièrement par le projectile; lorsqu'il en est autrement et que ce milieu est limité par deux faces perpendiculaires au mouvement, la force vive du projectile est seulement, en partie, employée à vaincre la résistance de ce même milieu, et celle qu'il en conserve, après en être sorti, sert à le faire cheminer plus avant dans l'air. Connaissant l'épaisseur du milieu et la valeur de k qui lui correspond,

e l'impression,

$$T=\frac{\pi a}{2}=\frac{\pi E}{2V},\quad e=aV,\ \text{dans lesquelles}\ a=\sqrt{\frac{Dd^2}{6kg}},\quad g=9^m,8088,\quad \pi=3,1416.$$

a formule, qui donne T au moyen de a, montre que, quand le volume de la plus grande mpression est, comme on le suppose, négligeable par rapport au volume du projectile, la urée de cette impression devient sensiblement indépendante de sa profondeur, ainsi ue de la vitesse primitive V du même projectile. Cette conséquence, qui s'étend aisément a choc de deux corps quelconques, quand l'impression est infiniment petite, est analoie à celle qui concerne les faibles oscillations du pendule, dont il sera fait mention us tard, et dont la durée est également indépendante de l'amplitude de l'arc parcouru, etc. a valeur de T montre d'ailleurs que la durée de l'impression est d'autant plus petite ie la résistance ou la dureté de la matière du corps choqué, représenté ici par k, est us grande, conformément à ce qui a déjà été remarqué n° 168. Dans la réalité et qu'elle ie soit la petitesse de l'impression, sa durée est toujours un peu moindre que ne l'inque la formule; de sorte que celle-ci ne donne véritablement qu'une limite supérieure : cette durée, d'autant plus exacte que l'impression est plus faible.

on trouvera aisément la force vive qui reste au projectile : elle sera égale (137) à *la force vive primitive, diminuée du double de la quantité de travail qui est relative à l'épaisseur traversée,* et qui a pour mesure le *produit de la résistance* k, sur l'unité de surface, *par le volume total de l'impression, formant ici un véritable cylindre.*

DES LOIS DE L'IMPRESSION DANS LES MILIEUX TRÈS-CONSISTANTS ET D'UN ÉTENDUE LIMITÉE.

223. *Influence de l'inertie et de la flexibilité des milieux dont le mouvement est gêné par des obstacles.* Nos calculs supposent que la masse du milieu soit très-grande par rapport à celle du projectile, et que, si ce milieu compose un corps solide peu épais, tel qu'une planche de bois, cette planche ne fléchisse pas, d'une manière sensible, pendant l'impression. En effet, dans le cas contraire, une portion de la force vive primitive serait employée à vaincre l'inertie des molécules du solide ou à produire sa flexion ; cette portion aurait pour valeur (97 et 138) le double du travail que devrait développer, dans le sens du mouvement du projectile et au point où il agit, une force de pression quelconque pour amener la pièce au même degré de tension finale. On en tiendra donc aisément compte quand on aura observé cette flèche par expérience, ou qu'on l'aura déterminée à l'aide du calcul, ce qui n'est nullement impossible comme nous le verrons plus tard, puisque nous connaissons ici la loi que suit la pression. Quant à la portion de la force vive du mobile, qui est employée, dans le même cas, à communiquer une certaine vitesse aux molécules du milieu, elle sera d'autant plus grande que la masse de ce milieu sera moindre, et que son mouvement sera moins empêché par des obstacles étrangers. Nous verrons bientôt comment on peut calculer cette portion de force vive quand le milieu a la liberté de se mouvoir en tous les sens ; examinons d'abord ce qui arrive dans le cas où son mouvement général est empêché par quelque obstacle solide, et tâchons de démêler le rôle que jouent séparément l'inertie et la force de ressort des parties.

Supposons, par exemple, que la planche ci-dessus qui constitue le milieu solide, soit appuyée, à ses extrémités, contre deux poteaux invariables ; elle s'opposera donc au mouvement d'une balle qui s'y enfoncerait, non-seulement par sa force de ressort, mais aussi par l'inertie de ses différentes parties ; néanmoins, comme à l'instant

où l'enfoncement de la balle cesse, la flexion est aussi à son *maximum* et la vitesse nulle, l'inertie des parties de la planche qui, dans les premiers instants de la flexion, a absorbé de la force vive, a dû ensuite (141) et lors du ralentissement de la vitesse, restituer cette même portion de force vive; de sorte que, dans la réalité, il n'y a eu, à l'instant dont il s'agit, de consommée que la quantité de travail nécessaire pour produire l'enfoncement et la flexion.

La force vive, primitivement possédée par la balle, se trouve donc égaler le double de cette quantité de travail, que, par hypothèse, on sait estimer; car les poteaux qui sont des masses inébranlables et très-grandes, par rapport au projectile, n'ont, par cela même (160 et 162), rien ou très-peu absorbé. Ainsi on pourra encore, pour l'instant dont il s'agit, calculer l'enfoncement total, qui, d'ailleurs, sera nécessairement un peu moindre que dans le cas où la planche serait appuyée solidement dans toutes ses parties, ou serait suffisamment épaisse pour ne pas fléchir.

224. *Influence de l'élasticité du milieu.* Si le ressort de la planche ci-dessus n'a pas été détruit par suite de sa flexion générale, cette planche retournera en arrière, et exécutera, autour de sa position primitive, une suite d'oscillations (19) de plus en plus petites, et qui finiront bientôt par s'éteindre, attendu les résistances de toute espèce qui s'opposent à ce mouvement. Si donc la balle s'est tellement enfoncée dans la planche, que la compression et le frottement qu'elle y éprouve, suffisent pour l'empêcher d'en sortir lors du mouvement général de retour, elle exécutera une série d'oscillations avec cette planche; de sorte qu'au bout d'un certain temps, la force vive employée à mettre en jeu la force de ressort de celle-ci, n'en sera pas moins perdue inutilement pour l'impression. Je dis inutilement, bien qu'il soit évident qu'à l'instant où la planche revient en arrière avec une vitesse croissante, la balle, qui était au repos, résiste par son inertie et reçoit, à son tour et de la part du milieu, un choc qui tend à l'y enfoncer un peu plus qu'elle ne l'était d'abord; mais, comme la vitesse *rétrograde* de la planche diminue de plus en plus, et que la balle résiste à ce ralentissement (66) en vertu de son inertie, il arrive bientôt aussi qu'elle tend à s'en séparer avec la vitesse contraire qu'elle a acquise; or, si son inertie est, à cet instant, vaincue par le frottement, etc., qu'elle éprouve de la part du corps, elle a dû l'être aussi dans la

première période du retour ; de sorte qu'en réalité, l'enfoncement n'a pas dû augmenter ; et attendu que les mêmes raisonnements s'appliquent aux oscillations suivantes, il est bien vrai de dire que le travail, recélé par la force de ressort de la planche, a été consommé sur des résistances étrangères à l'impression. Ainsi donc, quoique le milieu soit plus ou moins élastique, la force vive possédée d'abord par la balle, se trouvera partagée, à peu près, comme on l'a dit n° 223.

Quand, au contraire, la balle se détachera de la planche, lors du mouvement de retour, ce qui arrivera généralement toutes les fois que l'impression sera peu profonde, cette balle sera, conformément à ce qui a été admis aux n°s 97, 115 et suiv., projetée en arrière avec une certaine vitesse ; toutefois la force vive correspondante sera une bien faible portion, non-seulement de celle que possédait d'abord la balle, mais même de celle qui a été absorbée par la flexion générale de la planche ; car le projectile quitte cette planche précisément à l'instant où elle a acquis sa plus grande vitesse de retour, et où elle a ainsi converti, en force vive et pour son propre compte, la majeure partie du travail qu'avait absorbé sa force de ressort.

On peut donc aussi affirmer que l'accroissement de l'impression, résultant du choc en retour, est également une quantité très-faible ; de sorte qu'on pourra, dans bien des cas, admettre que *la force vive initiale du projectile se compose seulement du double de la quantité de travail qui répond et à la flexion générale et au volume de l'impression*, comme dans le cas où la planche est sans élasticité (223). Cette relation servira d'ailleurs à calculer la profondeur de l'impression quand on sera certain que cette impression persiste, ou que l'élasticité du milieu a été complétement détruite dans l'endroit même où elle s'est opérée ; autrement, en effet, la vitesse restituée à la balle pourrait être très-appréciable, et sa force vive très-comparable à sa force vive primitive.

225. *Conclusions relatives à la pénétration des milieux flexibles retenus par des obstacles.* On voit, par l'examen qui précède, que la force vive primitive du projectile sera composée, dans tous les cas, et de celle que conserve ce projectile après le choc, et du double de la quantité de travail qui a été absorbée tant pour produire l'impression persistante, que pour imprimer à la planche la

vitesse et la flexion qu'elle conserve à l'instant où elle est quittée par la balle. Or l'expérience prouve que la vitesse de retour de la balle est généralement très-faible par rapport à celle qu'elle possédait d'abord, si ce n'est quand cette dernière est elle-même fort petite, et que la matière des corps qui se choquent est suffisamment roide et élastique pour que l'impression *maximum* soit, pour ainsi dire, insensible; ce qui n'est pas le cas que nous avons spécialement en vue ici.

On peut donc admettre généralement que la majeure portion de la force vive que possédait primitivement le projectile, a été consommée effectivement, soit à produire l'enfoncement du milieu ou l'aplatissement de ce projectile, soit à infléchir ce milieu d'une manière permanente, s'il est dépourvu de l'élasticité nécessaire pour reprendre sa forme primitive, soit enfin à lui imprimer, dans le cas contraire, des oscillations ou des vibrations, plus ou moins rapides, plus ou moins étendues.

Nous sommes entrés dans tous ces détails, afin de bien faire voir comment la force vive se consomme ou se détruit, inévitablement et sans retour, dans la réaction des corps, et pour éclairer, de plus en plus, les principes théoriques que nous avons exposés dans les *Préliminaires*, notamment ceux qui concernent la communication du mouvement, lesquels trouvent des applications nombreuses dans les questions que présentent la pratique des arts et l'établissement des machines. Ces mêmes considérations serviront aussi à faire pressentir, à l'avance, les résultats de certains phénomènes, ou à apprécier certains effets plus ou moins compliqués de l'action des forces, qu'il serait impossible, en aucune manière, de soumettre à un calcul rigoureux; et elles empêcheront, tout au moins, de commettre des fautes graves, quand il s'agira d'établir des projets dont les résultats se fondent sur les données de la Mécanique. C'est dans cette vue que nous allons ajouter quelques développements à tous ceux qui précèdent, concernant la réaction des corps solides libres.

226. ***De la pénétration des milieux limités et entièrement libres.*** Nous avons supposé jusqu'ici que la masse du milieu soit très-grande par rapport à celle du projectile, en sorte qu'il n'en reçoive aucun mouvement sensible, ou qu'ayant des dimensions finies, il soit tellement appuyé, en certains points, contre des obstacles, que les

parties voisines de celle où se fait l'impression, prennent seules un mouvement général de flexion, dépendant, soit de l'intensité de la force de réaction, de la pression exercée par le projectile, soit de la durée même de cette réaction ou de la profondeur de l'impression. Or il est essentiel de remarquer que cette flexion aura également lieu quand la pièce choquée sera parfaitement libre de se mouvoir dans le sens du chemin suivi par le projectile, ainsi qu'il arriverait, par exemple, si cette pièce était simplement suspendue à l'extrémité d'une corde très-flexible.

En effet, le mouvement serait d'abord communiqué aux parties voisines du point où se fait l'impression, et il ne se propagerait que successivement et progressivement aux parties les plus éloignées; celles-ci résistant donc par leur inertie, et demeurant un instant stationnaires, tandis que les autres ont déjà reçu, en grande partie, le mouvement du projectile et cheminent en avant, il est clair que la pièce doit nécessairement fléchir à mesure que ce projectile s'y enfonce, et fléchir d'autant plus que la masse, et par conséquent l'inertie des parties reculées, sont plus considérables.

Ainsi, dans le cas dont il s'agit, les choses se passent, en réalité, à très-peu près comme si le corps était appuyé contre des obstacles fixes vers les parties éloignées du centre d'impression, si ce n'est qu'immédiatement après l'instant de la plus grande flexion, et attendu la grande force de cohésion qui unit entre elles toutes les molécules du milieu, la vitesse se trouve propagée *, du centre d'action aux extrémités, de telle sorte que les différentes parties se sont mises en harmonie de mouvement avec la masse du projectile, conformément à ce qui a déjà été expliqué (155 et suiv.). La formule du n° 156 donnera donc la vitesse commune dont il s'agit, et celle du n° 161 la portion de la force vive du projectile, qui a produit l'impression, la flexion ou tout autre changement d'état moléculaire éprouvé, par les deux corps, à l'instant où cette impression atteint sa limite.

Par conséquent, si le milieu résistant est sans élasticité ou a perdu sa force de ressort à ce même instant, et que la dureté du projectile soit d'ailleurs très-grande par rapport à la sienne propre, *la portion de force vive* $\frac{M'MV^2}{M+M'}$ dont il s'agit, et dans laquelle M' re-

* *Voyez*, plus bas, les n^os^ 231 et 232.

présente la masse entière du milieu, cette portion, dis-je, *se trouvera alors égaler le double de la quantité de travail relative* (221) *au volume total de la pénétration du projectile dans l'intérieur de ce milieu, plus au double de celle qui a été absorbée pour produire la flexion générale et permanente de ce même milieu.*

Cette dernière quantité de travail, qui pourra s'estimer à peu près comme dans le cas (223) où le milieu est retenu par des obstacles fixes, sera d'ailleurs négligeable toutes les fois que ce milieu aura assez d'épaisseur, assez de roideur, pour ne pas éprouver de flexion générale sensible, et qu'il sera assez mou, par rapport au projectile, pour que ce dernier puisse s'enfoncer, d'une quantité plus ou moins considérable, dans son intérieur, sans en être expulsé (224).

227. *Du cas où le milieu libre est flexible et élastique.* Si le corps solide, qui constitue le milieu résistant, conserve, à l'instant de la plus grande flexion, assez d'élasticité pour retourner vers la forme générale qu'il avait avant le choc, sans en avoir assez pour que l'impression soit complétement effacée et que les corps se séparent immédiatement, il se passera des choses absolument analogues à celles qui ont lieu (224), pour le cas où le milieu est retenu fixement par les extrémités; c'est-à-dire qu'il ne reprendra pas instantanément sa forme définitive, et qu'il n'y parviendra qu'après une série d'oscillations ou de vibrations de plus en plus faibles et relatives à sa force de ressort, oscillations en vertu desquelles il arrivera que, tantôt ce seront les extrémités qui marcheront en avant, et tantôt le point où a commencé l'ébranlement.

On voit aussi qu'une certaine portion de la force vive du projectile aura été employée à produire ces oscillations et le mouvement général de transport du milieu, etc. Mais, comme il n'existe point ici d'obstacles extérieurs, le travail absorbé par la flexion aura servi, en majeure partie, et après les oscillations terminées, à augmenter la vitesse générale ou la force vive du milieu; de sorte qu'on peut admettre que *la force vive initiale du projectile se trouve simplement décomposée, après le choc, en deux parties, dont l'une égale le double de la quantité de travail relative au volume total de l'impression ou de l'enfoncement produit par ce projectile, et l'autre à la somme des forces vives finales conservées à la fois par les deux corps.*

Cette somme de forces vives se calculant d'ailleurs encore au

moyen de la formule du n° 156, puisqu'ici les corps sont censés ne pas se quitter après l'impression (159), il en résulte nécessairement que *la perte de force vive* (161) $\frac{MM'V^2}{M+M'}$, *sera aussi égale au double de la quantité de travail nécessaire pour produire cette impression*, comme pour le cas où le milieu est sans élasticité, et ne reçoit d'ailleurs aucune flexion générale sensible.

228. *Applications et formules particulières relatives au pendule balistique.* Ces dernières circonstances se présentent, entre autres, dans les expériences qui ont pour objet de déterminer directement la vitesse initiale des boulets de canons au moyen du *pendule balistique*, dont nous donnerons la description dans la seconde partie de cet ouvrage. Il nous suffit ici de savoir que ce pendule consiste tout simplement en un gros bloc de bois suspendu verticalement à des tiges très-minces, de manière à avoir toute liberté de se mouvoir à l'instant où il est choqué et pénétré par la masse du projectile qu'on lance perpendiculairement à une de ses faces. Or on voit, d'après ce qui vient d'être dit, que, non-seulement on pourra calculer sa vitesse U, à l'instant de la plus grande impression, ou de la pénétration complète du boulet dans son intérieur, quand on connaîtra la dureté k de ses parties (218) ainsi que la vitesse d'arrivée V du projectile, mais qu'on pourra, à l'inverse, calculer cette dernière vitesse au moyen de la première, par l'égalité $(M+M')\,U=MV$ du n° 156, et déterminer pareillement la valeur du multiplicateur k de la résistance, à l'aide de cette autre égalité (219 et 226)

$$\frac{M'}{M+M'}\times MV^2 \text{ ou } \frac{P'}{P+P'}\times\frac{P}{g}V^2=2k\times\tfrac{1}{4}\pi d^2\times E=\tfrac{1}{2}k\pi d^2E,$$

quand on connaîtra en outre, d'après l'expérience, la valeur de la pénétration totale E subie par le pendule.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse encore du projectile des n^os^ 175 et 219, lancé, avec la vitesse de 500 mètres, contre un bloc de bois de chêne pesant 1800^{kil}; la vitesse U, imprimée à ce bloc à la fin de l'impression, sera, d'après la formule citée du n° 156, égale à

$$\frac{MV}{M+M'} \text{ ou } \frac{P}{P+P'}V=\frac{1800^k}{12^k+1800^k}\times 500^m=\frac{1}{151}\,500^m=3^m,311:$$

et, comme on a ici (219)

$$k = 5200000^k, \quad \tfrac{1}{2}\pi d^2 = 2 \times 0^{mq},0176 = 0^{mq},0352,$$

on obtiendra, pour la profondeur de l'enfoncement du projectile dans le bloc pendule (175),

$$E = \frac{P'}{P+P'} \times \frac{2MV^2}{k\pi d^2} = \frac{150}{157} \times \frac{2 \times 152955^{km}}{352 \times 520} = 1^m,66,$$

au lieu de $1^m,76$ qui a été trouvé, n° 219, pour le cas où le mouvement du bloc serait tout à fait empêché, soit par suite d'obstacles étrangers, soit parce que son poids serait, pour ainsi dire, infini par rapport à celui du boulet.

Si, à l'inverse, la vitesse $U = 3^m,311$ eût été donnée immédiatement, d'après l'observation du mouvement qu'acquiert le pendule, aussi bien que la profondeur $E = 1^m,66$ de l'enfoncement du projectile dans l'intérieur de sa masse, on eût trouvé, à l'aide des mêmes formules, $V = 500^m$ et $k = 5200000^k$. Par cette manière de procéder, qui a été mise spécialement en usage par Hutton, géomètre que nous avons déjà souvent cité, on obtient donc deux résultats pour chaque expérience, et l'on remplit un double objet d'utilité pour l'avancement de la science.

229. *Observations et conséquences particulières relatives à la profondeur de l'impression.* Il est essentiel de remarquer qu'attendu que $M + M'$ surpasse M', la force vive qui entre dans la première des égalités ci-dessus, sera aussi moindre que la force vive MV^2 possédée par le projectile; de sorte que, tant pour ce motif qu'à cause que la pénétration est toujours accompagnée d'une flexion générale qui lui est étrangère, la valeur de E, dans le cas dont il s'agit d'un corps mobile, sera généralement plus faible que si ce corps était appuyé, de toutes parts, contre des obstacles solides; et cela d'autant plus que $M + M'$ surpassera davantage M', ou que la masse M' du corps choqué sera moindre par rapport à celle M du projectile. Il est évident, au surplus, que la même conséquence s'applique également au cas où le milieu, sans être parfaitement libre, serait appuyé simplement contre des ressorts très-compressibles; car ces ressorts, en cédant sous la pression qu'ils éprouvent, absorberaient encore une portion plus ou moins grande de la force vive transmise au milieu, portion que, à la rigueur on pourrait calculer (97) si l'on savait exactement comment varie, à chaque

instant, l'énergie de ces ressorts selon leur état de compression ou de flexion.

En partant de ces données, on pourrait arriver à quelques conséquences utiles relativement aux précautions à prendre quand il s'agit de se garantir de l'atteinte des projectiles, à l'aide de *masques couvrants* ou de *boucliers*, plus ou moins épais et consistants, destinés à recevoir l'impression immédiate du choc. On voit, par exemple, que, si l'on tient à diminuer, autant qu'il est possible, leur épaisseur, il conviendra de ne pas les priver de toute mobilité, de toute flexibilité, et de les appuyer plutôt par des ressorts très-compressibles, contre le corps à garantir, que par des obstacles ou pièces très-solides; qu'il n'est pas moins à propos de réduire, au *minimum*, leur masse ou leur poids, en diminuant, à cet effet, l'étendue de leurs dimensions transversales; de sorte que, sous ce rapport comme sous tous ceux qui précèdent, il y aurait de l'avantage à les composer de plusieurs pièces distinctes et entièrement isolées, mais se recouvrant convenablement les unes les autres.

Pour réaliser, en particulier, la condition d'une grande mobilité, on pourrait notamment appuyer les masques, par des ressorts, contre des chars très-légers et très-roulants, ou contre de petits traîneaux portés sur des rouleaux évidés, etc. De tels dispositifs pourraient bien n'être pas les plus économiques et les plus avantageux dans tous les cas; mais ils n'en constitueraient pas moins les masques qui, à égalité d'épaisseur et de matière, seraient capables d'offrir le plus de sécurité, le plus de résistance à la pénétration, s'il était permis de supposer d'ailleurs, comme on l'a fait dans les n^os^ 226 et suivants, que le mouvement se soit effectivement propagé, et la vitesse en quelque sorte disséminée également, dans toute l'étendue de la masse couvrante, à l'instant même où la pénétration du projectile est arrivée à son terme. Or, c'est ce qui paraît effectivement admissible pour cet instant, et quand il s'agit de milieux solides très-consistants, d'une étendue médiocre dans le sens transversal, et assez épais d'ailleurs pour ne pas être traversés entièrement par le projectile; car toutes ces circonstances influent sur la durée de la propagation du mouvement, comme nous allons entreprendre de le faire sentir par le raisonnement et par des exemples.

DE LA PROPAGATION DU MOUVEMENT DANS L'INTÉRIEUR DES MILIEUX DE DIVERSES NATURES, ET DES EFFETS DE SA DURÉE.

230. *Idée de l'influence que cette durée exerce sur les lois de la résistance des milieux indéfinis.* Ce qui distingue essentiellement les corps solides des fluides parfaits, c'est, comme nous l'avons déjà observé (200), la grandeur de la force de cohésion qui unit entre elles leurs diverses parties. Dans les fluides, cette force est très-faible, de sorte que leurs molécules, qui sont séparées entre elles (27) par des pores d'une dimension comparable à la leur propre, jouissent d'une mobilité, d'une indépendance de mouvement pour ainsi dire parfaites; dans les solides et les corps mous, cette force est considérablement plus grande; et si, dans certains corps, tels que les terres légères et sèches, les sables, etc., qui sont composés de parties plus ou moins grossières et en apparence indépendantes, cette force de cohésion n'existe que très-peu ou même point du tout, elle se trouve, jusqu'à un certain point, remplacée, quant aux effets, par le frottement et la force de réaction qui, dans leur contact mutuel, naît de la différence et de l'opposition de leur mouvement.

Il résulte de là, pour les fluides en particulier, que la vitesse ne peut se transmettre qu'avec lenteur aux parties de la masse qui se trouvent à une certaine distance du point où se fait l'impression, et que, pour peu que cette distance soit grande, ou que la vitesse du mobile soit considérable, le mouvement ne s'y propage, en quelque sorte, jamais. Aussi arrive-t-il, dans ce cas, que la force vive totale, imprimée aux molécules du fluide, se réduit sensiblement à celle qu'ont acquise les parties qui avoisinent immédiatement le mobile, et dont le nombre ainsi que la vitesse étant directement en rapport avec la vitesse, la forme et l'étendue de ce mobile, permettent (199) de mesurer uniquement, par la force vive imprimée, la grandeur du travail nécessaire, à chaque instant, pour faire cheminer en avant le mobile avec sa vitesse constante, ou pour vaincre continuellement les forces d'inertie qui, presque seules alors, s'opposent à son passage.

Dans le cas des milieux consistants, au contraire, le mouvement imprimé directement par le mobile aux parties en contact, se propage, par l'intermédiaire des forces de cohésion et des résistances, dans toute l'étendue de la masse, avec une rapidité d'autant plus

grande que ces forces sont plus considérables. C'est ce que prouve, en effet, la formule $F \times t = M \times v$ du n° 130, qui donne $v = \frac{Ft}{M}$, c'est-à-dire un accroissement v de vitesse d'autant plus grand, pour un même instant infiniment petit t, et une même masse élémentaire m, que la force F, qui unit cette masse aux parties dont elle reçoit immédiatement le mouvement, est elle-même plus considérable. Il en résulte donc une *diffusion*, un *partage général* des quantités de mouvement (131 et 154), communiquées par le mobile aux parties qu'il choque directement, en vertu desquels la force vive transmise au milieu, dépend bien plus de l'étendue entière de ce dernier ou de sa masse totale, que de la forme extérieure et des dimensions propres du mobile, conformément à ce qui a été admis généralement dans les n°s 153 et suivants, ainsi que dans le n° 228.

Voilà pourquoi aussi nous avons pu dire, n° 200, art. 2, que, quand un milieu solide a des dimensions pour ainsi dire infinies par rapport à celles du corps dur qui le pénètre, la vitesse qu'il communique aux parties voisines, et dans le sens de son propre mouvement, doit, puisqu'elle est presque aussitôt disséminée dans la masse entière du milieu, être considérée comme tout à fait inappréciable (160) par rapport à la sienne propre. L'action se réduisant donc sensiblement alors à vaincre ou à détruire et le frottement, et les forces de cohésion qui s'opposent directement au passage du mobile, il arrive que la résistance en dépend presque uniquement, et peut leur être censée proportionnelle pour une étendue et une forme déterminées du corps dur.

231. *Conséquences générales et observations relatives aux milieux limités.* En résumé, on voit que le travail, qui devrait être dépensé par un moteur pour entretenir, au même état, le mouvement d'un corps dans l'intérieur d'un milieu résistant quelconque, se compose en réalité, à la fois, et du travail nécessaire pour vaincre les forces d'inertie des molécules de ce milieu, et de celui qui est nécessaire pour vaincre, à chaque instant, les forces de toute espèce qui unissent entre elles les différentes parties. Or, la pression totale exercée, sur le mobile, dans le sens de son mouvement, dépend essentiellement des premières forces pour les fluides parfaits, et des secondes pour les milieux qui ont beaucoup de consistance; mais, pour tous les états intermédiaires qui diffèrent beaucoup de

l'état qui constitue la fluidité ou la solidité parfaites, cette pression ne peut s'estimer rigoureusement ni par les simples forces d'inertie, ni par les simples forces de cohésion du milieu.

Nos raisonnements supposent expressément d'ailleurs que le milieu soit assez étendu pour que la masse entière ne reçoive, par l'action du mobile, aucun mouvement de transport général sensible, ou que, quand sa masse est limitée et comparable à celle de ce dernier, on ne considère que la portion de travail nécessaire pour produire immédiatement la séparation et le déplacement relatif de ses molécules, abstraction faite du mouvement général imprimé à toute sa masse : cette portion, qui a évidemment pour mesure le produit de la résistance R, exercée extérieurement contre le mobile, par le petit chemin relatif qu'il décrit à chaque instant dans l'intérieur du milieu, constitue véritablement (223) l'impression et la flexion souffertes par ce milieu. On a pu se convaincre, en effet (226 et suiv.), que, dans le cas d'un milieu limité, le travail total que devrait développer, contre le mobile, une puissance extérieure pour entretenir son mouvement absolu dans l'espace, ou, ce qui revient au même, la moitié de la force vive absolue qu'il perd à chaque instant, a, pour mesure, et le travail qui augmente la vitesse générale du milieu, et le travail qui produit immédiatement la pénétration et la flexion ou le déplacement relatif des molécules de ce milieu.

Nommons E le chemin absolu décrit, par le mobile, dans l'espace et dans un très-petit temps quelconque, E′ celui que décrit pareillement la masse entière du milieu, enfin e le chemin relatif que décrit le mobile dans l'intérieur de ce milieu, en vertu de la flexion générale et de la pénétration que ce dernier éprouve, on a évidemment $E = E' + e$, $RE = RE' + Re$; ce qui revient au principe énoncé, R étant la pression que le mobile éprouve dans le sens de son mouvement, et RE, RE′ étant d'ailleurs équivalents (186 et 187), l'un à la moitié de la force vive perdue par le mobile, l'autre à la moitié de la force vive gagnée par la masse entière du milieu ; de sorte que $Re = RE - RE'$ est véritablement égal à la moitié de la force vive détruite (161 et 226) dans la durée du choc. Quand le milieu limité est un fluide parfait, Re a sensiblement pour valeur la moitié de la force vive due aux mouvements relatifs qui ont été imprimés aux molécules qui avoisinent le mobile, et elle se mesure comme on l'a expliqué à la fin du n° 199.

Quand le milieu est très-consistant, Re a pour valeur approchée le travail même que nécessitent le rapprochement, l'écartement ou la désunion des molécules dont il s'agit, soit entre elles, soit par rapport aux molécules de la surface extérieure du mobile, et on la mesure comme il a été expliqué n° 216 et suiv.

232. ***Aperçus sur la durée de la propagation du mouvement dans l'intérieur des milieux.*** Nous avons vu ci-dessus (230) que, quand un milieu est choqué ou pénétré, en un certain point, par un corps dur quelconque, le mouvement, communiqué aux parties immédiatement en contact, se propage d'autant plus rapidement, à une distance donnée de ce point, que les forces de diverses espèces qui unissent ces parties à celles qui leur sont voisines, ont une plus grande intensité par rapport au poids ou à la masse de ces mêmes parties ; ce qui résulte bien clairement, ainsi que nous l'avons expliqué, de la formule du n° 130, qui donne également $t = \frac{M}{F} v$, et dans laquelle on suppose que M est la masse d'une certaine molécule, F la force qui l'unit à la molécule voisine déjà en mouvement, et v le degré de vitesse qu'elle en reçoit pendant le temps infiniment petit t. Or il est évident aussi que, pour un même milieu, le temps nécessaire à la propagation du mouvement, croît avec la distance dont il s'agit ; car il faut un certain temps t, quelle que soit la petitesse, pour que chaque molécule ait reçu, de la précédente, ou imprimé à la suivante, son accroissement de vitesse par l'intermédiaire des forces F qui l'unissent à elles, et cela successivement et de proche en proche ; ou, si l'on veut, le temps croît avec le nombre des molécules interposées entre celles qui touchent immédiatement le mobile et celles qui en sont séparées par l'intervalle que l'on considère. Enfin il n'est pas moins évident encore que le temps, nécessaire pour que les molécules, situées à cette distance, reçoivent un certain degré de vitesse donné et fini, est d'autant plus petit, à circonstances égales d'ailleurs, que le mobile agit immédiatement sur un plus grand nombre des molécules du milieu, ou par une plus grande surface ; car chacune des molécules éloignées de celles-là, en recevra, à la fois et dans un temps donné, une plus grande quantité de mouvement.

On voit donc que la durée de la propagation ou de la diffusion générale du mouvement, dans toute l'étendue du milieu, dépend

à la fois de la position de ses différentes parties par rapport au centre d'impression, de la forme qui limite extérieurement son étendue ou son volume, de la densité et de la force d'adhésion de ces mêmes parties, enfin de la forme et de l'étendue de la surface agissante du mobile. Quelle que soit, au surplus, l'intensité de la force de cohésion des molécules du milieu, la petitesse de son étendue par rapport à celle de la surface agissante, etc., on voit qu'il s'écoulera nécessairement un certain temps, fini et plus ou moins facile à apprécier, avant que le mouvement se soit distribué également entre toutes les parties, conformément à ce qui a été avancé dans les nos 57 et 63, et à ce qu'indique le résultat d'une infinité d'expériences relatives à la réaction des corps *.

233. *Exemple particulier de l'influence qu'exerce la durée de la propagation du mouvement.* Nous avons déjà rapporté (57) qu'une balle de fusil traverse une feuille de papier, un carreau de verre, une planche mince librement suspendus, sans leur communiquer une vitesse sensible, ce dont on peut être étonné au premier aperçu ; mais, en considérant, d'une part, qu'il faut un temps fini et appréciable pour que la vitesse se propage du centre d'impression aux points qui en sont à une certaine distance ; et, en considérant, d'une autre, que la feuille ou la planche ci-dessus ayant une faible épaisseur, la quantité de travail, qui se développe pendant la durée de la pénétration, est aussi une quantité très-petite (219) par rapport à la force vive primitive de la balle, on s'explique facilement la raison du phénomène.

En effet, par suite de cette dernière circonstance, la force vive de la balle sera très-peu diminuée et par conséquent le mouvement

* On remarquera qu'il s'agit spécialement ici du mouvement de transport général des molécules, en vertu duquel elles décrivent des espaces finis et croissants avec le temps, et non du mouvement *vibratoire* de ces molécules (19), par suite duquel elles ne feraient qu'osciller autour de leurs positions moyennes en s'écartant et se rapprochant alternativement les unes des autres. Ce dernier mouvement suit, à certains égards, des lois très-distinctes, quoiqu'il puisse coexister dans un même corps avec le premier : le plus léger ébranlement, imprimé à une ou plusieurs molécules, suffit pour le produire, et c'est particulièrement ce mode de mouvement qui produit la sensation des *sons aigus* ou des *sons graves*, selon qu'il est plus ou moins rapide.

L'étude difficile des phénomènes variés auxquels donne lieu la vibration moléculaire des corps, fait aujourd'hui l'objet des recherches de nos plus grands géomètres : elle a été préparée par les travaux de Chladni, et surtout, par les belles et récentes découvertes qui ont valu, à M. Felix Savart, la place qu'il occupe à l'Académie royale des sciences.

très-peu ralenti ; la pénétration aura donc lieu dans un temps excessivement court, et à peu près égal au quotient (48) de l'épaisseur traversée et de la vitesse moyenne, tandis que, par suite de la grande étendue transversale du milieu relativement aux dimensions propres du projectile, le mouvement n'aura pas pu, dans l'intervalle très-court dont il s'agit, se propager même à une assez petite distance du point d'action de la balle. Il est vrai que, dans les instants suivants, la vitesse reçue par les parties voisines de celles qui ont été enlevées, se répand, de proche en proche, dans toute l'étendue du milieu, et qu'il en résulte bientôt un mouvement de transport général ; mais il est aisé d'apercevoir par le calcul, que ce mouvement est extrêmement faible dans les hypothèses admises, même en ne tenant pas compte * de la quantité de mouvement et de la force vive communiquées à la portion, du milieu, enlevée par la balle, lesquelles sont nécessairement en déduction de la quantité de mouvement et de la force vive qui seraient transmises aux parties voisines, s'il y avait simplement *déchirement* et non *arrachement*.

Pour faire ce calcul, on devra d'ailleurs observer 1° que, d'après le principe du n° 154 qui s'applique à un instant quelconque du choc ou de la pénétration, *la quantité de mouvement perdue par la balle à l'instant où elle quitte le milieu, est égale à la quantité totale de mouvement qu'ont reçue, au même instant, les différentes parties de ce milieu ;* 2° que la force vive primitive de la balle se compose (226 et suiv.) de celle qu'elle conserve en quittant le milieu, plus de celle qu'elle a communiquée à ce milieu, plus du double de la quantité de travail qui a produit la pénétration, quantité que

* C'est aussi ce que nous avons négligé de faire au n° 222, et c'est ce qui se fait ordinairement en traitant de pareilles questions, où il conviendrait, en outre, de tenir compte de la flexion, de la déformation générales et permanentes éprouvées par le milieu. La première circonstance exerce évidemment une grande influence sur les résultats du phénomène, quand la masse des parties enlevées est comparable à celle du projectile, ce qui arrive principalement pour les corps durs et cassants ; l'autre en exerce une également très-appréciable quand le milieu est assez ductile pour céder au choc sans se laisser entamer ou enlever, et que son élasticité forcée ne lui permet pas de reprendre sa forme primitive (*voy.* n^os^ 234 et 235). Pour tenir compte d'ailleurs de ces effets dans les calculs, il faudrait ajouter à la force vive conservée par la balle, la force vive communiquée aux parties enlevées et qui ont acquis une vitesse égale à celle de cette balle, plus le double du travail nécessaire pour produire l'arrachement et la flexion persistante. Si, en outre, le projectile était déformé dans l'acte du choc, il faudrait y ajouter encore le double du travail nécessaire pour produire cette déformation ; mais il est clair, comme nous l'avons déjà observé, que l'une et l'autre de ces dernières quantités ne pourraient s'obtenir que à l'aide d'expériences spéciales.

nous avons appris ci-dessus à évaluer dans certains cas ; mais ce calcul exigeant, à la rigueur, l'emploi de l'algèbre, et étant plus curieux qu'utile, nous ne croyons pas devoir nous y arrêter.

Nous nous contenterons de remarquer, d'après toutes les réflexions qui précèdent, que l'étendue du milieu, sa forme, sa masse, sa flexibilité, la nature et la force de cohésion de ses parties, jouent un très-grand rôle dans le phénomène dont il s'agit, et qu'il ne convient pas de les négliger. On voit, par exemple, que, si la surface de la feuille ou de la planche ci-dessus est seulement égale ou très-comparable à celle du projectile ; que, si d'ailleurs son épaisseur et son poids sont faibles et sa force de cohésion très-grande, non-seulement sa vitesse pourra différer peu de celle de la balle, mais qu'il pourra arriver encore qu'elle soit entraînée sans être pénétrée ni même déchirée.

234. *Autre exemple relatif aux corps durs très-fragiles.* Un phénomène, non moins digne de remarque que celui qui vient d'être expliqué, et que l'on concevrait difficilement si l'on ne tenait pas compte de la nature particulière du milieu et du temps que le mouvement met à se propager à ses extrémités, c'est celui que présente un carreau de vitre qui, frappé par une balle, est percé d'un trou circulaire très-régulier, sans que le surplus de sa surface soit endommagé, tandis que le choc du même corps, animé d'une vitesse beaucoup moindre, ou la simple pression du doigt, peuvent suffire pour le briser en morceaux. Or ce fait s'explique très-bien en observant que, non-seulement le milieu est très-consistant, très-dur, mais qu'encore il est cassant, fragile, quoique doué d'une élasticité relative assez grande (19) ; ce qui annonce que ses molécules sont très-peu susceptibles de changer de place, c'est-à-dire de s'écarter ou de se rapprocher, entre elles, sans se désunir totalement. Il en résulte, en effet, que, même avant l'instant où le mouvement ait pu se propager à une faible distance autour du centre d'impression, les molécules qui sont immédiatement en contact avec la balle, cèdent à son action, et se séparent brusquement des molécules voisines, sans les entraîner et sans qu'il survienne par conséquent une flexion générale sensible, dans la surface du verre.

Dans le cas d'un mouvement lent, au contraire, ce mouvement a le temps de se propager et la flexion générale de se produire avant que les molécules en contact soient assez écartées, des molé-

cules voisines, pour s'en séparer ; et alors, selon la forme du carreau de verre et la manière dont il est appuyé à ses extrémités, il éclate à la fois dans tous les points où l'écartement et le rapprochement des parties ont atteint leurs limites.

Il est évident que ces raisonnements ne seraient plus applicables aux corps mous ni aux corps ductiles (1 et 8) ; car leurs molécules pouvant subir comparativement un très-grand écartement ou un très-grand rapprochement sans se désunir, ils peuvent aussi prendre une grande flexion sans se briser, soit qu'on les choque avec une certaine vitesse ou qu'on les presse lentement.

235. *Caractères qui distinguent la dureté de la ductilité.* Nous venons d'énoncer la différence essentielle qui existe entre les corps durs, qui sont tous plus ou moins cassants ou fragiles et d'ailleurs très-élastiques, et les corps mous, les corps ductiles qui le sont généralement peu. Dans ces derniers, la force de cohésion est telle qu'elle décroît lentement avec l'écartement des parties, et qu'elle peut même croître, jusqu'à un certain point, par leur rapprochement ; dans les corps très-durs, au contraire, la force de cohésion semble être à son *maximum* par suite de l'arrangement des molécules, de sorte qu'elle décroît très-rapidement pour de très-faibles compressions ou de très-faibles allongements. On sait en effet, par expérience, qu'on ne peut faire subir un changement sensible de forme ou de volume, à un corps cassant sans le rompre ; tandis qu'en réduisant le volume des corps ductiles, en les *écrouissant* par le choc ou la simple compression (13), on augmente à la fois leur ténacité et leur densité jusqu'à un certain terme, passé lequel leur constitution semble se rapprocher de celle des corps durs et fragiles, qui, d'après les expériences récentes de Perkins, se réduisent complétement en poussière lorsque, étant contenus de toutes parts, on les soumet à des pressions de plusieurs milliers d'atmosphères ; circonstance qui peut provenir d'ailleurs de la réaction qui s'opère à l'instant où l'on cesse brusquement la compression.

On s'explique également, par là, comment les corps durs peuvent résister à des efforts de tension très-considérables, sans se rompre et sans s'allonger d'une manière sensible, tandis qu'ils cèdent, au contraire, sous le plus petit choc ; en effet, ce choc, comme nous l'avons déjà dit (170), développe toujours, en un temps extrêmement court, des quantités de travail finies, et les efforts qui en résultent n'ont

d'autre limite (154 et 168) que celle de la dureté même et de la force d'inertie des corps ; tandis que les pressions, sans vitesse acquise, ne peuvent développer un travail appréciable qu'autant qu'elles auraient une intensité suffisante pour vaincre cette résistance à l'instant où elle acquiert une certaine valeur par l'effet de la compression. Enfin on s'explique aussi pourquoi des vases de cristal, dont la matière est très-dure, peuvent être brisés par suite de l'augmentation ou, en quelque sorte, de l'accumulation progressive du mouvement vibratoire qui a été imprimé, à leurs molécules, au moyen d'un archet ou de la simple vibration excitée dans l'air qui les environne ; tandis que la même chose n'a pas lieu pour un vase composé d'une substance beaucoup moins dure, mais très-ductile, telle que le fer, l'argent, etc. En effet, les molécules de ces dernières substances peuvent supporter des déplacements beaucoup plus grands sans se désunir complétement.

236. *Procédé usité dans les arts pour mesurer la dureté des corps par le choc ou la pression.* Nous avons vu (220) que, pour un milieu d'une grande étendue par rapport à celle du corps qui vient le choquer, les volumes des impressions totales sont sensiblement proportionnels aux forces vives de ce corps, et que le multiplicateur k de la résistance, qui mesure la dureté du milieu ou sa consistance, était sensiblement constant pour des substances homogènes ; il en résulte donc qu'en laissant tomber, d'une même hauteur ou de hauteurs différentes, un même corps sur diverses substances, le rapport des hauteurs totales (166), d'où le corps est tombé, au volume de l'impression, ou à sa profondeur si ce volume peut être considéré à peu près comme un cylindre, pourra servir de mesure à la force de cohésion ou à la dureté du milieu. C'est, en effet, ainsi qu'on procède dans les arts, pour reconnaître la valeur comparée de cette force dans certains cas, et c'est ainsi, entre autres, que M. Vicat procède pour faire l'essai de la résistance comparée des matériaux qui entrent dans les constructions *, en mesurant les enfoncements de tiges d'acier très-dur, dans ces matériaux.

Cette méthode convient spécialement dans tous les cas où la substance à essayer présente un certain degré de consistance ; mais,

* *Voyez* son important ouvrage ayant pour titre : *Résumé sur les mortiers et ciments calcaires* ; 1 vol. in-4°, Paris 1828.

pour des corps très-mous, la simple pression produite par le poids d'une tige verticale posée doucement sur la substance (165 et suiv.), pourrait servir au même objet, si elle n'avait l'inconvénient d'exiger plus de temps, et d'offrir moins de certitude dans ses résultats que celle où l'on opère par le choc. En effet, dans ce dernier procédé, le poids du corps dur étant toujours très-faible par rapport à la résistance du milieu, l'impression arrive rapidement à sa limite, et l'on ne peut se tromper que d'une très-petite quantité, sur sa profondeur totale, en la mesurant à l'instant où la vitesse est devenue insensible. Dans l'autre procédé, au contraire, il arrive, ou que le poids de la tige excède de très-peu les premières valeurs de la résistance, et alors l'impression est extrêmement faible et s'opère avec une excessive lenteur, ou que ce poids excède de beaucoup les valeurs dont il s'agit, et alors il peut bien se faire que, la résistance croissant très-lentement dans les instants suivants, ou devenant même tout à fait constante (216), elle n'atteigne qu'au bout d'un temps fort long ou pour une impression très-profonde, une valeur qui puisse détruire complétement l'accélération de vitesse occasionnée par le poids de la tige ; il peut même arriver, dans certains cas, que cette résistance soit constamment au-dessous du poids, et alors le mouvement ne s'éteindrait, pour ainsi dire, jamais, comme on en aura bientôt des exemples relatifs au mouvement des corps dans l'air.

D'ailleurs, en tenant compte de la force vive conservée par la tige à un instant quelconque, si sa valeur mérite d'être prise en considération par rapport au travail correspondant développé (166) par la gravité dans toute la descente de cette tige, et retranchant la moitié de cette valeur du travail dont il s'agit, on obtiendra encore la mesure du travail qui a produit l'impression correspondante, et dont le rapport avec le volume ou la profondeur de cette impression, pourra servir directement à apprécier (219) la résistance ou la dureté de la matière, soit qu'il s'agisse d'une même tige ou de tiges distinctes ayant la même forme et les mêmes dimensions vers la partie en contact avec le milieu. Ainsi, en surmontant la tige d'un poids assez lourd pour que la grandeur de l'impression soit exactement et facilement appréciable, on obtiendra, par cette dernière méthode, des résultats parfaitement comparables avec ceux qui résultent de l'emploi du choc ; en observant de plus, avec soin, la marche ou la vitesse de la tige aux divers instants, on pourra

même acquérir des notions utiles sur la loi que suit la résistance.

237. *Observations diverses sur ces procédés.* On voit, d'après ces discussions et tout ce que nous avons dit jusqu'ici concernant la résistance des milieux consistants, que les expériences, sur la dureté des corps, exigent beaucoup de précision et d'attention pour qu'on en puisse conclure des résultats rigoureux et comparatifs. Si l'on opère en particulier par le choc, il conviendra d'ajouter (166) la profondeur de l'impression à la hauteur de chute, et il faudra, dans certains cas (223 et suiv.), tenir compte de l'inflexion générale et du mouvement éprouvés par le milieu, ainsi que de la manière dont il est soutenu ou contenu : il est clair, par exemple, que, s'il s'agit d'une substance molle, elle présentera plus de résistance quand elle sera enfermée dans un vase solide, ouvert seulement à la partie supérieure, que quand elle sera simplement appuyée sur un plan de niveau, et qu'elle pourra y prendre un mouvement d'extension horizontal. On voit encore qu'il conviendra d'avoir égard à la déformation du mobile (222) quand sa dureté ne surpassera pas notablement celle du milieu, ainsi qu'à l'influence de la forme de ses faces antérieures et latérales en contact avec ce même milieu ; car la résistance varie avec cette forme, etc., etc.

Les faces latérales, entre autres, quand bien même elles forment une surface parfaitement cylindrique, éprouvent, de la part du milieu, une résistance qui croît avec la profondeur de l'impression : pour se débarrasser d'une telle cause de variation, qui ne tient aucunement à la dureté de la substance pénétrée, il conviendrait de donner aux tiges d'épreuve une base un peu plus large que le reste de ces tiges, ou de les terminer par une sorte de tête qui seule éprouverait les effets du frottement latéral, etc. Mais, quels que soient les procédés qu'on adopte, la résistance sera toujours compliquée des effets du frottement et de l'adhérence, qui sont étrangers à la dureté même du milieu ; de sorte qu'on n'obtiendra que des valeurs relatives à chaque appareil et non des valeurs absolues ; on doit du moins faire en sorte que les circonstances des épreuves soient semblables sous tous les rapports, et c'est ce qu'on obtiendra, entre autres, si on ne fait varier que le poids ou la hauteur de chute des tiges, de manière à obtenir des effets à peu près identiques (165 et suiv.).

238. *Autres procédés moins parfaits pour mesurer la dureté des*

corps. Lorsque les corps sont très-durs, lorsqu'ils ont une étendue limitée ou qu'ils sont fragiles (235), tels que le verre, l'acier, les cristaux, etc., on ne peut plus faire usage des méthodes précédentes, et l'on a recours à des moyens, à la vérité plus imparfaits encore que ceux qui précèdent, mais qui suffisent aux constructeurs, aux physiciens, aux naturalistes, aux lapidaires, etc., pour classer les différentes substances, naturelles ou artificielles, suivant leur ordre respectif de dureté. L'un d'entre eux consiste à agir, sur la substance qu'on veut soumettre à l'essai, par un foret en acier, chargé d'un certain poids et auquel on imprime un mouvement de rotation, puis à comparer entre elles les profondeurs auxquelles il est descendu pour un nombre donné de tours : c'est la méthode employée d'abord par Rondelet pour mesurer la dureté comparée des pierres, puis en dernier lieu, par M. Vicat, pour éprouver celle des mortiers, des ciments, etc. Un second moyen est celui qu'emploient les ouvriers, qui essayent les corps avec la lime, les burins et les outils tranchants en général. Enfin la méthode principalement en usage parmi les naturalistes et les lapidaires, consiste à faire glisser ou frotter les corps entre eux, en les pressant de manière à reconnaître celui qui raye, entame ou use l'autre : c'est ainsi qu'on reconnaît que le diamant est le plus dur des corps connus, que l'acier est plus dur que le verre, le verre plus que le fer, le cuivre, etc.

Il est évident que ces divers moyens ne sont pas, dans le fond, aussi différents qu'ils paraissent l'être au premier aspect, et qu'on pourrait obtenir, de tous, des résultats presque aussi rigoureux que de celui qui a été exposé n° 236, si on avait l'attention de faire les essais dans des circonstances parfaitement semblables, sous le rapport de la forme, des dimensions des parties agissantes, de la profondeur de l'impression, et qu'on n'oubliât pas d'ailleurs de tenir compte exactement de la force avec laquelle on comprime chaque corps sur l'autre, et de celle qui est nécessaire pour le faire cheminer avec une vitesse donnée. Mais nous aurons occasion de revenir plusieurs fois encore sur cet important sujet, à l'occasion de la résistance que les corps opposent à leur rupture, à leur flexion, à l'action des outils, etc.

EXAMEN DES PRINCIPALES CIRCONSTANCES DU MOUVEMENT HORIZONTAL ET VERTICAL DES CORPS DANS LES FLUIDES, ET SPÉCIALEMENT DANS L'AIR.

239. *Considérations préliminaires.* Nous n'avons jusqu'ici donné que de simples aperçus (113 et suiv.) sur la manière dont l'air agit, contre les corps, pour modifier et ralentir leur mouvement; les données des n^os^ 202 et suiv., jointes aux principes fondamentaux qui ont été exposés dans les *Préliminaires*, nous mettent en état d'apprécier et de calculer même rigoureusement, les lois de ce mouvement pour deux circonstances importantes : celle où le corps serait lancé, avec une certaine vitesse, dans la direction d'un plan horizontal solide qui supporterait, détruirait, à chaque instant, son poids ou l'action de la pesanteur, et celle où il serait lancé ou tomberait naturellement, dans la direction de la verticale, sans être aucunement soutenu contre cette même action. Nous apprendrons plus tard à calculer les lois du mouvement des corps qui, tels que les bombes et les boulets, sont lancés obliquement à l'horizon, et décrivent des courbes, au lieu de lignes droites, par l'action combinée et non directement contraire des différentes forces. On devra d'ailleurs remarquer que tous nos calculs et nos raisonnements demeureraient exactement applicables au cas où le corps serait mis en mouvement dans un fluide autre que l'air atmosphérique, par exemple dans l'eau, en y introduisant les modifications nécessaires et qui sont relatives à la densité, à la résistance de ce fluide.

Pour résoudre la question dans les cas particuliers et très-simples dont il s'agit ici, il est d'abord nécessaire de rechercher, pour chacun d'eux, la valeur de la force motrice ou dynamique (130) qui accélère ou retarde la vitesse du mouvement. Nous conserverons d'ailleurs toutes les dénominations des n^os^ 199 et suiv., et nous continuerons de représenter par F, la valeur, en kilogrammes, de la force totale dont il s'agit, par P le poids, par $M = \frac{P}{g}$ la masse du corps, et par V le degré de vitesse qu'imprime, à ce même corps, la force F dans le temps infiniment court t.

240. *Valeur de la force motrice dans le cas où le corps se meut sur un plan de niveau.* L'action de la pesanteur, sur le mobile, étant détruite par le plan qui le supporte, la force motrice se réduit alors

uniquement à la résistance du milieu, qui correspond à la vitesse V possédée à chaque instant par ce mobile; on a donc (211 et 215), par exemple, $F = R = 0{,}062534AV^2 = 0{,}00114V^2$ kil., pour le cas particulier du boulet du n° 215 et l'air atmosphérique dont il s'agit ici spécialement. On voit, par là, que le corps ayant été lancé avec une certaine vitesse initiale, cette vitesse sera de plus en plus diminuée et le mouvement ralenti, dans chacun des instants égaux à t, suivant une loi qui sera donnée (130) par la formule

$$v = \frac{F}{M} \times t = \frac{gF}{P} \times t = \frac{gR}{P} \times t = \frac{9^m,8088 \times 0{,}00114V^2}{12^k,68}$$

$$= 0{,}00085V^2 \times t; \text{ puisque } P = 12^k,68 \text{ (215).}$$

Mais, comme la résistance R décroît très-rapidement avec la vitesse V du projectile, le mouvement ne sera pas uniformément retardé (107 et 112); il le sera, de moins en moins, pour des instants t égaux et très-petits, ainsi que le démontre la formule ci-dessus, qui donne les diminutions v de la vitesse pour chacun de ces instants. De plus, comme cette diminution est une fraction d'autant moindre de la vitesse V, possédée à cet instant, que cette vitesse est plus faible, on voit qu'à la rigueur, le mouvement ne pourra jamais s'éteindre complétement, quoiqu'il aille sans cesse en diminuant d'intensité; en d'autres termes, ce n'est qu'après un temps excessivement long que la vitesse sera réduite à zéro.

241. *Ce n'est qu'après un temps infini, que la vitesse s'éteint ou parvient à sa limite, quand la force motrice diminue sans cesse.* Pour démontrer ce principe d'une manière positive, et qui s'applique généralement à tous les cas où la force motrice tend à s'affaiblir de plus en plus et indéfiniment, sans jamais changer le sens de son action; nous observerons que la formule, citée dans le numéro précédent, donne également, pour le temps t qu'une telle force met à imprimer au corps le petit degré de vitesse v, la valeur

$$t = \frac{M}{F} \times v = \frac{P}{gF} \times v,$$

laquelle indique qu'à mesure que F diminue, la valeur de la fraction $\frac{M}{F}$ croissant indéfiniment, il faut bien aussi que le temps t, nécessaire pour imprimer un même degré de vitesse v, devienne de plus en

plus grand, et finisse par devenir énorme même pour de très-petites valeurs de v. Quand, par exemple, F sera réduit à $0^k,00000001$, pour le cas du boulet ci-dessus dont le poids $P = 12^k,68$, le temps t, nécessaire pour diminuer ou pour augmenter la vitesse de la quantité $v = 0^m,001$, ou de 1 millimètre seulement par seconde, devra être de $\frac{12^k,68 \times 0^m,001}{9^m,81 \times 0^k,00000001} = \frac{12680000}{781} = 129256''$ ou environ 36 heures. On voit donc que la vitesse du mouvement ira sans cesse en croissant ou en diminuant d'intensité, sans jamais atteindre sa valeur limite, sa plus grande valeur, ou sans jamais devenir complétement nulle quoiqu'au bout d'un temps plus ou moins long, elle acquière une valeur qui diffère extrêmement peu de celle vers laquelle elle converge sans cesse.

Ainsi règle générale : *Toutes les fois que l'action d'une force motrice ou de pression ordinaire, agissant constamment ou sans interruption, sur un corps, soit pour augmenter, soit pour diminuer, à chaque instant, son mouvement, varie avec la vitesse même de ce mouvement, de manière à décroître sans cesse par une loi continue, ce n'est qu'au bout d'un temps infini qu'elle aura anéanti complétement la vitesse du corps, ou qu'elle lui aura fait acquérir une vitesse constante, une vitesse qui cesse désormais de changer, quoiqu'au bout d'un temps, souvent fort court, le corps parvienne sensiblement à l'un ou à l'autre de ces états.*

Ce principe est, en quelque sorte, évident par lui-même, puisqu'une force qui agit toujours fait nécessairement varier la vitesse à chaque instant, quelle que soit sa petitesse; mais il est clair aussi que, si son intensité ne dépendait pas uniquement de la vitesse, et qu'elle pût devenir nulle au bout d'un temps plus ou moins long, le corps acquerrait, au bout de ce temps même, la limite de son mouvement; or nous verrons bientôt qu'il existe de semblables forces motrices dans la nature.

242. *Réflexions sur la manière dont le mouvement s'éteint ou s'accomplit à la surface de la terre.* S'il paraît quelquefois, comme dans le cas de la communication du mouvement par le choc, par le ressort des gaz de la poudre, etc., que des forces motrices décroissantes impriment aux corps toute leur vitesse, après un temps souvent fort court, c'est qu'en effet ces forces, par elles-mêmes excessivement grandes, font, au bout d'un très-petit temps, parvenir

les corps à un état de mouvement qui approche beaucoup de celui qui répond à la limite ; c'est que les forces motrices ne suivent pas exactement les lois de décroissement que nous leur supposons à la première vue ; c'est que leurs effets se compliquent des effets d'autres forces qui acquièrent de l'influence à mesure que celle des premières va en s'affaiblissant, ou plutôt c'est que nous ne tenons pas un compte exact de toutes les forces, distinctes de l'inertie, qui agissent sur le corps ; car la force motrice, dont nous entendons parler ici, est le résultat combiné de toutes ces forces ; elle produit seule (130) le mouvement, et vaine seule l'inertie ou la force dynamique. C'est qu'enfin nous admettons volontiers, pour la facilité des considérations, que les corps, en se séparant après leur réaction mutuelle ou après leur choc, sont parvenus à un état de mouvement stable ; qu'ils ont acquis toute leur vitesse finale, et ne sont plus sollicités par aucune force ; tandis que, dans la réalité, ils restent encore soumis à l'action des forces moléculaires ou de ressort qui ont été mises en jeu (223 et suiv.) dans leur intérieur, et qui ne rentrent dans leur état d'équilibre ordinaire, qu'après que chaque corps a exécuté une infinité d'oscillations autour de cette position d'équilibre.

Au surplus, il faut bien le reconnaître d'après le résultat des belles expériences de l'illustre Coulomb et de beaucoup d'autres observateurs habiles, il existe des forces motrices et des résistances, telles que la pesanteur, les divers frottements, l'adhérence des corps en contact, la résistance des corps solides à la compression, à la pénétration, etc. (216), qui sont indépendantes de la vitesse du mouvement, et qui demeurent même constantes quelle que soit cette vitesse. Or tous les mouvements qui s'accomplissent à la surface de notre globe, étant nécessairement soumis, tôt ou tard, à l'action de semblables forces, il arrive toujours que ces mouvements s'anéantissent complétement, ou qu'ils parviennent à leur limite en un temps qui n'est jamais infiniment long, et qui même est en général fort court.

Voilà aussi pourquoi le mouvement ne peut s'entretenir ici-bas, dans les corps, sans une dépense continuelle de travail ou d'action ; et voilà pourquoi le *mouvement perpétuel*, que rêvent des hommes privés des premières notions de la Mécanique et de la Physique, est une véritable chimère, quand on le recherche ailleurs que dans l'action immuable des forces de la nature, qui font mouvoir les

corps célestes dans un espace vide ou privé de toute résistance, et qui, sur la surface de la terre, servent, par leur renouvellement périodique plus ou moins régulier, à faire fonctionner nos machines de diverses espèces.

243. *Idée de la manière dont le mouvement horizontal des corps peut s'anéantir complétement, même en un temps fort court.* Nous avons supposé ci-dessus (240) que le mouvement horizontal du corps était uniquement retardé par l'effet de la résistance de l'air, qui, diminuant sans cesse d'intensité avec la vitesse, ne peut jamais parvenir à réduire entièrement le corps au repos; mais nous n'avons pas tenu compte d'un autre genre de résistance qui naît de ce que ce corps ne peut se mouvoir horizontalement sans être soutenu par un plan matériel qui détruise, à chaque instant, l'action de la gravité sur ses propres parties, et sans presser ce plan materiel avec un effort égal à son poids; d'où résulte une compression réciproque qui use les deux corps, ou altère, plus ou moins promptement, leur forme aux dépens de la force vive de celui qui est mobile. Or, les expériences de Coulomb, que nous ferons connaître plus tard, prouvent que la résistance qui provient de cette cause, est indépendante de la vitesse, ou reste la même à chaque instant, et qu'elle est une fraction déterminée, bien qu'assez faible, du poids du mobile, soit qu'il roule ou ne fasse simplement que glisser en cheminant en avant.

Nommant donc f cette petite fraction, nous aurons (240), $F = R + fP$; de sorte que, quelle que soit la vitesse V du corps à un certain instant, et par conséquent la valeur de R, la force motrice F, qui ralentit le mouvement, fera perdre à ce corps, dans chaque temps t, une portion de vitesse qui sera au moins égale à $\frac{fP}{M} \times t = fg \times t$, ou qui serait exactement fgt, si la résistance de l'air ne venait l'augmenter; et, comme ici f, ou le frottement, est constant, on voit bien qu'au bout d'un temps plus ou moins long T, il aura détruit, à lui seul (112), une vitesse fgT, qui pourra être une fraction notable de celle que possédait primitivement le corps, ou lui être même tout à fait égale : supposant, par exemple, la vitesse initiale de 500^m, et $f = \frac{1}{30}$ seulement, on aura, pour calculer le temps T, qui répond à la fin du mouvement,

$$500^m = \tfrac{1}{30}\, 9^m,81 \times T = 0^m,327 \times T; \quad \text{d'où } T = 1529'',$$

environ $25'\frac{1}{2}$. Mais, attendu que la résistance de l'air joint son action à celle du frottement du plan, et que cette action a une intensité très-grande dans les premiers instants (215); on voit qu'en réalité, il faudra un temps considérablement moindre encore pour que le mouvement soit complétement anéanti, comme on l'observe en effet dans tous les cas analogues.

Ce qui suit présente l'exemple de phénomènes de mouvement où la même circonstance se reproduit par l'action constante de la pesanteur.

244. *Valeur de la force motrice dans le cas où le corps est lancé verticalement de bas en haut.* Il est évident que le mouvement est à la fois retardé alors, et par la résistance R du milieu, et par l'action de la pesanteur sur le corps, ou de son poids P; mais il convient ici (41, 118 et suiv.) de diminuer ce poids de celui du volume d'air qu'il déplace, puisqu'en vertu de la pression atmosphérique extérieure, il est poussé, de bas en haut, avec une force mesurée par ce dernier poids, que nous nommerons P', et qu'il sera facile de calculer connaissant la densité p du fluide (211). Nous aurons donc (202)

$$F = R + P - P' = kp\frac{AV^2}{2g} + P - P'.$$

S'il s'agit, par exemple, du boulet du n° 215, en mouvement dans un air dont la densité est $1^k,227$, on aura, attendu que, sous le même volume, les poids sont comme les densités (38 et suiv.), et qu'ici la densité de la fonte est censée de 7207^k,

$$P' = \frac{1^k,227}{7207^k}P = 0,00017\,P = 0,00017 \times 12^k,68 = 0^k,002,$$

quantité excessivement petite par rapport au poids propre du boulet, et qu'on peut, sans inconvénient, négliger dans le cas actuel: de sorte qu'on aura simplement (240)

$$F = 0,0011kV^2 + 12^k,68.$$

Le mouvement sera donc alors de plus en plus retardé, comme dans le cas qui précède (243), mais d'une manière bien autrement rapide; et l'on voit que, la force retardatrice conservant, à tous les instants, une valeur qui surpasse $12^k,68$, il faudra bien que le mouvement finisse par s'éteindre complétement, même en un temps fort court.

Mais, si le corps, au lieu de la densité 7207^{kil}, en avait une beaucoup moindre et comparable à celle de l'air, ou si c'était une boule creuse extrêmement légère, remplie d'un gaz quelconque, il ne serait évidemment plus permis d'en agir ainsi. Dans le cas, par exemple, d'un ballon, en taffetas verni, gonflé par du gaz hydrogène dont la densité est environ le $\frac{1}{15}$ de celle de l'air (40) ou $\frac{1}{15}\,1^{k},227 = 0^{k},082$ pour 1^{mc}, le poids de l'enveloppe, réuni à celui du gaz qu'il contient, c'est-à-dire P, pourrait même devenir moindre que le poids du volume d'air déplacé ; et alors, non-seulement il ne faudrait pas imprimer de vitesse initiale à ce ballon pour le faire partir, mais encore il tendrait, par lui-même, à s'élever avec une force mesurée par $P' - P$, et qui lui imprimerait un mouvement uniformément accéléré (108), si la résistance R ne venait aussitôt le ralentir ; la force motrice totale serait donc alors

$$F = P' - P - R = P' - P - kp\,\frac{AV^2}{2g}.$$

245. *Exemple particulier relatif à l'ascension verticale des ballons.* Supposons, fig. 57, un ballon sphérique de 10^{m} de diamètre, son volume sera à très-peu près $523^{mc},6$; par conséquent le poids du volume d'air qu'il déplace sera $523^{mc},6 \times 1^{k},227 = 642^{k},5$, et celui du gaz hydrogène qu'il contient $\frac{1}{15}\,642^{k},5 = 42^{k},8$ environ. Si donc le poids de son enveloppe, de la nacelle en osier qui est suspendue au-dessous et de tout le surplus de son équipage équivaut à $399^{k},7$, ce qui suppose que la nacelle porterait des objets fort lourds, tels que des hommes, etc., le ballon serait enlevé avec une force constante de $642^{k},5 - 42^{k},8 - 399^{k},7 = 200^{kil}$, qui sera diminuée, à chacun des instants du mouvement ascensionnel, de toute la résistance opposée par l'air, laquelle sera ici, à vitesses égales (215), les $\left(\frac{10^{m}}{0^{m},15}\right)^{2} = \left(\frac{200}{3}\right)^{2} = \frac{40000}{9}$ de celle $0,0011\,kV^2$ qui a été trouvée pour le boulet de $0^{m},15$ de diamètre, attendu que les résistances sont sensiblement entre elles comme les carrés des diamètres ; c'est-à-dire, en un mot, qu'on aura

$$R = \tfrac{40000}{9} \times 0,0011\,RV^2 = \tfrac{44}{9}\,kV^2 = 4,89\,kV^2 \text{ environ},$$

$$\text{et } F = 200^{k} - 4,89\,kV^2.$$

On voit que le ballon partira, de terre, avec une vitesse d'abord nulle, et qui augmentera, de plus en plus, tant que la résistance

4,89 kV^2 sera moindre que 200^k; mais, quand elle égalera ce poids, c'est-à-dire quand la vitesse V approchera de 8^m par seconde, la valeur de k étant alors (210) d'environ 0,64, et la force motrice F devenant nulle, le ballon conservera, en vertu de l'inertie (55), constamment la vitesse de 8^m qu'il possède à cet instant, ou se mouvra *uniformément*, avec ce degré de vitesse, tant que les circonstances resteront les mêmes, c'est-à-dire, tant que la densité de l'air et la force de la pesanteur ne changeront pas pour les diverses positions du ballon, en effet il est clair qu'alors F restera aussi constamment nulle. Or c'est ce qu'il n'est pas possible d'admettre (37 et 61), même pour les ascensions les plus habituelles des voyages aérostatiques, d'autant plus que l'expérience a appris que la température de l'air, qui influe notablement sur sa densité (211), diminue, comme la gravité, à mesure qu'on s'élève au-dessus de la surface des plaines. En effet, la hauteur de ces ascensions surpasse généralement 2000 à 3000 mètres; et l'on a vu, dans un célèbre voyage entrepris uniquement pour le progrès des sciences, un célèbre physicien français, M. Gay-Lussac, s'élever verticalement dans les airs à une hauteur de 7015^m au-dessus du niveau des mers; ce qui est la plus grande élévation qu'aient encore pu atteindre les hommes.

Ainsi les calculs qui précèdent ne peuvent concerner que des élévations médiocres, et qui ne surpasseraient pas, par exemple, 300 à 400 mètres de hauteur verticale; dans toute autre circonstance, on ne devra les considérer que comme de simples approximations servant à donner une idée des phénomènes, et qui souvent pourront suffire pour l'objet qu'on se propose. Il ne serait pas impossible, à la rigueur, de tenir compte de la variation de densité des couches atmosphériques, qui exerce le plus d'influence; on sait la calculer assez exactement quand on connaît la température et la pression barométrique au niveau de la terre, et pour un lieu déterminé; mais ce serait nous jeter dans des calculs qui ne seraient pas ici à leur place, d'autant plus qu'ils n'auraient d'utilité que pour la question des ballons *, et qu'on peut se dispenser d'y avoir égard pour celle des projectiles qui, tels que les bombes, sont

* Nous rappellerons, à cette occasion, que les ballons aérostatiques furent découverts en 1782, par le célèbre Montgolfier d'Annonay, et que Pilatre du Rosier, physicien distingué, né à Metz, périt, en 1785, victime de son zèle pour les progrès d'un art qui était encore dans son enfance, lorsqu'il tenta de franchir le détroit qui sépare la France de l'Angleterre. Il fut aussi le premier qui, au mois d'octobre 1783, c'est-à-dire quelques

élevés dans l'air, par la force de la poudre, à des hauteurs généralement médiocres.

246. *Calcul de la force motrice dans le cas où le corps est lancé verticalement, de haut en bas, ou tombe par son propre poids.* Cette force tend nécessairement à accélérer le mouvement du corps, toutes les fois que la densité de ce dernier est très-grande par rapport à celle du fluide : elle se compose évidemment alors du poids P de ce corps dans le vide, poids qui mesure proprement l'action de la gravité sur ses différentes parties, diminué et du poids P′ du volume d'air qu'il déplace, et de la résistance R qu'il éprouve, à chaque instant, de la part de l'air extérieur; on aura donc, pour le cas dont il s'agit,

$$F = P - P' - R = P - P' - kp\frac{AV^2}{2g},$$

et le mouvement s'accélérera continuellement, tant que le poids P — P′ du corps dans l'air surpassera la résistance R, qui lui est opposée. Mais, de même que pour le cas ci-dessus des ballons, il s'accélérera de moins en moins, attendu que la résistance R croîtra rapidement avec la vitesse, et il arrivera bientôt un instant où le mouvement ne s'accélérera, pour ainsi dire, plus du tout, quand R approchera d'être égale à P — P′, ou quand la vitesse différera très-peu de celle qui est donnée, par l'égalité

$$P - P' = R = kp\frac{AV^2}{2g}, \text{ ou } V^2 = \frac{2g(P - P')}{kpA},$$

au moyen de l'extraction de la *racine carrée* du quotient de $2g(P - P')$ par kpA. Ainsi le mouvement tendra sans cesse, dans le cas dont il s'agit, à devenir uniforme, et il le deviendrait rigoureusement si le mobile pouvait effectivement acquérir la vitesse ci-dessus qui en est la limite.

Ces circonstances supposent essentiellement que P — P′ surpasse R, dès l'origine du mouvement ou à l'instant du départ du

mois seulement après l'époque où les frères Montgolfier firent leur brillante expérience d'Annonay, eût le courage de se frayer une nouvelle route dans les airs, à l'aide des ballons. La ville de Boulogne-sur-Mer, près de laquelle eut lieu la chute de du Rosier, a fait élever, à sa mémoire, un monument modeste naguère en ruine, et que la Société académique de cette même ville vient généreusement de restaurer, en honorant ainsi une seconde fois, le courage malheureux d'un savant qui lui fut étranger.

mobile ; s'il en était autrement, et que P fût d'ailleurs plus grand que P′, comme on vient de le supposer, la vitesse serait évidemment diminuée ou retardée par l'action d'une force

$$F = R - (P - P'),$$

et le serait continuellement jusque vers l'instant où, la résistance R, diminuant de plus en plus, deviendrait telle qu'ajoutée à P′, elle serait simplement égale au poids P du corps dans le vide ; ce qui arriverait pour la vitesse donnée par l'égalité

$$P - P' = R = kp\frac{AV^2}{2g}, \text{ ou } V^2 = \frac{2g\,(P - P')}{kpA}.$$

Cette vitesse limite étant la même que celle du cas précédent quand le corps et le milieu sont aussi les mêmes, on voit que, *quelle que soit la vitesse avec laquelle on lance, du haut en bas et dans la direction verticale, un corps donné, dans un fluide indéfini dont la densité est moindre que la sienne propre, ce corps tendra toujours à acquérir la même vitesse limite, et il l'atteindrait sensiblement, au bout d'un temps plus ou moins long, si aucun obstacle étranger ne venait suspendre tout à coup son mouvement.*

Enfin, si la densité de l'air surpassait celle du mobile, ou que P′ fût plus grand que P, la vitesse serait de plus en plus retardée tant par l'action de P′ que par l'action de la résistance R, de sorte qu'on aurait, dans le même cas,

$$F = R + P' - P ;$$

quelle que fût la valeur de cette résistance ou de la vitesse.

La valeur de $R + P'$ surpassant constamment P, il est clair que le mouvement finira par s'éteindre, comme dans le cas du n° 241, et, attendu qu'on aura, à cet instant, $V = 0$, $R = 0$, $F = P' - P$, on voit que le corps tendra aussitôt à rebrousser chemin, ou à remonter en vertu d'une force motrice

$$F = P' - (P + R) ;$$

il suivra donc dès lors absolument les mêmes lois que celles qui se rapportent à l'ascension des ballons (244 et 245) ; ce qui nous dispense de poursuivre davantage l'examen de son mouvement. Ce cas est d'ailleurs analogue à celui que présente un corps dense lancé, de bas en haut, avec une certaine vitesse, et qui, parvenu

à sa plus grande élévation, redescend ensuite en vertu de l'action prépondérante de son poids sur celui du volume d'air qu'il déplace.

247. ***Exemples de calcul relatifs à la plus grande vitesse de chute des boulets.*** Dans le cas du boulet du n° 215, le mouvement deviendra uniforme à l'instant où l'on aura

$$12^k,68 = 0,0011\ kV^2,$$

puisqu'on peut négliger alors P′ vis-à-vis de P (244); or on voit de suite, d'après la table du n° 215, que cette condition est satisfaite pour une vitesse d'à peu près 126^m par seconde, répondant (210) à la valeur 0,73 du multiplicateur k de la résistance. Telle est donc aussi la plus grande vitesse qu'un boulet, de ce poids et de cette dimension, puisse acquérir en tombant verticalement dans l'air. Cette vitesse serait évidemment moindre pour un boulet d'eau congelée ou de bois de même diamètre; car la résistance, à vitesse égale, resterait toujours la même, tandis que le poids P serait diminué.

Par exemple, pour un boulet en bois d'orme dont la densité est environ (35) le neuvième de celle de la fonte de fer, on aurait $\frac{1}{9}\ 12^k,68 = 0,0011\ kV^2$, et la vitesse limite V serait un peu supérieure à $\frac{1}{3}\ 126^m = 42^m$, ou plus exactement à $43^m,50$, attendu que la valeur de k est ici (210) 0,69 au lieu de 0,73. Un boulet de platine, ayant de même 15° de diamètre, tomberait, au contraire, avec une vitesse qui surpasserait 126^m, à peu près de $0,73 \times 126 = 92^m$. Enfin, pour des boulets, en fonte de fer, qui auraient un diamètre au-dessous de 15°, la plus grande vitesse de chute serait nécessairement moindre que 126^m: pour un boulet de 3° de diamètre, par exemple, on aurait (215) l'égalité

$$\frac{1}{125}\ 12^k,68 = \frac{1}{25}\ 0011\ k\ V^2, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{5}\ 12^k,68 = 0,0011\ k\ V^2;$$

ce qui donne, en supposant d'abord approximativement $k = 0,7$,

$$V^2 = \frac{2,536}{0,00077} = 3293^{mq},5;$$

d'où on tire, en extrayant la racine carrée, $V = 57^m,4$ pour la plus grande vitesse de chute; et, comme, d'après la table du n° 210, la valeur de k relative à cette vitesse est effectivement 0,70, il n'y a pas lieu à recommencer le calcul pour obtenir un plus grand degré d'approximation dans les résultats.

248. *Observations sur le mouvement des parties très-fines des corps.* Ceci explique pourquoi les poussières extrêmement ténues (7) tombent, dans l'air et à plus forte raison dans l'eau, avec une si grande lenteur, quoique leur densité surpasse de beaucoup celle du fluide qui les renferme ; nos formules peuvent même servir à calculer quel devrait être le diamètre d'un grain sphérique d'une substance connue, pour que la vitesse de chute ne surpassât jamais une vitesse donnée : par exemple, pour un grain de fer coulé tombant dans l'air, dont la vitesse limite devrait être seulement de $1^{mil} = 0^m,001$, et dont n serait le rapport du diamètre à celui du boulet de 15^c, on aura (210)

$$n^3 \times 12^k,68 = n^2 \times 0,0011 \times 0,59 \times (0,001)^2,$$

ou

$$12^k,68\, n = 0,000000000649;$$

et par conséquent $n = \dfrac{0,000000000649}{12,68} = 0,00000000005$ environ;

donc enfin le diamètre du grain

$$= 0,00000000005 \times 0^m,15 = 0^m,0000000000075,$$

quantité moindre qu'un cent-millionième de millimètre.

Les mêmes considérations peuvent aussi servir à expliquer pourquoi les courants d'air entraînent les poussières, d'un même corps, d'autant plus loin qu'elles sont plus ténues ; tandis que ces mêmes parties sont, à l'inverse, celles qui vont le moins loin quand on les lance, dans un air en repos, avec une certaine vitesse horizontale ou ascensionnelle. Enfin on se rendra parfaitement raison de l'énorme différence qui existe entre les vitesses de chute de plusieurs corps, qui, sous le même volume, ont des densités ou des poids également très-distincts : la diversité des formes en apporte d'au moins aussi grandes comme on va le voir.

249. *Calcul de la plus grande vitesse de descente des parachutes.* On sait que les parachutes, à l'aide desquels les aéronautes peuvent abandonner leurs ballons et descendre, sans danger, des régions supérieures de l'atmosphère, sont à peu près disposés comme les parapluies ordinaires, fig. 58, si ce n'est qu'ils reçoivent des dimensions beaucoup plus grandes, et qu'ils portent, à l'extrémité inférieure de leur tige verticale, une gondole ou petite nacelle en osier propre à recevoir le voyageur. On peut juger, d'après ce qui a été

observé n° 204, que l'ouverture la plus avantageuse du cône formé par la surface du parachute est celle qui donne à ce cône une hauteur égale environ au $\frac{1}{3}$ ou au $\frac{1}{4}$ du diamètre de sa base ; considérant donc (211) la résistance $R = 0{,}06253\ kAV^2$ kilog., que présenterait la surface concave d'un tel parachute ayant 8^m de diamètre ou 4^m de rayon à sa base, on aura (203 et 204)

$$A = 3{,}1416 \times 4^m \times 4^m = 50^{mq},2656, \quad k = 2{,}50 + \tfrac{1}{5}\,2{,}5 = 3,$$

au moins, et par conséquent

$$R = 0{,}06253 \times 3 \times 50^{mq},2656\ V^2 = 9{,}4293\ V^2 \text{ kilog.}$$

Supposant que le poids du voyageur et de tout le surplus de l'équipage soit de 85^{kil} environ, on aura, pour déterminer la plus grande vitesse qu'acquerra le parachute, dans sa descente, la condition $9{,}4293\ V^2 = 85^{kil}$, ou $V^2 = 9^{mq}$ environ ; d'où la vitesse cherchée $V = 3^m$ par seconde. Une telle vitesse, en supposant même qu'elle pût être atteinte par le parachute, serait assez faible pour prévenir tout accident à l'instant où la gondole toucherait terre.

Nous ajoutons *en supposant qu'elle pût être atteinte,* car nous n'avons pas tenu compte de la résistance de la gondole, des tiges du parachute, etc., et les calculs ne se rapportent qu'à la plus grande vitesse de chute que puisse acquérir le système, à celle qui répond à l'instant où le mouvement est devenu entièrement uniforme (245 et suiv.) Or il est aisé de se convaincre que, dans la réalité, les corps qui tombent ou s'élèvent verticalement dans l'air ne peuvent, ainsi que nous l'avons déjà insinué (246) et conformément au principe du n° 241, jamais parvenir rigoureusement à cet état de mouvement, quoiqu'ils en approchent sans cesse, et que, dans certains cas où la force motrice F possède une grande valeur par rapport au poids P ou à la masse M du corps, ils puissent en approcher, de très-près, au bout d'un intervalle de temps même médiocre.

250. *Démonstration géométrique de l'impossibilité que le mouvement continu atteigne rigoureusement une parfaite uniformité.* Quoique ce fait résulte immédiatement des discussions du n° 241 déjà cité, il ne sera pas superflu de le démontrer directement, sans calculs et par les seules considérations de la Géométrie, d'autant plus que le principe est important, et s'applique indistinctement à tous les cas où le mouvement tend, sans cesse, à se régulariser par l'action

d'une force dynamique qui varie, en même temps que la vitesse, suivant une loi exactement continue et mathématique.

Traçons (fig. 59 et 60), une courbe ABC dont les abscisses Ot', Ot'', Ot''',.... représentent (50) les temps successivement écoulés depuis l'origine du mouvement, qui répond ici au point O, et dont les ordonnées $t'v'$, $t''v''$, $t'''v'''$, ... correspondantes représentent, au bout de ces temps respectifs, les vitesses acquises par le point du corps où est censée appliquée la force motrice ; il est clair que, si cette force motrice et par conséquent la vitesse augmentent (fig. 59), ou diminuent (fig. 60), constamment, par succession insensible et par une loi rigoureusement continue, la courbe s'éloignera ou s'approchera aussi, sans cesse, de l'axe des abscisses OT. Si donc la vitesse doit devenir, à la fin, constante ou uniforme, la courbe devra également, dès lors, se confondre avec une ligne droite parallèle à OT; mais, comme une courbe diffère essentiellement, dans sa nature, d'une simple ligne droite ; comme son tracé géométrique, sa loi mathématique sont essentiellement distincts du tracé et de la loi de celle-ci ; comme enfin nous avons supposé que le décroissement de la force motrice est essentiellement continu et suit une loi invariable, il faut nécessairement admettre aussi que la courbe ABC des vitesses ne dégénère jamais, rigoureusement parlant, en une simple ligne droite, mais bien qu'elle en approche de plus en plus et indéfiniment ; de sorte, par exemple, qu'au bout d'un temps excessivement long, ou à une distance excessivement grande de l'origine O, les vitesses ou les ordonnées diffèrent aussi extrêmement peu de celles qui appartiennent à une droite DE parallèle à l'axe OT des temps ou des abscisses. Or cette droite est ce qu'on nomme une *asymptote* dans la Géométrie des courbes, et c'est la valeur constante OD de ses ordonnées que nous avons, tout à l'heure, déterminée pour le cas du mouvement vertical des corps dans l'air.

Telle est l'interprétation géométrique très-simple du fait qui nous a d'abord été signalé par le calcul et le raisonnement, fait qui se reproduit dans une infinité de circonstances, parce qu'il existe aussi une infinité de lois, une infinité de courbes qui donnent lieu à des *asymptotes*, dont le caractère général est, comme on voit, de *s'approcher continuellement et indéfiniment d'une certaine branche de courbe, sans néanmoins pouvoir jamais l'atteindre*, et que l'on considère aussi quelquefois comme de véritables tangentes au point situé à l'infini sur une telle branche.

Les *hyperboles*, entre autres *, dont nous avons rencontré un exemple particulier dans le n° 181, possèdent deux asymptotes pareilles, quand on les trace dans toutes leurs parties ; car elles ont aussi deux branches infinies ; mais toutes les courbes qui ont de telles branches n'ont pas pour cela des asymptotes : la *parabole*, entre autres, est dans ce cas **. On doit voir, par là, combien l'étude des courbes géométriques est utile pour la Mécanique, puisque chacune de leurs propriétés répond essentiellement aussi à une propriété relative à une des lois du mouvement des corps ou de l'action des forces motrices.

251. *Réflexions sur la manière dont les moteurs communiquent le mouvement aux machines.* Quand un moteur animé ou inanimé est appliqué à une machine industrielle quelconque, il commence par la mettre en mouvement avec un effort qui d'abord est très-grand (146), il détruit à la fois, au point où il opère immédiatement, et la réaction provenant de l'inertie des pièces de la machine et celle des diverses résistances nuisibles ou utiles ; la force dynamique F, qui accélère le mouvement, est donc, alors égale à l'excès de l'effort total du moteur sur l'effort que lui opposent directement celles des résistances dont il s'agit, qui sont indépendantes de l'inertie. Or, comme ces résistances ou restent sensiblement les mêmes à chaque instant, ou augmentent de plus en plus avec la vitesse, et que l'effort du moteur décroît, au contraire (148), de plus en plus, il en résulte que le mouvement s'accélère, de moins en moins, à peu près comme dans les cas qui précèdent, de sorte qu'il tend sans cesse à se régulariser ou à devenir uniforme ; mais ce n'est qu'au bout d'un temps, souvent fort long, que la vitesse atteint sensiblement la limite de sa valeur, à laquelle elle ne parvient même jamais mathématiquement parlant.

Toutefois les moteurs animés différant essentiellement des autres en ce qu'ils ont la faculté de maintenir, pendant un certain temps, l'intensité entière de leur effort primitif, malgré l'augmentation de la vitesse, puis de le diminuer tout à coup, et de le réduire à celui qui est strictement nécessaire pour vaincre les résistances étrangères à l'inertie, ou pour entretenir la vitesse du mouvement au

* Consultez à ce sujet la 13e leçon du *Cours de Géométrie* de M. Dupin, 1er vol., pag. 314, ou la page 92 de la *Géométrie des courbes* de M. Bergery.

** Voyez les ouvrages cités dans la note ci-dessus, pages 321 et 103 respectivement.

point où elle est parvenue à un certain instant, on voit que la proposition ci-dessus n'est plus exactement applicable, et que la machine peut atteindre, au bout de très-peu de temps, l'état moyen de mouvement qu'elle doit conserver. Or la même chose aura lieu (241) toutes les fois que la force motrice suivra une loi arbitraire, et qui ne dépendra pas uniquement de la vitesse.

CALCUL DES LOIS DU MOUVEMENT HORIZONTAL ET VERTICAL DES CORPS DANS LES FLUIDES INDÉFINIS.

252. ***Méthode pour trouver le temps qui répond à une vitesse donnée ou acquise par le corps.*** Nous avons fait connaître (134) une méthode générale pour trouver, par des tracés géométriques, la loi du mouvement des corps quand celle de la force motrice est donnée, ce qui est le cas actuel ; mais cette méthode, bonne comme moyen de démonstration et pour faire comprendre la liaison étroite qui subsiste entre le temps, la vitesse, la force et l'espace décrit à chaque instant, ne l'est pas quand il s'agit de calculer effectivement toutes les circonstances du mouvement; parce qu'elle serait peu rigoureuse d'une part, et que, de l'autre, elle donnerait lieu à des opérations trop multipliées, trop pénibles. Or on peut atteindre le but par un procédé exempt de ces inconvénients, et qui est fondé sur le principe de Thomas Simpson (180) pour calculer l'aire des courbes. Ayant d'ailleurs appris, dans les numéros précédents, comment on peut, dans chaque cas et pour les vitesses successivement acquises par un même corps, trouver, en kilogrammes, la valeur de la force motrice F, qui modifie le mouvement à l'instant qui répond à chacune de ces vitesses, on n'éprouvera aucune difficulté à appliquer la méthode aux diverses circonstances que présente le mouvement vertical ou horizontal des corps dans les fluides indéfinis.

Nous avons (180), d'après ce qui a déjà été souvent rappelé dans ces *Applications*, pour calculer le temps t que met la force F, à accroître, de la quantité v, la vitesse V d'un corps dont le poids est P, la formule

$$t = \frac{P}{gF} \times v = \frac{P}{9^m,8088F} \times v.$$

Cela posé, concevons une courbe $O'b'f'k'$ (fig. 61), dont les abscisses Oa, Ob, Oc, ... Og, représentent les valeurs successives

en mètres, de la vitesse V du corps, et dont les ordonnées OO′, aa', bb', ... gg', représentent les valeurs, en nombres, du quotient de P par $9^m,8088 \times F$, relatives aux diverses abscisses ou vitesses correspondantes. Supposons, en outre, que les intervalles égaux Oa, ab, bc, ... gh représentent la valeur très-petite et censée constante, de chacun des accroissements ou de chacune des diminutions v, de vitesse, successivement éprouvés, par le mobile, dans des instants qui ici ne seront pas en général égaux, puisque le mouvement n'est point uniformément accéléré ou retardé (107 et suiv.); il s'agira de trouver, pour chaque abscisse telle que Oc, par exemple, ou pour chaque valeur correspondante de la vitesse V du mobile, la mesure du produit de l'ordonnée cc' par v ou par cd, puis de faire la somme totale de ces produits pour l'intervalle de mouvement ag, je suppose, qu'on veut considérer; car, d'après la formule, on obtiendra ainsi la valeur du temps qui s'est écoulé dans cet intervalle, et qui est la quantité que nous cherchons à calculer. Or, en raisonnant ici comme on l'a fait dans les n^{os} 72, 107, 135, etc., il sera aisé d'apercevoir que la somme dont il s'agit, n'est autre chose que la superficie de l'aire trapézoïde aa' c' g' ga, comprise entre la courbe, l'axe OV des abscisses et les deux ordonnées aa', gg', qui répondent à l'intervalle de mouvement ag, pour lequel on se propose de calculer le temps écoulé, par le moyen des vitesses Oa, Og, qui sont censées données immédiatement : le calcul de ce temps se fera donc aisément par la méthode du n° 180.

253. *Applications particulières relatives à la chute des corps dans l'air.* Prenons, pour exemple, une balle en bois d'orme de 3° de diamètre, son poids sera (35 et 247) $\frac{12^k,68}{9 \times 125} = 0^k,0113$ environ, et les résistances que lui opposera l'air, seront le $\frac{1}{25}$ de celles du tableau du n° 215, pour les mêmes vitesses. Supposons que, cette balle étant tombée naturellement dans l'air, d'une certaine position pour laquelle la vitesse initiale était par conséquent nulle, il s'agisse de trouver quel sera le temps qu'elle mettra pour acquérir une vitesse de 8^m, représentée par Od, je suppose. On divisera cette vitesse en un certain nombre pair de parties égales, et on calculera les valeurs correspondantes de F (246), puis celles des ordonnées ou des quotients de P par gF. En partageant seulement l'intervalle Od ou les 8^m de vitesse, en 4 parties égales aux points a,

b, *c*, on pourra dresser la table suivante des diverses grandeurs relatives à la question (215 et 247), en observant que le poids du volume d'air déplacé peut encore ici être négligé par rapport à celui du corps dans le vide, puisqu'il en est, au plus, le 652^{mmc},

points.	O,	*a*,	*b*,	*c*,	*d*,
vitesses.	0m,	2m,	4m,	6m,	8m,
résistances R de l'air.	0k,	0k,0001,	0k,0004,	0k,0010,	0k,0018,
valeurs de F.	0k,0115,	0k,0112,	0k,0109,	0k,0105,	0k,0097,
valeurs de $\frac{P}{gF}=\frac{0,00115}{F}$ . . .	0,1018,	0,1027,	0,1055,	0,1117,	0,1211.

Par conséquent, on aura

somme des valeurs extrêmes de $\frac{P}{gF}$.	0,1018	+ 0,1211	= 0,2229
2 fois celle des autres valeurs impaires.	2	× 0,1055	= 0,2110
4 fois celle des valeurs paires.	4	(0,1027 + 0,1117)	= 0,8576
Total.			1,2915

Cette somme totale, multipliée par le $\frac{1}{3}$ de l'intervalle constant *ab* entre les vitesses successives, qui est ici 2 mètres, donne $\frac{1}{3}\,2 \times 1,2915 = 0'',861$, parce que *g* répond (117) à une seconde qui est ainsi l'unité de temps. Si le corps fût tombé dans le vide, il eût acquis la vitesse des 8m, dans un temps qu'on obtient par la formule $V = gT$ du n° 117, laquelle donne $T = \frac{V}{g} = \frac{8^m}{9^m,81} = 0'',815$; ce temps est donc un peu moindre que celui qui répond à la chute dans l'air, comme cela doit être.

Si on se fût contenté de diviser l'intervalle de O à *d*, ou de zéro à 8m, en deux parties égales seulement, en *b*, l'on eût trouvé, pour la valeur du temps écoulé, $\frac{1}{3}\,4^m \times (0,1018 + 0,1211 + 4 \times 0,1055$, $= 0'',860$, laquelle ne diffère que de $\frac{1}{861}$ de celle qui a été obtenue précédemment; or cela provient (180) de ce que la méthode est ici très-approchée, attendu que la première partie de la courbe, $O'a'b'c'e'$, diffère très-peu d'une ligne droite, et que les 8m de vitesse sont encore loin de la limite 19m,70, relative au plus grand mouvement de la balle (247). On pourra donc, dans des cas semblables, abréger beaucoup le calcul du temps écoulé.

Cherchons maintenant le temps relatif à une vitesse de 16m,

laquelle approche de la vitesse limite $19^m,70$: en partageant l'intervalle, de 8^m à 16^m, en 4 parties égales répondant aux vitesses de 10^m, de 12^m et de 14^m, on trouvera pour résultat final, en opérant comme ci-dessus, $1'',389$, pour le temps écoulé entre l'instant où la vitesse est de 8^m et celui où elle est de 16^m. Si l'on eût seulement divisé cet intervalle en deux parties égales, on eût trouvé $1'',397$, nombre qui ne surpasse le précédent que de $\frac{1}{171}$ environ de sa valeur, et qui, même pour des opérations délicates, serait suffisamment approché. En ajoutant $1'',389$ à $0'',861$, temps qui répond à la vitesse de 8^m antérieurement acquise, le temps total relatif aux 16^m, sera $2'',250$, tandis que, dans le vide, le temps de la chute serait seulement $\frac{16^m}{9^m,809} = 1''631$.

Pour trouver le temps que le corps mettrait à acquérir la vitesse de 18^m qui approche encore plus de la vitesse limite, il suffirait de partager l'intervalle des 2^m, compris depuis 16^m jusqu'à 18^m, en deux parties égales ; on trouverait ainsi que le temps, écoulé dans cet intervalle, est d'environ $0'',845$, c'est-à-dire peu différent de celui qui, dans les premiers instants de la chute, a suffi pour imprimer la vitesse de 8^m à la boule. Ainsi le corps acquerra, en $2'',250 + 0'',845$ ou en moins de $3'',1$, une vitesse de 18^m très-approchante de la plus grande vitesse de chute $19^m,7$, qu'il ne peut atteindre (250) réellement qu'après un temps infini ou excessivement long. Dans le vide, le temps relatif aux 18^m de vitesse serait seulement de $1'',84$.

Il faudra opérer, d'une manière absolument semblable, quand il s'agira de trouver le temps qu'un corps quelconque, tel qu'un boulet, un ballon, un parachute, met pour ralentir ou augmenter sa vitesse horizontale ou verticale d'une quantité donnée, par suite de l'action de la pesanteur et de la résistance du milieu ; seulement il faudra avoir soin, si on tient à une grande rigueur, de resserrer davantage les opérations vers les parties de la courbe qui diffèrent beaucoup de la ligne droite ; et l'on fera bien, sous ce rapport, de construire approximativement, dans chaque cas, cette même courbe, afin d'en étudier à l'avance la forme et les propriétés. Quant aux recherches qui exigent moins d'exactitude, on pourra diminuer le nombre des opérations : voulant, par exemple, calculer, tout d'un coup, le temps qui répond à la vitesse des 16^m ci-dessus, on se bornera à partager cette vitesse en deux par-

ties égales de 8^m chacune, et, ayant trouvé que les valeurs du quotient de P par gF, qui répondent à 0^m, à 8^m et à 16^m, sont 0,1018, 0,1211, 0,2875, respectivement, on obtiendra la quantité $\frac{1}{3}\,8^m\,(0{,}1018 + 0{,}2875 + 4 \cdot 0{,}1211) = 2'',33$, pour valeur approchée du temps dont il s'agit, laquelle est ainsi trop forte de $\frac{1}{23}$ environ; en partageant l'intervalle en 4 parties égales, on trouverait $2'',256$, qui ne diffère plus que de $\frac{1}{373}$ de la valeur $2'',25$ trouvée ci-dessus.

254. *Trouver l'espace qui répond à une vitesse donnée du corps.* Ayant calculé, selon ce qui précède, la table ou la loi qui donne les vitesses relatives aux temps écoulés, il ne sera pas difficile, d'après le n° 134, de calculer aussi l'espace décrit, par le corps, pendant que sa vitesse a été augmentée ou diminuée d'une quantité donnée; mais, cette méthode exigeant que l'on ait préalablement calculé la loi dont il s'agit, ou qu'elle soit donnée immédiatement, deviendrait beaucoup trop laborieuse dans le cas où l'on ne connaîtrait que la loi qui lie la force motrice à la vitesse, ce qui est le cas actuel. On peut alors obtenir directement l'espace décrit sans calculer les temps écoulés.

En effet, nous avons, e étant l'espace décrit pendant le temps élémentaire t (108, 134 et 135),

$$e = \mathrm{V} \times t = \mathrm{V} \times \frac{\mathrm{P}}{g\mathrm{F}} \times v = \frac{\mathrm{PV}}{9^m,809\mathrm{F}} \times v.$$

Raisonnant donc comme dans le cas précédent (252), et calculant, pour chaque valeur de la vitesse V, la valeur correspondante du quotient PV par $9^m,809$F, on pourra former une nouvelle courbe $Oa''b''\ldots g''$ (fig. 61), ayant ces quotients pour ordonnées, et toujours pour abscisses les valeurs correspondantes de la vitesse V. Or la surface comprise entre cette courbe, l'axe OV des abscisses et les ordonnées qui répondent à l'intervalle de mouvement qu'on veut considérer, donnera évidemment la somme des valeurs successives des éléments d'espace e, et par conséquent la longueur totale du chemin parcouru par le mobile dans cet intervalle : cette surface se calculera d'ailleurs absolument de la même manière que celle qui donne le temps, par la méthode du n° 180.

255. *Applications particulières relatives à la chute verticale des corps dans l'air.* Qu'il s'agisse, par exemple, de calculer, pour la

balle de bois d'orme ci-dessus, l'espace décrit quand cette balle a acquis la vitesse de 8^m; on formera, en multipliant simplement, par les valeurs de V, les quotients déjà trouvés (253) de P par gF, ou de 0,0015 par F, la table suivante :

vitesses.	0^m,	2^m,	4^m,	6^m,	8^m
valeurs de $\frac{P}{gF} \times V = \frac{0,0015}{F} \times V$,	0,	0,2054,	0,4220,	0,6702,	0,9688

espace parcouru $\frac{1}{3}\,2^m\,[0 + 0,9688 + 2.0,4220 + 4(0,2054 + 0,6702)] = 3^m,54$.

Dans le vide, l'espace décrit serait donné (118) par la formule

$$V^2 = 2gH; \quad \text{d'où} \quad H = \frac{8^m \times 8^m}{19^m,618} = 3^m,26,$$

puisqu'ici nous avons $V = 8^m$. La balle devrait donc tomber de plus haut dans l'air que dans le vide, pour acquérir la vitesse en question, ce qui est naturel.

En recommençant les mêmes calculs pour la vitesse de 16^m, on trouvera que la hauteur correspondante de la chute serait de $21^m,30$ pour l'air, et de $13^m,05$ seulement pour le vide : nous n'avons divisé l'intervalle, de 0^m à 16^m, qu'en quatre parties égales, ce qui suffit ici. On voit, par là, que les espaces décrits croissent d'une manière beaucoup plus rapide que les temps employés à les décrire (253) ; ce qui paraît évident d'après la seule inspection des courbes qui leur correspondent dans la fig. 61, et ce qui tient d'ailleurs à ce que les ordonnées aa'', bb'',.... gg'' croissent elles-mêmes plus rapidement que les ordonnées aa', bb',.... gg', puisqu'elles ont, pour valeurs (252 et 254), les produits de celles-ci par les valeurs correspondantes de la vitesse V ou des abscisses.

256. *Observations générales relatives au calcul des autres circonstances du mouvement, et conclusion.* — Les méthodes des nos 252 et 254 serviront, quelle que soit la loi que suive la force motrice F par rapport aux vitesses, pour trouver directement l'espace et le temps qui répondent à une vitesse donnée; mais, si c'était, au contraire, le temps où l'espace qui fût donné, et qu'il s'agit de calculer le vitesse correspondante, les opérations seraient beaucoup plus pénibles : on n'arriverait au résultat que par des tâtonnements plus ou moins longs, ou par la formation d'une table complète des temps

et des espaces qui répondent aux différentes vitesses, table qu'on calculerait, dans chaque cas, de la manière dont cela a été expliqué, n^os 253 et 255, pour quelques valeurs particulières de la vitesse. Néanmoins une certaine habitude des calculs et le tact qu'on acquiert toujours en traitant une question spéciale, serviront à diminuer beaucoup le nombre des tâtonnements et feront pressentir d'abord certaines limites entre lesquelles se trouvera comprise la valeur cherchée.

En dire davantage sur ces opérations, ce serait sortir tout à fait du cadre de cet ouvrage, sans en recueillir immédiatement un degré d'utilité qui pût compenser la longueur des développements. Nous ferons seulement remarquer, à ceux des lecteurs qui désireraient entreprendre de pareils calculs, que la Balistique, qui est devenue de nos jours une science à part très-difficile et très-étendue, offre des méthodes particulières pour diminuer, mais non pour éviter entièrement les tâtonnements, et cela à l'aide des tables nommées *logarithmiques et trigonométriques*. Ces tables donnent, dans certains cas, la valeur toute calculée de la quantité qu'on cherche; mais généralement elles ne la fournissent qu'après qu'on a effectué un certain nombre d'opérations numériques sur les grandeurs données, ou qu'après qu'on a préparé convenablement ces quantités pour que le résultat se trouve immédiatement ramené à celui qui est contenu dans les tables. C'est ainsi, par exemple, que la table de multiplication ordinaire fait obtenir le produit ou le quotient des nombres par une suite d'opérations particulières sur ces nombres, et que la table du n° 196 permet de calculer, par une simple proportion, la quantité de travail développée, par la vapeur, contre les pistons d'une machine à détente quelconque.

J'avais entrepris, en faveur des sous-officiers de l'artillerie et du génie, qui suivent ce Cours de mécanique, de montrer comment le calcul des lois du mouvement dans l'air peut se ramener, sans l'emploi de considérations transcendantes, et par les simples propriétés des figures géométriques, aux opérations qui se trouvent immédiatement effectuées dans les tables de logarithmes, dont il eût ici suffi de donner un extrait de quelques pages seulement; mais j'en ai été détourné par l'idée d'allonger par trop ce volume, qui l'est déjà beaucoup sans doute. En effet, la formule qui donne les valeurs de la force dynamique F, relative au mouvement des projectiles dans l'air, variant, dans son expression, suivant les cir-

constances particulières de ce mouvement (240 et suiv.), il en résulte qu'on a huit questions distinctes à traiter, lesquelles, à la vérité, ont beaucoup d'analogie entre elles; mais n'en exigent pas moins un certain développement, pour être convenablement exposées à des personnes qui ignorent les calculs transcendants et l'usage des tables. Je donnerai néanmoins, par la suite, la solution de quelques-unes des plus importantes d'entre elles, si l'occasion favorable vient à s'en présenter, ou si l'on juge que la chose offre, en elle-même, un but suffisant d'utilité.

TABLE DES MATIÈRES.

Nos.		Pag.
	DÉDICACE.	v
	AVANT-PROPOS.	VII

PRÉLIMINAIRES.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LA CONSTITUTION ET LES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES CORPS.

États principaux des corps.

1.	Corps à l'état solide, ou solides, ductilité, malléabilité.	1
2.	Corps à l'état liquide, ou liquides.	»
3.	Corps à l'état gazeux, nommés gaz et vapeurs.	2
4.	Atmosphère, air atmosphérique.	3
5.	Fluidité, changements d'état des corps.	»

Divisibilité des corps.

6.	Divisibilité des fluides.	4
7.	Divisibilité des solides, opérations qui s'y rapportent.	»
8.	Extrême divisibilité des corps; ductilité, ténacité.	5
9.	Atomes, molécules et particules.	»

Porosité des corps.

10.	Pores, volume réel, volume apparent.	6
11.	Tissus, corps organiques, pierres et métaux.	»
12.	Preuve générale de la porosité.	7

Nos. Pag.

67. Action combinée et réciproque des forces. 43
68. Exemple de l'action combinée des forces. 45
69. Observation sur l'équilibre des forces. 44

Du travail mécanique des forces et de sa mesure.

70. Notions générales. 45
71. Mesure du travail quand la résistance est constante. »
72. Mesure du travail quand la résistance est variable. 47
73. Valeur de l'effort moyen. 48
74. Divers exemples du travail mécanique. 49
75. Observations sur le travail des moteurs 50
76. Complication de certains travaux. »
77. Spécification du travail mécanique. »
78. De l'élévation verticale des fardeaux. 51
79. Des autres moyens d'évaluer le travail. »
80. Dénominations admises pour le travail. 53
81. Choix de l'unité de travail. 53
82. Unités de travail proposées ou adoptées. 54
83. Conventions générales. 55
84. Observations particulières. 56

Des conditions du travail mécanique.

85. Première condition générale. 57
86. Seconde condition générale. 58
87. Réflexions sur le travail des moteurs animés. 59
88. Distinction du travail intérieur et du travail extérieur. 60
89. Tout mouvement, toute action des forces supposent un travail. »
90. Quand et comment ce travail peut être censé nul. 61
91. Action d'une force perpendiculaire au mouvement. 62
92. Transport horizontal des fardeaux. »
93. Observations sur le transport horizontal. 63
94. Réflexions générales. 64

De la consommation et de la reproduction du travail.

95. Consommation inutile du travail. 65
96. Moyens d'éviter la consommation inutile du travail. 66
97. De la reproduction du travail par les ressorts. 67
98. Des ressorts considérés comme réservoirs d'action. 68
99. De la production du travail par la chaleur, 73
100. Usage du calorique comme moteur, 74

Nos.		Pag.
101.	Condition générale de l'emploi des moteurs.	71
102.	De la reproduction du travail par la pesanteur.	»
103.	De la consommation du travail sans restitution.	72
104.	De la consommation nécessaire ou utile du travail.	»
105.	Toute production de travail suppose une consommation.	73
106.	De la consommation et de la reproduction du travail par l'inertie.	74

De la communication du mouvement par les forces motrices constantes.

107.	Notions générales.	75
108.	Du mouvement uniformément accéléré.	76
109.	Lois du mouvement uniformément accéléré.	78
110.	Formules relatives au mouvement uniformément accéléré.	»
111.	Cas où le corps part avec une vitesse déjà acquise.	80
112.	Du mouvement uniformément retardé.	»

Des lois du mouvement vertical des corps pesants.

113.	Causes qui influent sur le mouvement des corps dans l'air.	82
114.	Chute verticale des corps dans l'air.	83
115.	Chute dans le vide, mode d'action de la pesanteur.	»
116.	Expérience sur la chute des corps.	85
117.	Lois de la chute des corps dans le vide.	»
118.	Formules et applications.	86
119.	Observations diverses.	87
120.	Ascension verticale des corps pesants.	88

Force vive, masse et quantité de mouvement des corps.

121.	Travail relatif à la vitesse de chute des corps.	89
122.	Force vive des corps; sa relation avec le travail mécanique.	»
123.	Comment on doit entendre la force vive.	90
124.	Réflexions sur la force vive et les forces motrices en général.	91
125.	Définition de la masse des corps.	92
126.	Expression abrégée de la masse et de la force vive, dans les calculs.	93
127.	Quantité de mouvement des corps.	»
128.	Observations générales.	94

De la communication du mouvement par les forces motrices en général.

129.	Rapport des forces motrices au mouvement qu'elles impriment.	94
130.	Mesure des forces motrices et d'inertie par la vitesse imprimée, et réciproquement.	95

N°s Pag.

131. Rapport des forces motrices aux quantités de mouvement imprimées. 96
132. Autre mesure des forces motrices et d'inertie. 97
133. Calcul des mêmes forces par la loi géométrique du mouvement. 98
134. Trouver la loi du mouvement quand on a celle de la force. 99

De la force vive des corps en général et de sa relation avec le travail mécanique.

135. Mesure du travail des forces motrices et d'inertie. 100
136. Relation entre le travail développé et la force vive acquise. 101
137. Cas où la force motrice est opposée au mouvement du corps. 103
138. Transformation du travail en force vive, et réciproquement. 105
139. Restitution et consommation de la force vive dans le choc des corps. 104
140. Réflexions nouvelles sur l'impossibilité d'augmenter le travail mécanique. »
141. Examen particulier du mouvement périodique. 105
142. Démonstration des mêmes choses par la Géométrie. 106
143. Exemples particuliers relatifs au mouvement périodique. 107
144. Du rôle que joue l'inertie dans divers procédés des arts. 108
145. Observations sur ces exemples. 109

APPLICATIONS, EXERCICES ET DÉVELOPPEMENTS DIVERS.

Questions concernant l'inertie et la force vive.

146. Travail nécessaire pour vaincre l'inertie d'une voiture. 111
147. Temps nécessaire pour imprimer le mouvement à la voiture. 112
148. Observation générale sur le travail des moteurs. 113
149. Exemples relatifs à la force vive des fardeaux et des eaux courantes des rivières. »
150. Exemples relatifs à l'art de lancer l'eau à distance. 115
151. Observations particulières sur les jets verticaux et inclinés. 116
152. Réflexions sur l'influence de l'inertie. 117

De la communication du mouvement par le choc direct des corps.

153. Considérations générales. 118
154. Principe relatif au choc direct des corps. 119

Nos. Pag.

155. Du choc des corps pendant la compression. 120
156. Vitesse des corps au moment de leur plus grande compression. »
157. Du choc pendant le retour des corps vers leur forme primitive. 121
158. Du mouvement des corps après le choc. »
159. Remarques relatives à l'application des formules. 123
160. Exemples particuliers. 124
161. De la force vive des corps après le choc. 125
162. Conséquences particulières. 127
163. Formules relatives au cas le plus général du choc direct. 128
164. Remarques relatives aux applications numériques. 130
165. Comparaison des effets des chocs et des pressions simples. 131

Applications particulières relatives au choc direct.

166. Exemple du choc d'un corps qui tombe, d'une certaine hauteur, sur une substance plus ou moins molle. 132
167. Calcul hypothétique de la durée de l'enfoncement produit par le choc. 134
168. Cette durée est d'autant moindre que le corps choqué est plus roide. 135
169. Observations générales sur la communication du mouvement par le choc. 137
170. Utilité du choc dans les arts; battage des pilots de fondation. »
171. Conditions du battage de pilots et conséquences qui en résultent. 138

De la communication du mouvement par le ressort des gaz, ou du tir des projectiles.

172. Observations générales. 140
173. De la communication du mouvement par les gaz de la poudre. 141
174. Observations sur la vitesse du recul des pièces. 143
175. Mesure du travail total développé par la poudre contre la pièce et le boulet. »
176. Conséquences relatives aux vitesses initiales des projectiles, leur accord avec l'expérience. 144
177. Du travail de la poudre comparé à celui des machines à vapeur; son effort moyen et absolu, etc. 146
178. Examen et prix comparés du travail de la poudre et de la vapeur d'eau. 148
179. Aperçus sur les moyens d'utiliser l'action de la vapeur pour lancer les projectiles. 149

Méthode générale des quadratures pour calculer l'aire superficielle des courbes planes.

180. Démonstration géométrique de la méthode. 151

Nos. Pag.

Du travail produit par la détente des gaz.

181. Exemple de la manière de calculer ce travail. 151
182. Pression moyenne de l'air, vitesse imprimée, etc. 157
183. Des avantages de la détente prolongée et de sa limite utile. 158
184. Examen particulier des différentes causes qui diminuent les effets de la détente des gaz. 160
185. Réflexions nouvelles sur la déperdition inévitable du travail dans la reaction des corps, et sur les courtes mais rapides détentes des gaz. 162
186. Principes relatifs au travail produit par la détente des gaz. 165

Du travail produit par l'action mécanique de la vapeur.

187. Première idée du mode d'action de la vapeur dans les machines. 167
188. Exemple de la manière de calculer le travail produit par la détente de la vapeur. 168
189. Méthodes abrégées de calcul employées dans l'industrie ; comparaison de ces méthodes avec la précédente. 169
190. Notions plus étendues sur les machines à vapeur à simple et à double effet. 170
191. Du travail effectif des machines à vapeur, à basse pression, sans détente, et des effets de la pompe à air. 172
192. Notions relatives aux machines à vapeur, à moyenne pression, avec détente. 174
193. Calcul de la force des machines à vapeur, à moyenne pression, avec détente. 177
194. Des machines à haute pression, sans condenseur. 178
195. Limite utile de la détente dans les machines à vapeur. 179
196. Méthode abrégée pour calculer le travail des machines à vapeur. 183
197. Application particulière. 184
198. Observations générales. »

De la résistance des fluides homogènes et indéfinis, ou de l'action qu'ils exercent sur les corps solides.

199. Lois générales de cette résistance. 186
200. Modifications que ces lois subissent dans certains cas. 188
201. Observations sur la résistance comparée des corps de formes dissemblables. 191

Nos. Pag.

Résultats des expériences faites sur la résistance des fluides.

202. Règle ou formule générale pour calculer cette résistance dans les différents cas. 192
203. Plans ou planchettes minces. 193
204. Plans minces avec rebords et surfaces minces. 194
205. Corps prismatiques. 195
206. Corps prismatiques avec proues et poupes. »
207. Vaisseaux. 196
208. Observations relatives au calcul de la résistance des bateaux qui naviguent sur les rivières. »
209. Résistance des cônes, des sphères, etc. 197
210. Loi particulière de la résistance de l'air. 198

Questions particulières concernant la résistance de l'air et de l'eau.

211. Préparation de la formule pour ce cas, calcul de la densité des gaz. 199
212. Exemples concernant la navigation des bateaux sur les canaux et les rivières. 200
213. Exemples concernant les volants à ailettes. 203
214. Exemples relatifs au mouvement des moteurs animés, etc. »
215. Calcul de la résistance de l'air contre les boulets de canon. 205

Résistance des fluides imparfaits et indéfinis, ou pénétration des corps durs dans les corps mous.

216. Considérations préliminaires. 207
217. Formule pour calculer la résistance. »
218. Résultats des expériences connues. 208
219. Calcul de la durée et de la profondeur de la pénétration. 210
220. Principe relatif au volume de l'impression. 211
221. Méthode pour calculer la profondeur et la durée des petites impressions. 212
222. Observations concernant la dureté du projectile et l'épaisseur du milieu. 215

N^os. Pag.

Des lois de l'impression dans les milieux très-consistants et d'une étendue limitée.

223. Influence de l'inertie et de la flexibilité des milieux dont le mouvement est gêné par des obstacles. 216
224. Influence de l'élasticité du milieu. 217
225. Conclusions relatives à la pénétration des milieux flexibles retenus par des obstacles. 218
226. De la pénétration des milieux limités et entièrement libres. 219
227. Du cas où le milieu libre est flexible et élastique. 221
228. Applications et formules particulières relatives au pendule balistique. 222
229. Observations et conséquences particulières relatives à la profondeur de l'impression. 225

De la propagation du mouvement dans l'intérieur des milieux de diverses natures, et des effets de sa durée.

230. Idée de l'influence que cette durée exerce sur les lois de la résistance des milieux indéfinis. 226
231. Conséquences générales et observations relatives aux milieux limités. 226
232. Aperçus sur la durée de la propagation du mouvement dans l'intérieur des milieux. 228
233. Exemple particulier de l'influence qu'exerce la durée de la propagation du mouvement. 230
234. Autre exemple relatif aux corps durs très-fragiles. 231
235. Caractères qui distinguent la dureté de la ductilité. 232
236. Procédé usité dans les arts pour mesurer la dureté des corps par le choc ou la pression. 233
237. Observations diverses sur ces procédés. 235
238. Autres procédés moins parfaits pour mesurer la dureté des corps. »

Examen des principales circonstances du mouvement horizontal et vertical des corps dans les fluides, et spécialement dans l'air.

239. Considérations préliminaires. 237
240. Valeur de la force motrice dans le cas où le corps se meut sur un plan de niveau. »

Nos. Pag.

241. Ce n'est qu'après un temps infini, que la vitesse s'éteint ou parvient à sa limite, quand la force motrice diminue sans cesse. 238
242. Réflexions sur la manière dont le mouvement s'éteint ou s'accomplit à la surface de la terre. 239
243. Idée de la manière dont le mouvement horizontal des corps peut s'anéantir complétement, même en un temps fort court. 241
244. Valeur de la force motrice dans le cas où le corps est lancé verticalement de bas en haut. 242
245. Exemple particulier relatif à l'ascension verticale des ballons. 243
246. Calcul de la force motrice dans le cas où le corps est lancé verticalement, de haut en bas, ou tombe par son propre poids. 245
247. Exemples de calcul relatifs à la plus grande vitesse de chute des boulets. 247
248. Observations sur le mouvement des parties très-fines des corps. 248
249. Calcul de la plus grande vitesse de descente des parachutes. »
250. Démonstration géométrique de l'impossibilité que le mouvement continu atteigne rigoureusement une parfaite uniformité. 249
251. Réflexions sur la manière dont les moteurs communiquent le mouvement aux machines. 251

Calcul des lois du mouvement horizontal et vertical des corps dans les fluides indéfinis.

252. Méthode pour trouver le temps qui répond à une vitesse donnée ou acquise par le corps. 252
253. Applications particulières relatives à la chute des corps dans l'air. 253
254. Trouver l'espace qui répond à une vitesse donnée du corps. 256
255. Applications particulières relatives à la chute verticale des corps dans l'air. »
256. Observations générales relatives au calcul des autres circonstances du mouvement, et conclusion. 257

FIN.

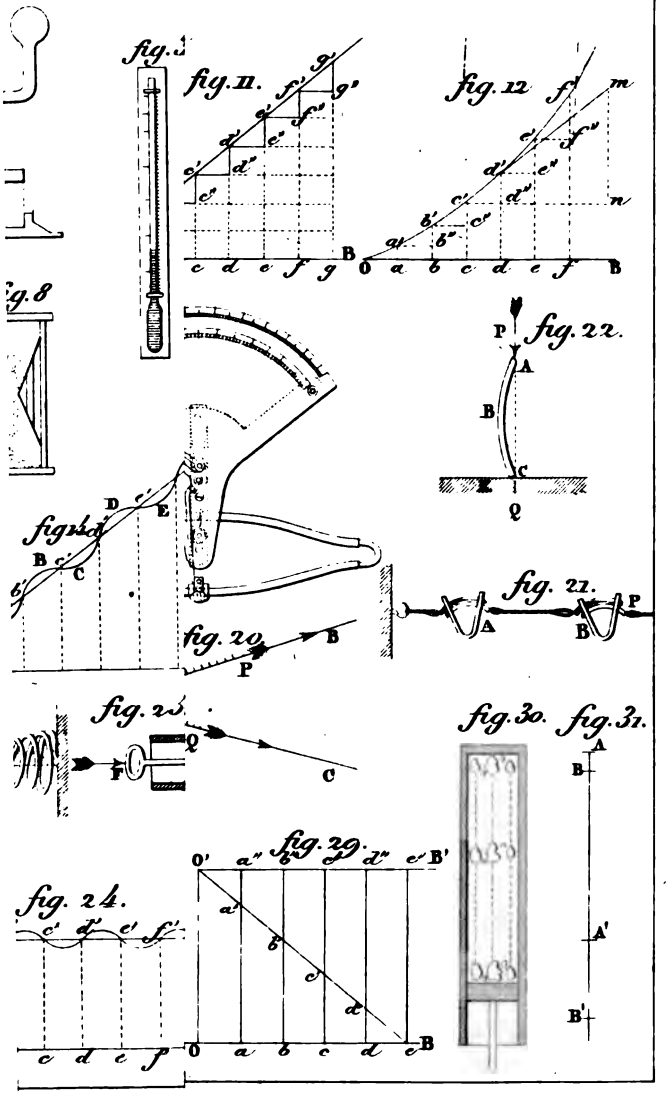


fig. 8
fig. 11.
fig. 12
fig. 22.
fig. 19.
fig. 20.
fig. 21.
fig. 23.
fig. 24.
fig. 29.
fig. 30.
fig. 31.

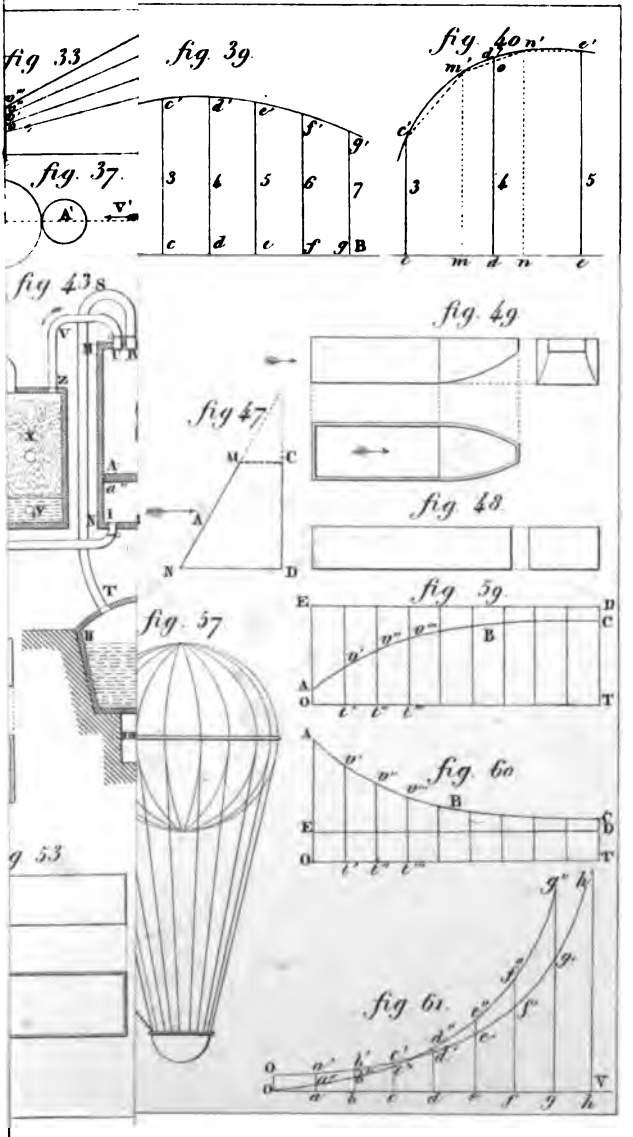
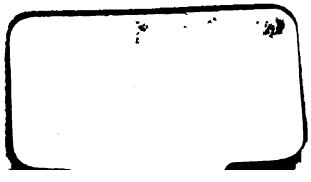


fig 33
fig 39
fig 40
fig 37
fig 43
fig 49
fig 47
fig 48
fig 59
fig 57
fig 60
fig 53
fig 61